

Synthèse temporelle et fréquentielle de filtres \mathcal{H}_∞ d'ordre plein pour les systèmes singuliers

Montassar EZZINE^{1,2}, Harouna SOULEY ALI¹, Mohamed DAROUACH¹, Hassani MESSAOUD²

¹Centre de Recherche en Automatique de Nancy,
UMR 7039 – Nancy-Université, IUT de Longwy CNRS
186 Rue de Lorraine, 54400 Cosnes et Romain, France

montassar.ezzine@iut-longwy.uhp-nancy.fr, souley@iut-longwy.uhp-nancy.fr, darouach@iut-longwy.uhp-nancy.fr

²Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir
Avenue Ibn El Jazzar, 5019 Monastir, Tunisie
hassani.messaoud@enim.rnu.tn

Résumé— Cet article propose une synthèse temporelle puis fréquentielle de filtres \mathcal{H}_∞ d'ordre plein pour les systèmes singuliers sujets à des perturbations à énergie bornée. La synthèse temporelle est basée sur le non biais du filtre, la résolution d'une équation de Sylvester, et afin d'éviter d'avoir à dériver les perturbations, le système d'erreur est transformé en un système singulier. Puis la méthode LMI (Inégalités Matricielles Linéaires) est utilisée pour trouver le gain du filtre satisfaisant en plus de la stabilité, une atténuation des perturbations. La synthèse fréquentielle est déduite à partir du filtre obtenu dans le domaine temporel par l'utilisation de descriptions matricielles fractionnaires (MFD) et de l'approche factorisation.

Mots-clés— Filtrage \mathcal{H}_∞ non biaisé, système singulier, domaine temporel, domaine fréquentiel, Inégalités Matricielles Linéaires (LMI), Descriptions Matricielles Fractionnaires (MFD).

I. INTRODUCTION

Le filtrage des systèmes singuliers sujets à des perturbations à énergie bornée, trouve son intérêt dans le fait, qu'il permet d'estimer les composantes du vecteur d'état en minimisant l'influence de ces perturbations sur l'erreur d'estimation. De plus, les systèmes singuliers, dit aussi algébro-différentiels peuvent être considérés comme une généralisation des systèmes dynamiques usuels puisqu'ils permettent, à travers les relations algébriques et différentielles, de conserver aux systèmes leurs significations physiques (d'où l'appellation anglo-saxon "descriptor system"), ainsi que de modéliser des processus à comportements non causaux.

L'étude des systèmes singuliers a motivé de nombreuses recherches. Parmi celles-ci, beaucoup concernent la synthèse d'observateurs dans le domaine temporel, [1], [18] [19]... Dans le domaine fréquentiel, il n'y a pas assez de travaux sur l'estimation d'état [3], [4], [20], [6]; pourtant l'approche fréquentielle est souvent la base de nombreuses analyses effectuées sur les systèmes de commande. Ainsi il est connu que le retour d'état optimal linéaire et les problèmes de filtrage peuvent être formulés et résolus dans le domaine fréquentiel. En plus il a été montré dans [12] que la loi par retour d'état ainsi que le filtrage optimal peuvent être caractérisés par des matrices polynomiales qui paramètrent directement la commande par retour d'état et l'observateur dans le domaine fréquentiel.

Dans ce contexte, nous proposons, à travers cet article,

deux nouvelles approches, une temporelle et une autre fréquentielle, pour résoudre le problème de filtrage pour les systèmes singuliers. La synthèse temporelle est basée sur le non biais du filtre, ce qui conduit à résoudre une équation de Sylvester. Puis pour éviter d'avoir à dériver la perturbation, le système d'erreur est transformé en un système singulier et finalement en utilisant le lemme borné réel pour les systèmes singuliers, la solution est donnée sous forme LMI. En effet le gain Z paramétrant toutes les matrices du filtre \mathcal{H}_∞ proposé est déduit à partir des solutions des LMI. La synthèse fréquentielle quant à elle, découle de la synthèse temporelle en proposant des descriptions matricielles fractionnaires (MFD) judicieuses des matrices du filtre qui ont la spécificité d'être premières entre elles, et en appliquant l'approche factorisation [9]. La motivation principale de formuler les résultats du domaine temporel au domaine fréquentiel s'explique par les avantages que cela présente pour la commande basée-observateurs [17]. En effet, dans ce cas, le correcteur est commandé par les entrées et sorties du processus. Donc, seul le comportement entrée-sortie du correcteur (caractérisé par sa fonction de transfert) affecte les propriétés de la boucle fermée du système. Les degrés de liberté additionnels donnés par l'approche fréquentielle peuvent être utilisés pour d'autres spécifications telles que la robustesse par exemple (voir [17]).

