

# Analyse fréquentielle en dynamique non linéaire du véhicule par la méthode d'équilibrage harmonique

Boualem BADJI<sup>1,2</sup>, Eric FENAUX<sup>1</sup>, Mohammed EL BAGDOURI<sup>2</sup>, Abdellatif MIRAOU<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Service de la synthèse dynamique route, PSA Peugeot Citroën automobiles  
Centre technique de Belchamp, 25420, Voujeaucourt, France.  
[boualem.badji1@ext.mpsa.com](mailto:boualem.badji1@ext.mpsa.com), [eric.fenaux@mpsa.com](mailto:eric.fenaux@mpsa.com)

<sup>2</sup>Laboratoire de systèmes et transports SET, <sup>3</sup>Laboratoire de piles à combustible FC Lab  
Université de technologie de Belfort Montbéliard UTBM  
2 rue Thierry Mieg, 90010 Belfort, France.  
[mohammed.el-bagdouri@utbm.fr](mailto:mohammed.el-bagdouri@utbm.fr), [abdellatif.miraoui@utbm.fr](mailto:abdellatif.miraoui@utbm.fr)

**Résumé**— La méthode d'équilibrage harmonique a été utilisée pour étudier analytiquement un modèle non linéaire de la dynamique de véhicule dans le but de mettre un lien entre les grandeurs physiques du véhicule et les caractéristiques dynamiques de ces réponses. Le modèle utilisé de dynamique de véhicule a été obtenu en considérant une formulation polynomiale de l'expression des efforts des pneumatiques en fonction des dérivées aux roues. Ce modèle permet de représenter deux grandeurs d'attitude qui sont : la dérive au centre de gravité et la vitesse de lacet. L'originalité de l'étude réside dans le domaine d'application et a permis l'extraction des expressions des fonctions réponses fréquentielles du premier ordre et de quantifier analytiquement l'impact des non linéarités du modèle sur les distorsions harmoniques et les paramètres modaux de la réponse du véhicule.

**Mots-clés**— Modèle bicyclette non linéaire, équilibrage harmonique, FRF non linéaire, distorsion harmonique, fonction descriptive.

## I. INTRODUCTION

Concevoir des systèmes d'aide à la conduite et de sécurité active requière une bonne connaissance du comportement du véhicule. La plupart de ces systèmes sont basés sur des acquis d'expertise et/ou de la théorie de la dynamique de véhicule. L'acquis théorique peut être fait par une modélisation rigoureuse des différents organes afin de constituer un modèle dont la représentativité soit la plus proche possible du véhicule réel. A ce jour, il existe une multitude de modèles analytiques généralement issus d'une linéarisation individuelle du comportement de chaque composante du véhicule (spécialement par rapport au comportement du pneumatique) autour d'une gamme d'excitation définie. On peut citer le modèle bicyclette linéaire ou le modèle linéaire 4 roues. La maniabilité et la simplicité des méthodes d'analyses linéaires font que ces modèles soient largement utilisés dans l'industrie automobile. Cependant, ces modèles linéarisés sont très limités en termes de domaine de validité et ne représente pas fidèlement le comportement du véhicule à de fortes accélérations transversales (supérieurs à  $4ms^{-2}$ ).

Pour surmonter ce problème, l'approche principale est de considérer la totalité du modèle de pneumatique dans le modèle du véhicule à savoir la formule de Pacejka. De cette procédure résulte un modèle non linéaire complexe dont la

résolution analytique pour extraire les caractéristiques des réponses est quasi-impossible. Une deuxième approche est basée sur l'utilisation d'une approximation polynomiale de la formule de Pacejka d'où nous pouvons extraire les équations du modèle bicyclette non linéaire [5]. Ce modèle est également appelé modèle lacet-dérive non linéaire et permet de représenter les deux grandeurs d'attitude du véhicule, à savoir : la dérive au centre de gravité  $\beta$  et la vitesse de lacet  $\psi$ . Nous pouvons également représenter les dérivées aux pneus avant et arrière avec des changements de variables simples.