II. POSITION DU PROBLÈME

Considérons le système multivariable invariant dans le temps, régit par la représentation d'état suivante :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_1w(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_2w(t) \quad (1b)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement le vecteur d'état et la mesure, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ représente les perturbations, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ est l'entrée du processus. $E \in \mathbb{R}^{r \times n}$, A, B, D_1, C et D_2 sont des matrices connues de dimensions appropriées. De plus, on suppose que :

Hypothèse 1 : [1]

1) $\text{rang } E = r$, E est donc de rang plein lignes

2) $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$

Nous donnons alors le problème qui sera traité dans cet article :

Problème 1 : On se propose dans ce papier, de donner deux nouvelles méthodes de synthèses de filtres \mathcal{H}_∞ d'ordre plein pour la classe la plus générale des systèmes, à savoir les systèmes singuliers. La méthode temporelle devra générer l'estimée $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ et la méthode fréquentielle doit donner l'estimée $\hat{x}(s)$ de $x(s)$, en utilisant les entrées et sorties disponibles $u(t)$ et $y(t)$. En plus de la stabilité, l'erreur d'estimation $e(t)$ doit satisfaire le critère d'atténuation \mathcal{H}_∞ suivant

$$\bar{J} = \sup_{w \in L_2[0, \infty)} \frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|w\|_2} = \|F_{ew}\|_\infty < \gamma \quad (2)$$

où $\|w\|_2 \neq 0$ et $F_{ew}(s) = \frac{e(s)}{w(s)}$ est la matrice de transfert des perturbations $w(t)$ à l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, pour un $\gamma > 0$ donné.

III. SYNTHÈSE DANS LE DOMAINE TEMPOREL

Du fait que, $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$, il peut toujours exister, en appliquant la décomposition en valeurs singulières (SVD), une matrice inversible $\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$ telle que

$$a_0E + b_0C = I_n \quad (3)$$

$$c_0E + d_0C = 0_{(r+m-n) \times n} \quad (4)$$

Notre but est de synthétiser le filtre \mathcal{H}_∞ d'ordre n suivant pour le système (1) :

$$\dot{\varphi}(t) = N\varphi(t) + L_1y(t) + Gu(t) \quad (5a)$$

$$\hat{x}(t) = \varphi(t) + b_0y(t) + Kd_0y(t) \quad (5b)$$

où $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimée de $x(t)$.

En utilisant (3), l'erreur d'estimation obéit à l'équation suivante :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (6a)$$

$$= \psi_1Ex(t) - \varphi(t) - \psi_2w(t) \quad (6b)$$

avec

$$\psi_1 = a_0 + Kc_0 \quad (7)$$

$$\psi_2 = (b_0 + Kd_0)D_2 \quad (8)$$

Alors, sa dynamique peut être écrite comme suit :

$$\dot{e}(t) = \psi_1E\dot{x}(t) - \dot{\varphi}(t) - \psi_2\dot{w}(t) \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} &= Ne(t) + (\psi_1A - L_1C - N\psi_1E)x(t) \\ &+ (\psi_1B - G)u(t) + (\psi_1D_1 - L_1D_2 + N\psi_2)w(t) \\ &- \psi_2\dot{w}(t) \end{aligned} \quad (9b)$$

Le problème de synthèse du filtre est réduit alors à déterminer les matrices N , L_1 , G et K telles que

i) le filtre (5) soit non biaisé (c'est-à-dire que l'erreur d'observation $e(t)$ ne dépende pas directement de l'état $x(t)$)

ii) le filtre (5) est stable c'est-à-dire N est de Hurwitz (stable).

iii) le critère d'atténuation de perturbation (2) soit vérifié.

Le non biais du filtre est assuré si et seulement si l'équation de Sylvester suivante est vérifiée

$$\psi_1A - L_1C - N\psi_1E = 0 \quad (10)$$

De plus, nous considérons

$$\psi_1B - G = 0 \quad (11)$$

L'équation de Sylvester (10), s'écrit en tenant compte de (1a),(7), (8) et (4) comme suit

$$Na_0E - Kc_0A + (L_1 - NKd_0)C = a_0A \quad (12)$$

Avant de continuer, posons

$$J = (L_1 - NKd_0) \quad (13)$$

L'équation (12) peut être alors réécrite sous la forme matricielle suivante

$$[N \quad -K \quad J] \begin{bmatrix} a_0E \\ c_0A \\ C \end{bmatrix} = a_0A \quad (14)$$

Afin de résoudre (14), posons

$$[N \quad -K \quad J] = X \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} a_0E \\ c_0A \\ C \end{bmatrix} = \Sigma \quad (16)$$

$$a_0A = \Theta \quad (17)$$

donc (14) devient

$$X\Sigma = \Theta \quad (18)$$

Cette équation admet une solution X si et seulement si

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Theta \end{pmatrix} = \text{rang} \Sigma \quad (19)$$

Une solution générale de (18), si elle existe, est donnée par

$$X = \Theta\Sigma^+ - Z(I - \Sigma\Sigma^+) \quad (20)$$

avec Σ^+ est l'inverse généralisée de la matrice Σ donnée par (16) et Z une matrice arbitraire de dimension appropriée qui sera déterminée dans la suite en utilisant une approche LMI grâce au lemme borné réel pour les systèmes singuliers.

Une fois la matrice X connue, on peut facilement extraire les expressions des matrices N , L_1 , G et K . En effet,

$$N = X \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{11} - ZB_{11} \quad (21)$$

où

$$A_{11} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$B_{11} = (I_{r+2 \times m} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$J = X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} = A_{22} - ZB_{22} \quad (24)$$

avec

$$A_{22} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$B_{22} = (I_{r+2 \times m} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$-K = X \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r+m-n} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{33} - ZB_{33} \quad (27)$$

avec

$$A_{33} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r+m-n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$B_{33} = (I_{r+2 \times m} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r+m-n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Une fois que les matrices N et K sont obtenues, on trouve L_1 à partir de l'équation (13).

Et d'après (11), la matrice G est donnée par

$$G = \psi_1 B = (a_0 + Kc_0)B \quad (30)$$

Alors toutes les matrices intervenant dans la synthèse du filtre sont maintenant connues, si et seulement si la matrice Z est connue.

Sous la condition de non biais, la dynamique de l'erreur d'estimation (9b) s'écrit

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + \alpha w(t) - \psi_2 \dot{w}(t) \quad (31)$$

avec

$$\alpha = \psi_1 D_1 + N\psi_2 - L_1 D_2 = \alpha_1 - Z\alpha_2 \quad (32)$$

où

$$\alpha_1 = a_0 D_1 - \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} -b_0 D_2 \\ c_0 D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\alpha_2 = (I_{r+2m} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} b_0 D_2 \\ -c_0 D_1 \\ -D_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

et

$$\psi_2 = (Kd_0 + b_0)D_2 \quad (35)$$

$$= \psi_{21} - Z\psi_{22} \quad (36)$$

avec

$$\psi_{21} = -A_{33}d_0 D_2 + b_0 D_2 \quad (37)$$

$$\psi_{22} = -B_{33}d_0 D_2 \quad (38)$$

Notons que la dynamique d'erreur (31) contient la dérivée de $w(t)$. Ce problème est généralement résolu en ajoutant une contrainte supplémentaire sur les matrices du filtre (voir [2]) ou bien en choisissant un nouveau type de norme pour le système. Dans cet article, nous proposons une autre méthode qui consiste à réécrire le système d'erreur sous la forme d'un système singulier. A partir de (31), ce nouveau système singulier est donné par :

$$\begin{pmatrix} I & \psi_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\rho}_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \alpha \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w(t) \quad (39a)$$

$$e(t) = (I \ 0) \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} \quad (39b)$$

avec $e(t)$ l'erreur d'estimation et $\rho_1(t) = w(t)$.