L'idée principale du présent travail est l'utilisation de méthodes non linéaires dédiées à l'analyse des caractéristiques statiques et dynamiques des réponses du véhicule.

Il est clair que les informations statiques et dynamiques d'un système donné sont codées dans les fonctions réponses fréquentielles (FRF). Le présent travail est focalisé sur l'étude analytique de l'impact des non linéarités causées par de forts glissements latéraux des pneumatiques sur les fonctions réponses fréquentielles. Afin d'obtenir et d'étudier les expressions analytiques des FRF nous avons utilisé la méthode d'équilibrage harmonique [6]. Avant d'aborder la méthode d'équilibrage harmonique, il faut au préalable présenter les équations du modèle de dynamique latérale du véhicule. L'expression de l'effort du pneumatique sera basée sur l'approximation polynomiale de la formule de Pacejka.

## II. EQUATIONS DU MODELE BICYCLETTE NON LINEAIRE

Dans la littérature [19, 21], il existe un grand nombre de modèles mathématiques permettant de décrire le comportement général du véhicule. Le plus utilisé parmi ces modèles est le modèle bicyclette qui décrit uniquement la dynamique transversale comme présenté dans [3], [23]. Sur la figure 1, nous montrons un schéma simplifié du véhicule avec les variables d'attitude et les paramètres dimensionnels.

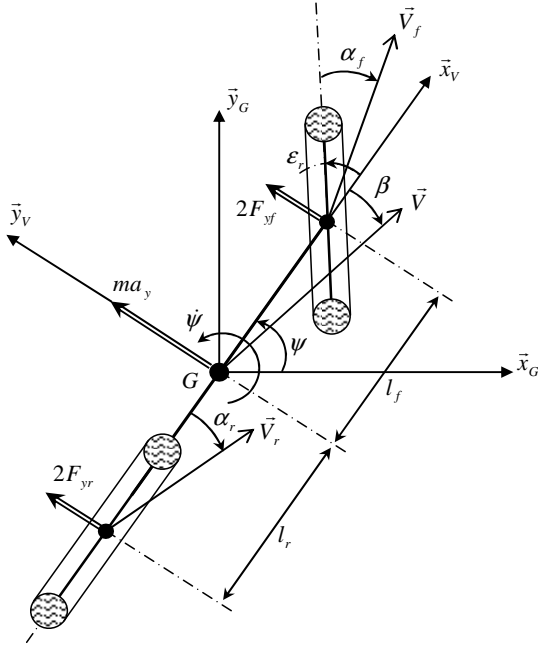


Fig. 1. Schéma simplifié du comportement du véhicule en dynamique transversale

Cette représentation simplifiée de la dynamique transversale du véhicule est issue de l'hypothèse que les roues d'un même essieu sont soumises à la même charge verticale et présentent les mêmes angles de dérives. Par conséquent, aucune différence n'est faite entre les roues gauches et droites. Lors des dynamiques transversales pures, la répartition de charges entre l'axe avant et arrière reste inchangée. Cependant, un transfert de charges apparaît entre les roues d'un même essieu lorsque le véhicule est soumis à une accélération latérale. Le modèle bicyclette non linéaire considéré est basé sur les mêmes suppositions décrites dans [1] et [2] où le transfert de charges est simplement ignoré. Bien sûr ce modèle ne représentera pas exactement le comportement réel de la voiture en courbe. Ici, l'objectif principal est d'extraire une réponse analytique avec une approximation polynomiale de l'expression d'effort latérale du pneumatique lorsqu'il est soumis à de fortes dérives.