Avant de continuer rappelons un résultat important sur les systèmes singuliers ; c'est une sorte de lemme borné réel pour les systèmes singuliers

Lemme 1 : [7]

Considérons le système singulier de la forme

$$F\dot{x} = Ax + Bw \quad (40)$$

$$z = Cx \quad (41)$$

où x est l'état, w les perturbations à énergie bornée et z est la sortie ; les matrices F , A , B et C sont connues. La paire (F, A) est admissible et $\|G\|_\infty < \gamma$ ($G = C(sF - A)^{-1}B$) si et seulement si il existe $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ vérifiant

1)

$$F^T X = X^T F \geq 0 \quad (42)$$

2)

$$A^T X + X^T A + C^T C + \frac{1}{\gamma^2} X^T B B^T X < 0 \quad (43)$$

Le but est d'appliquer ce résultat sur le système (39). Mais avant cela, considérons que le gain Z satisfait la relation suivante

$$Z\psi_{22} = 0 \quad (44)$$

La relation (44) permet d'éviter d'avoir une matrice de gain Z inconnue (à déterminer) dans la matrice singulière

$\begin{pmatrix} I & \psi_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ du système (39). (Correspondant à F dans (40))

Donc, il existe une matrice $Z_1 \in \mathfrak{R}^{n \times (r+2m)}$ satisfaisant

$$Z = Z_1(I - \psi_{22}\psi_{22}^+) \quad (45)$$

Soit,

$$\rho_{20} = \begin{pmatrix} I & \psi_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \psi_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$A_{20} = \begin{pmatrix} N & \alpha \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - ZB_{11} & \alpha_1 - Z\alpha_2 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\beta_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (48)$$

et

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} \quad (49)$$

Alors, le système singulier (39) peut s'écrire sous la même forme que (40) et (41) suivant :

$$\rho_{20} \dot{\chi}(t) = A_{20} \chi(t) + \beta_{20} w(t) \quad (50a)$$

$$e(t) = (I \ 0) \chi(t) \quad (50b)$$

Dans le théorème suivant, le lemme 1 est utilisé pour déterminer la matrice Z paramétrant toutes les matrices du filtre grâce à la résolution de LMI.

Théorème 1 : La paire (ρ_{20}, A_{20}) est admissible et

$$\|W(s) = (I \ 0)(s\rho_{20} - A_{20})^{-1}\beta_{20}\|_{\infty} < \gamma$$

pour un réel positif γ donné s'il existe des matrices $X_1 = X_1^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_2 = X_2^T > 0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $Y \in \mathbb{R}^{(r+2m) \times n}$ telles que les LMI suivantes soient satisfaites pour un réel $\gamma > 0$ donné

1)

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ \psi_{21}^T X_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^T & X_1^T \psi_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (51)$$

2)

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0_{n \times q} & I_n \\ P_{12}^T & P_{14} & X_2^T & 0_{q \times n} \\ 0_{q \times n} & X_2 & -\gamma^2 I_{q \times q} & 0_{q \times n} \\ I_n & 0_{n \times q} & 0_{n \times q} & -I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

avec $\theta_0 = (I - \psi_{22}\psi_{22}^+)^T$, $Y = Z_1^T X_1$ and

$$P_{11} = A_{11}^T X_1 + X_1^T A_{11} - B_{11}^T \theta_0 Y - Y^T \theta_0^T B_{11}$$

$$P_{12} = X_1^T \alpha_1 - Y^T \theta_0^T \alpha_2$$

$$P_{14} = -X_2 - X_2^T$$

Le gain Z_1 est alors donné par

$$Z_1 = X_1^{-1} Y^T \quad (53)$$

et Z est déduit à partir de la relation (45).

Preuve 1 : Appliquons le lemme 1 et le lemme de Schur [8] sur le système singulier (50), on obtient

1)

$$\Phi_1 = \Phi_1^T \geq 0 \quad \text{with } \Phi_1 = \rho_{20}^T \mathcal{X} \quad (54)$$

2)

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 + \Phi_2^T & \Phi_3^T & (I \ 0)^T \\ \Phi_3 & -\gamma^2 I & 0 \\ (I \ 0) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (55)$$

with

$$\Phi_2 = A_{20}^T \mathcal{X} \quad (56)$$

$$\Phi_3 = \beta_{20}^T \mathcal{X} \quad (57)$$

En posant $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ et en utilisant (46), la relation (54) est bien équivalente à (51). Puis, remplaçons

A_{20} et β_{20} de (55), par leurs expressions (47), (48) avec (45), la LMI (52) est obtenue, avec $\theta_0 = (I - \psi_{22}\psi_{22}^+)^T$ et $Y = Z_1^T X_1$.

Synthèse du filtre dans le domaine temporel

Les différentes démarches nécessaires pour le calcul du filtre \mathcal{H}_{∞} (5) se résument suivant les étapes suivantes :

1) Déterminer les matrices a_0, b_0, c_0 et d_0 en faisant une

décomposition en valeurs singulière de la matrice $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$

2) Calculer Σ et Θ à partir de (16), (17).

3) Toutes les matrices connues qui interviennent dans les LMI 51 et (52) soient $A_{11}, B_{11}, \alpha_1, \alpha_2, B_{33}, \psi_{22}, A_{33}$ and ψ_{21} sont calculés respectivement par (22), (23), (33), (34), (29), (45), (28), (37). Donc, θ_0 est bien déterminé.

4) La résolution des LMI (51) et (52) donne le gain Z_1 , et donc à partir de (45), la matrice Z est déterminée.

5) Calculer la matrice du filtre N à partir de (21).

6) Puis la matrice K est obtenue grâce à (27). Donc ψ_1 est connue (7) et G est donnée par (30)

7) Finalement, la représentation temporelle du filtre \mathcal{H}_{∞} d'ordre plein (5) est déterminée. En effet après le calcul des matrices A_{22} et B_{22} à partir de (25), (26), J peut être calculée (24) et par conséquent L_1 qui intervient dans la synthèse temporelle est calculée en utilisant (13).

IV. SYNTHÈSE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

Dans cette partie, nous proposons une technique simple à mettre en oeuvre pour la synthèse des observateurs dans le domaine fréquentiel en appliquant l'approche factorisation de [9].

A. Notations et préliminaires

La représentation d'état d'une matrice de transfert $H(s)$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (58)$$

est donnée par

$$\begin{bmatrix} A & B & C & D \end{bmatrix} \quad (59)$$

Une double factorisation copremière de $H(s)$ ou sa MFD, s'écrit de la façon suivante

$$H(s) = N(s)M^{-1}(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s) \quad (60)$$

où $N(s), M(s)$ sont premiers à droite et $\hat{M}(s), \hat{N}(s)$ sont premiers à gauche.

Selon [9], toutes les matrices intervenant dans les factorisations (60) sont données par :

$$M(s) = \begin{bmatrix} A_k & B & K_1 & I \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} A_k & B & C + DK_1 & D \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\hat{M}(s) = \begin{bmatrix} A_l & -L & C & I \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\hat{N}(s) = \begin{bmatrix} A_l & B - LD & C & D \end{bmatrix} \quad (64)$$

où K_1 et L sont choisies respectivement telles que $A_k = A + BK_1$ et $A_l = A - LC$ sont stables. Notons que pour une unique matrice de transfert, il existe une infinité de MFDs stables, et ceci selon le choix des deux matrices K_1 et L .

B. Synthèse fréquentiel

Le théorème suivant donne la solution du problème de synthèse de filtre \mathcal{H}_∞ d'ordre plein (5) dans le domaine fréquentiel pour le système (1).