Les équations du modèle bicyclette non linéaire peuvent être obtenues à travers les lois fondamentales de la dynamique comme suit :

$$m a_y = 2 F_{yf}(\alpha_f) + 2 F_{yr}(\alpha_r) \quad (1)$$

$$I_z \ddot{\psi} = 2 l_f F_{yf}(\alpha_f) - 2 l_r F_{yr}(\alpha_r) \quad (2)$$

Avec,

$$a_y = v(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \quad (3)$$

$$\alpha_f = \beta + \frac{l_f}{v} \dot{\psi} - \delta_f \quad (4)$$

$$\alpha_r = \beta - \frac{l_r}{v} \dot{\psi} \quad (5)$$

Les efforts latéraux sont générés par les déformations des pneumatiques exprimées généralement à travers les dérives

$\alpha_f$  et  $\alpha_r$ . A partir de la formule de Pacejka [1] nous pouvons écrire :

$$F_{yi}(\alpha_i) = -D_i \sin[C_i \arctan(B_i \cdot \varphi_i(\alpha_i))] \quad (6)$$

Avec,

$$\varphi(\alpha_i) = (1 - E_i)\alpha_i - \frac{E_i}{B_i} \arctan(B_i \alpha_i) \quad (7)$$

Les coefficients  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  sont appelés les macro-coefficients, qui peuvent être liés à une multitude de paramètres physiques spécifiques au pneu ou à son environnement tel que la charge verticale  $F_{zi}$ , l'adhérence, la température, ... etc. L'ensemble des équations et des détails concernant les macro-coefficients peuvent être consultés dans [1] [2]. Il est clair que cette expression d'effort latéral est une fonction non linéaire de la dérive. L'utilisation d'une telle représentation dans les équations de mouvement 12 to 16 entraîne une grande complexité lors de la recherche d'une formulation analytique de la réponse du véhicule et il est quasiment impossible de s'assurer de l'existence d'une telle solution. Afin de surmonter ce problème tout en restant représentatif du comportement non linéaire, nous proposons d'utiliser une approximation polynomiale de la formule de Pacejka à travers un développement en série de Taylor à l'ordre 3. Nous pouvons donc écrire :

$$F_{yi}(\alpha_i) \approx -K_i \alpha_i - Q_i \alpha_i^3 \quad (8)$$

Avec,

$$\begin{cases} K_i = -B_i C_i D_i \\ Q_i = \frac{1}{6} \tau_i (B_i^3 C_i D_i (2E_i + 2 + C_i^2)) \end{cases} \quad (9)$$

Le paramètre  $\tau_i$  est introduit et optimisé pour obtenir une erreur quadratique minimale lorsqu'on compare l'expression d'effort polynomiale à la formule complète de Pacejka pour une gamme d'angles de dérive donnée. Cette méthode permet d'avoir bonne approximation jusqu'à  $\sim 5^\circ$  d'angle de dérive.

En écrivant  $k_i = 2K_i$  et  $q_i = 2Q_i$  et en substituant dans les équations 1 et 2, nous pouvons finalement obtenir les équations du modèle bicyclette non linéaire comme suit :

$$\begin{cases} m v (\dot{\beta} + \dot{\psi}) = -k_f \alpha_f - q_f \alpha_f^3 - k_r \alpha_r - q_r \alpha_r^3 \\ I_z \ddot{\psi} = -l_f k_f \alpha_f - l_f q_f \alpha_f^3 + l_r k_r \alpha_r + l_r q_r \alpha_r^3 \end{cases} \quad (10)$$

Avec,

$$\begin{cases} \alpha_f = \beta + \frac{l_f}{v} \dot{\psi} - \delta_f \\ \alpha_r = \beta - \frac{l_r}{v} \dot{\psi} \end{cases} \quad (11)$$

Les réponses du système peuvent être la vitesse de lacet et l'angle de dérive au centre de gravité ( $\dot{\psi}$ ,  $\beta$ ), ou les dérives

aux pneumatiques avant et arrière  $(\alpha_f, \alpha_r)$ . L'entrée du système est l'angle de braquage au volant  $\delta_h$  qui est lié à l'angle de braquage des roues par  $\delta_h = \delta_f \cdot d_r$ , où  $d_r$  représente la démultiplication du système de direction (dans la suite  $d_r = 17$ ).