Théorème 2 : Considérons les descriptions matricielles fractionnaires premières à gauche suivantes (MFD) obtenues à partir de la représentation temporelle du filtre \mathcal{H}_∞ d'ordre n (5)

i)

$$(sI - N)^{-1}G = \hat{M}_1^{-1}(s)\hat{N}_1(s) \quad (65)$$

ii)

$$(sI - N)^{-1}L_1 + (b_0 + Kd_0) = \hat{M}_2^{-1}(s)\hat{N}_2(s) \quad (66)$$

Une description fréquentielle des états à estimer $x(t)$ est alors donnée par,

$$\hat{x}(s) = \hat{M}_1^{-1}(s) \times [\hat{N}_2(s)y(s) + \hat{N}_1(s) \times u(s)] \quad (67)$$

Preuve 2 : En appliquant la transformée de Laplace à (5a), nous avons

$$\varphi(s) = (sI - N)^{-1}L_1y(s) + (sI - N)^{-1}Gu(s) \quad (68)$$

Remplaçons alors (68) dans la transformée de Laplace de (5b) nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{x}(s) &= [(sI - N)^{-1}L_1 + (b_0 + Kd_0)] y(s) \\ &+ (sI - N)^{-1}G u(s) \end{aligned} \quad (69)$$

Posons alors les factorisations suivantes :

a)

$$(sI - N)^{-1}G = \hat{M}_1^{-1}(s)\hat{N}_1(s) \quad (70)$$

avec

$$\hat{M}_1(s) = \begin{bmatrix} N_l & -L & I & I \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\hat{N}_1(s) = \begin{bmatrix} N_l & G_l & I & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$N_l = N - L$ et $G_l = G$, L est choisie telle que N_l est stable.

b)

$$(sI - N)^{-1}L_1 + (b_0 + Kd_0) = \hat{M}_2^{-1}(s)\hat{N}_2(s) \quad (73)$$

avec

$$\hat{M}_2(s) = \begin{bmatrix} N_l & -L & I & I \end{bmatrix} = \hat{M}_1(s) \quad (74)$$

$$\hat{N}_2(s) = \begin{bmatrix} N_l & H_l & I & b_0 + Kd_0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

où $H_l = L_1 - L(b_0 + Kd_0)$.

Il suffit maintenant de remplacer les équations (70), (73) dans (69), en tenant compte de (74) pour que le théorème soit démontré. ■

V. EXEMPLE NUMÉRIQUE

Soit le système singulier (1), avec :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.59 \\ 0 & -1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0.09 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1 - Synthèse dans le domaine temporel

Notons que $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ est de rang plein colonnes et en appliquant l'algorithme proposé dans la section III, nous obtenons :

$$a_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$c_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, d_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

et par suite

$$N = \begin{bmatrix} -3.0907 & 8.5030 & -6.1584 & 1.9923 \\ -6.4362 & -0.5543 & -2.0438 & -0.0971 \\ 12.3010 & 2.6952 & 2.2864 & 2.8438 \\ -2.9510 & 0.4782 & -1.4661 & -0.6407 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 25.6105 & 45.5703 & 22.8362 \\ -4.5506 & -4.2095 & -4.8835 \\ 12.6537 & 23.7190 & 21.5077 \\ 2.0121 & 1.4333 & -1.9229 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -2.1113 \\ -2.6054 \\ 4.4491 \\ -0.7465 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -0.6766 & -0.7322 \\ 0.6170 & -2.1857 \\ 0.2028 & 2.4273 \\ -0.3329 & -0.7061 \end{bmatrix}$$

La représentation temporelle (5) du filtre \mathcal{H}_∞ d'ordre plein est ainsi déterminée. Il est à noter que la LMI (52) est résolue pour $\gamma = 11$.

2 - Synthèse dans le domaine fréquentiel

En choisissant L égale à la matrice identité, la description fréquentielle (67) est alors obtenue après le calcul des matrices $\hat{M}_1(s)$, $\hat{N}_1(s)$ et $\hat{N}_2(s)$ selon (71), (72) et (75).