Ce type de modèle bicyclette non linéaire a déjà été utilisé dans la simulation en dynamique de véhicule. Cependant il n'a jamais été étudié analytiquement. Généralement, lorsque nous sommes confrontés à des équations non linéaires, le système ne peut être décrit par de simples fonctions de transfert et il est souvent préférable d'utiliser des méthodes de résolution numérique [19, 20].

### III. METHODE D'EQUILIBRAGE HARMONIQUE

#### A. Théorie de la méthode d'équilibrage harmonique

La méthode d'équilibrage harmonique est une technique qui permet d'investiguer en régime permanent les réponses d'un système non linéaire lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale. Cette méthode trouve ses bases théoriques dans la méthode de Van der Pol [9] et celle de Krylov-Bogoliubov [10] qui sont utilisées pour résoudre certains problèmes de mécanismes non linéaires.

L'équilibrage harmonique est une linéarisation harmonique de la fonction non linéaire présente dans les équations du modèle [16]. La théorie complète de la méthode peut être consultée dans [7] [8]. Dans [13], une généralisation de cette méthode est présentée pour l'analyse des FRF des harmoniques d'ordre  $n$  ( $n \geq 2$ ) appelée méthode d'équilibrage multi-harmoniques. Il existe également des applications industrielles intéressantes qui peuvent être consultées dans [12] [15] [14]. Dans ce papier nous nous contentons d'introduire le principe général de la méthode.

Considérant maintenant la fonction non linéaire  $\tilde{F}(\dot{y}, y)$  présente dans un système non linéaire donné ( $y$  est la réponse du système). Soit l'excitation sinusoïdale  $x(t)$  donnée par :

$$x(t) = X \sin(\omega t) \quad (12)$$

$X$  et  $\omega$  sont respectivement l'amplitude d'excitation et la pulsation ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  est la fréquence d'excitation). La méthode d'équilibrage harmonique est basée sur l'hypothèse que la réponse  $y(t)$  pour une telle excitation est très proche d'une sinusoïde déphasée à la même fréquence  $\omega$ . Ceci nous permet d'écrire :

$$y(t) \approx Y \sin(\omega t + \phi) \quad (13)$$

$Y$  et  $\phi$  sont respectivement l'amplitude et la phase de la réponse. L'objectif de la méthode est de réaliser une linéarisation harmonique de la fonction non linéaire  $\tilde{F}(\dot{y}, y)$  pour obtenir la forme équivalente suivante :

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = F_0 + k_{eq} y + c_{eq} \dot{y} \quad (14)$$

Cette dernière fonction est appelée la fonction descriptive de la fonction non linéaire.  $k_{eq}$  et  $c_{eq}$  sont appelés coefficients de rigidité et d'amortissement équivalents. En substituant  $y(t)$  dans l'équation 14 nous obtenons :

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = F_0 + k_{eq} Y \sin(\beta) + c_{eq} \omega Y \cos(\beta) \quad (15)$$

En utilisant une décomposition en série de Fourier et en considérant uniquement la partie fondamentale, les coefficients équivalents s'obtiennent comme suit [11] :

$$F_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) d\beta \quad (16)$$

$$k_{eq} = \frac{b_1}{Y} = \frac{1}{\pi Y} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \sin(\beta) d\beta \quad (17)$$

$$c_{eq} = \frac{a_1}{\omega Y} = \frac{1}{\omega Y \pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \cos(\beta) d\beta \quad (18)$$

Avec cette dernière approximation, les harmoniques d'ordres supérieurs sont simplement négligées mais la réponse du système reste relativement représentative. A ce stade il est important d'observer la dépendance explicite des coefficients équivalents à l'amplitude de la réponse  $Y$ . Une fois la linéarisation équivalente effectuée et substituée dans les équations du modèle, nous pouvons facilement extraire les fonctions réponses fréquentielles en utilisant une entrée harmonique analytique [8] :

$$x = X e^{i\omega t} \quad (19)$$

Dans ce cas la réponse du système s'écrit :

$$y = \tilde{Y} e^{i\omega t} \quad \text{avec, } \tilde{Y} = Y e^{i\phi} \quad (20)$$