L'erreur d'estimation fréquentielle, qui sera notée $e(s)$, est alors donnée par

$$e(s) = x(s) - \hat{x}(s) = Q_1(s) w(s) \quad (76)$$

avec

$$Q_1(s) = \frac{1}{s^4 + 1.9993s^3 + 140.33s^2 + 115.19s + 40.721} \times$$

$$\begin{bmatrix} -0.2937s^4 - 26.59s^3 + 90.315s^2 + 181.47s + 9.7337 \\ -1.4678s^4 - 2.4593s^3 - 5.6544s^2 - 284.68s - 20.027 \\ 1.1887s^4 - 13.457s^3 - 217.34s^2 - 517.52 - 28.689 \\ -3.6685s^4 - 6.5313s^3 - 413.55s^2 - 103.89s + 7.8196 \end{bmatrix}$$

On voit bien que cette erreur est stable; en effet, $e(s)$ possède quatre pôles, qui sont $(-0.5867 + 11.7781i, -0.5867 - 11.7781i, -0.4129 + 0.3497i, -0.4129 - 0.3497i)$.

Finalement, les figures 1, 2 et 3, montrent le comportement du filtre \mathcal{H}_∞ obtenu aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel et donc, l'efficacité de notre approche.

VI. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle méthode temporelle puis fréquentielle de synthèse de filtre \mathcal{H}_∞ d'ordre plein pour les systèmes singuliers. La méthode temporelle est basée sur le non biais du filtre et le lemme bornée réel pour les systèmes singuliers; le gain du filtre est ainsi obtenu par la résolution de LMI. La deuxième est dans le domaine fréquentiel, elle est déduite des résultats obtenus dans le domaine temporel en proposant des descriptions matricielles fractionnaires des matrices du filtre avec des polynômes premiers entre eux et en appliquant l'approche factorisation.

RÉFÉRENCES

- [1] Darouach. M and Boutayeb.M. Design of observers for descriptor systems . 40th IEEE Transaction on Automatic Control, no.7, 1323-1327, 1995.
- [2] Darouach.M, Zasadzinski.M and Souley Ali.H. Robust reduced order unbiased filtering via LMI . Proceedings of the 6th European Control Conference, Porto, Portugal, September 2001.
- [3] Ding.X, Guo.L and Frank.M.P. Parameterization of Linear Observers and Its Application to Observer Design. 39th IEEE Transaction on Automatic Control, 1648-1652, 1994.
- [4] Ding.X, Frank.M.P and Guo.L. Robust Observer Design Via Factorization Approach. 29th Conference on Decision and Control , Honolulu, Hawaii, December 1990.
- [5] Hippe.P . Design of reduced-order optimal estimators directly in the frequency domain. *INT.J.Control*, vol. 50, pp. 2599-2614, 1989.
- [6] Hippe.P. Design of observer based compensators : the polynomial approach. *Kybernetika*, pp. 125-150, 1991.
- [7] Izumi.Masubuchi, Yoshiyuki. Kamitane, Atsumi. Ohara and Nobuhide. Suda. *H_∞ Control for descriptor Systems : A Matrix Inequalities Approach* . *Automatica* , pp 669-673, 1997.
- [8] Boyd.S, El Ghaoui.L, Feron.E, and Balakrishnan.V. *Linear Matrix Inequality in systems and control theory*. *SIAM* , Philadelphia, USA, 1994.
- [9] Vidyasagar.M. *Control Systems Synthesis : A Factorization Approach*. M.I.T,Press, Cambridge, MA,1985.
- [10] Francis.B.A. *A Course in H_∞ Control Theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York,1987.
- [11] MacFarlane,A.G.J. Return-difference matrix properties for optimal stationary Kalman-Bucy filter. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 118, 373-376, 1971.
- [12] Anderson.B.D.O and Kučera.V. Matrix fraction construction of linear compensators. 30th IEEE Transaction on Automatic Control.Processing, 1112-1114, 1985.
- [13] C. W. Yang and H.L. Tan. Observers design for singular systems with unknown inputs. *INT.J.Control*, vol. 49, pp. 1937- 1946, 1989.
- [14] P.N. Paraskevopoulos, F. N. Koumboulis, K.G. Tzierakis, and G. E. Panagiotakis . *Observers design for generalized state space systems with unknown inputs*, vol. 18, pp. 309-321, 1992.
- [15] M. Hou and P. C. Muller. Observer for linear descriptor systems with unknown inputs. (in German) *Automatisierungstechnik*, vol. 40, pp. 220- 227, 1992.
- [16] Marquez. H. J. *A frequency domain approach to state estimation*, 340, pp. 147-157 , 2003.
- [17] Hippe.P and Deutscher.J . *Design of observer-based compensators : From the time to the frequency domain*. Springer-Verlag, London, 2009.
- [18] M.Hou and P.C.Muller. Observer design for descriptor systems. 44th IEEE Transaction on Automatic Control, no.1, pp. 164-168, 1994.

- [19] P.N.Paraskevopoulos and F.N.Koumboulis. Observers for Singular Systems. 37th IEEE Transaction on Automatic Control, Vol 37, no.8, pp.1211-1215,1992.
- [20] Russell.W.D and Bullock.E.T. A Frequency Domain Approach to Minimal-Order Observer Design for Several Linear Functions of the State. IEEE Transaction on Automatic Control, 22, pp. 600-603, 1977.

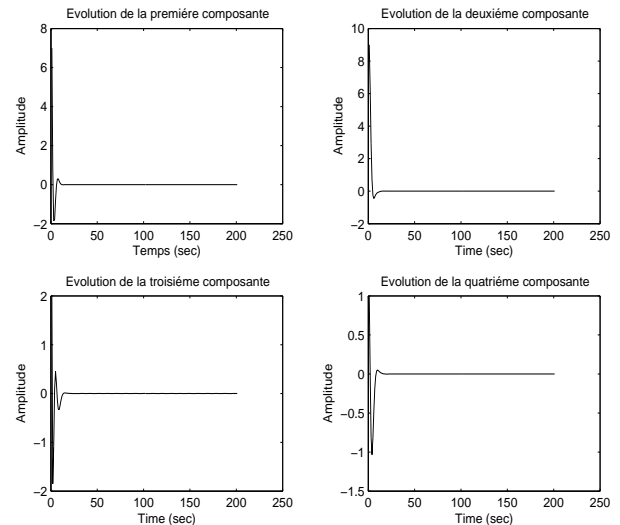


Fig. 1. Les quatre composantes de l'erreur d'estimation $e(t)$

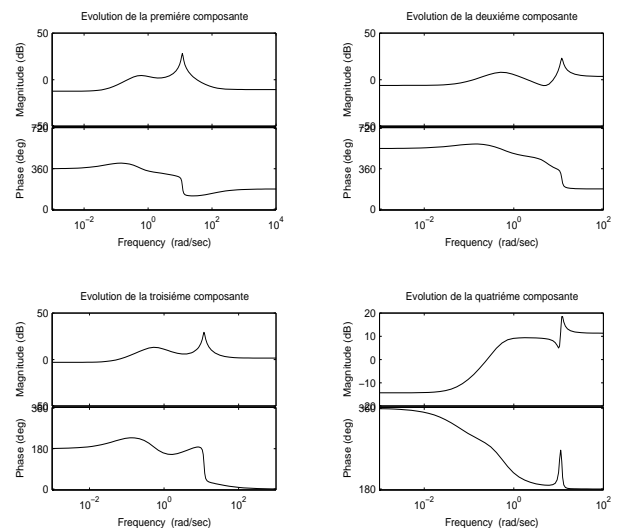


Fig. 2. Diagramme de Bode des quatre composantes de la matrice de transfert de $w(s)$ à $e(s)$

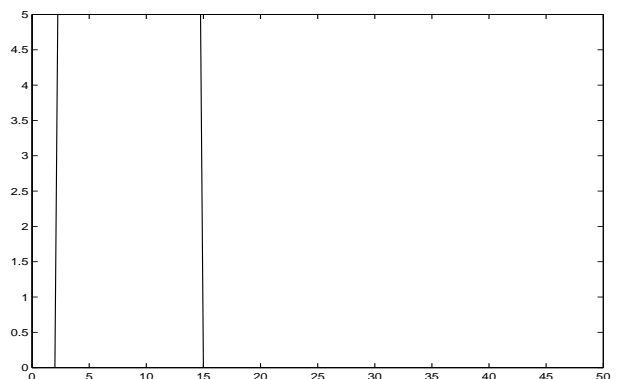


Fig. 3. Le comportement de bruit utilisé