$Y = |\tilde{Y}|$  et  $\phi$  sont respectivement l'amplitude et la phase ( $\tilde{Y}$  est appelé module complexe). Dans ce cas, la fonction réponse fréquentielle est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{\tilde{Y}}{X} \quad (21)$$

#### B. Calcul de la FRF d'ordre 1

Dans le but d'appliquer la méthode d'équilibrage harmonique au modèle bicyclette non linéaire et pour des commodités de calcul, il est préférable d'exprimer les équations du modèle en utilisant les angles de dérives des pneumatiques comme réponses du système. Ceci donne :

$$A \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_f \\ \dot{\alpha}_r \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_r \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \alpha_f^3 \\ \alpha_r^3 \end{bmatrix} = D \dot{\delta}_f + E \delta_f \quad (22)$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices qui dépendent des paramètres physiques présents dans les équations 10 et 11. La fonction non linéaire est facilement identifiée :

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = y^3 = \begin{bmatrix} \alpha_f^3 \\ \alpha_r^3 \end{bmatrix} = \tilde{F}(\dot{\alpha}_f, \dot{\alpha}_r, \alpha_f, \alpha_r) \quad (23)$$

Lorsque l'angle volant est une entrée sinusoïdale :

$$\delta_f = \xi \sin(\omega t) \quad (24)$$

Les réponses du système sont proches de sinusoïdes déphasées et s'écrivent :

$$\alpha_f(t) = \Delta_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \Delta_1 \sin(\beta_1) \quad (25)$$

$$\alpha_r(t) = \Delta_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \Delta_2 \sin(\beta_2) \quad (26)$$

Après évaluation des intégrales 16 et 18, la linéarisation harmonique de la fonction non linéaire s'obtient comme suit :

$$\tilde{F}(\dot{\alpha}_f, \dot{\alpha}_r, \alpha_f, \alpha_r) \approx \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \Delta_1^2 \alpha_f \\ \Delta_2^2 \alpha_r \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \Delta_1^2 & 0 \\ 0 & \Delta_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_r \end{bmatrix} \quad (27)$$

La substitution de ce dernier résultat dans l'équation 22 donne la linéarisation équivalente du système :

$$A \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_f \\ \dot{\alpha}_r \end{bmatrix} + B' \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_r \end{bmatrix} = D \dot{\delta}_f + E \delta_f \quad (28)$$

Avec,

$$B' = B + \frac{3}{4} C \times \begin{bmatrix} \Delta_1^2 & 0 \\ 0 & \Delta_2^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

La forme des équations est similaire à celle du modèle bicyclette linéaire [23]. En considérant  $B'$  comme matrice constante nous pouvons extraire les paramètres modaux (coefficient d'amortissement et pulsation naturelle) :

$$\eta(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{m(k'_f l_f^2 + k'_r l_r^2) + I_z(k'_f + k'_r)}{2I_z m v \omega_n} \quad (30)$$

$$\omega_n^2(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{m v^2(k'_r l_r - k'_f l_f) + k'_r k'_f l^2}{I_z m v^2} \quad (31)$$

$$\text{Avec } k'_{\alpha i} = k_{\alpha i} + \frac{3}{4} \Delta_i^2 q_{\alpha i}$$

La FRF du système équivalent peut être calculée en considérant une entrée harmonique comme exprimé par l'équation 19. Alors :

$$\delta_f = \xi e^{i\omega t} \quad (32)$$

Les sorties du système sont données comme suit :

$$\alpha_f(t) = \tilde{\Delta}_1 e^{i\omega t} \quad \text{avec, } \tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 e^{i\phi_1} \quad (33)$$

$$\alpha_r(t) = \tilde{\Delta}_2 e^{i\omega t} \quad \text{avec, } \tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 e^{i\phi_2} \quad (34)$$

La FRF est donnée sous la forme :

$$H_{\alpha i}(\omega) = \frac{\tilde{\Delta}_i}{\xi} \quad (35)$$

La substitution des équations 32 à 34 dans 28 engendre un système d'équations dans le domaine complexe:

$$[i\omega A + B'] \begin{bmatrix} H_{\alpha f} \\ H_{\alpha r} \end{bmatrix} = i\omega D + E \quad (36)$$

L'obtention des FRF requière la résolution du système d'équation 36 pour chaque pair  $(\xi, \omega)$ . Cependant, il n'existe pas des méthodes de résolution capable de trouver des solutions complexes  $\tilde{\Delta}_i$  (cf. équation. 35). Dans [13], une procédure consiste à séparer  $\tilde{\Delta}_i$  en deux parties (réelle et imaginaire) pour aboutir à  $2n$  équations à résoudre (cf. équation 37).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{mv^2}{l} + k_f + \frac{3}{4} \Delta_1^2 q_f & -\frac{mv^2}{L} + k_r + \frac{3}{4} \Delta_2^2 q_r \\ l_f k_f + \frac{3}{4} \Delta_1^2 l_f q_f & -l_r k_r - \frac{3}{4} \Delta_2^2 l_r q_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Re}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} - \\ \omega \begin{bmatrix} \frac{mvl_f}{l} & \frac{mvl_f}{l} \\ \frac{I_z v}{l} & -\frac{I_z v}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Im}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Im}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{mv^2}{l} \xi \\ 0 \end{bmatrix} \\ \omega \begin{bmatrix} \frac{mvl_f}{l} & \frac{mvl_f}{l} \\ \frac{I_z v}{l} & -\frac{I_z v}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Re}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \frac{mv^2}{l} + k_f + \frac{3}{4} \Delta_1^2 q_f & -\frac{mv^2}{l} + k_r + \frac{3}{4} \Delta_2^2 q_r \\ l_f k_f + \frac{3}{4} \Delta_1^2 l_f q_f & -l_r k_r - \frac{3}{4} \Delta_2^2 l_r q_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Im}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Im}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \frac{mvl_f}{l} \xi \\ -\omega \frac{I_z v}{l} \xi \end{bmatrix} \end{cases} \quad (37)$$

$$\text{Où, } \Delta_i^2 = \text{Re}(\Delta_i)^2 + \text{Im}(\Delta_i)^2$$

Pour résoudre l'équation 37 nous avons opté pour l'utilisation de la méthode itérative de quasi-Newton sécante qui permet d'obtenir des solutions sous la forme :

$$x = \{\text{Re}(\tilde{\Delta}_1), \text{Re}(\tilde{\Delta}_2), \text{Im}(\tilde{\Delta}_1), \text{Im}(\tilde{\Delta}_2)\}^T \quad (38)$$

Sur les figures 2 à 4, une comparaison des résultats d'estimation des FRF est réalisée entre celles obtenues par la méthode d'équilibrage harmonique et celles obtenues par une résolution numérique du modèle non linéaire pour une fréquence située dans un intervalle  $[0.1Hz, 4Hz]$  et pour trois amplitudes d'entrée  $10^\circ, 50^\circ$  et  $70^\circ$ . La vitesse du véhicule est  $v = 110 \text{ km/h}$ . Les simulations ont été réalisées en utilisant Matlab. Les paramètres de simulation sont donnés dans le tableau 1.

TABLE I  
VALEURS DES PARAMETRES UTILISES POUR LA SIMULATION

Parameter	Value
$m$	2122.8 kg
$I_z$	3721.3 kg m <sup>2</sup>
$l_f$	1.1 m
$l_r$	1.7958 m
$\tau_f$	0.6934
$k_f$	2285.24 × 10 <sup>2</sup> N rad <sup>-1</sup>
$q_f$	-1253.68 × 10 <sup>4</sup> N rad <sup>-3</sup>
$\tau_r$	0.5861
$k_r$	1678.18 × 10 <sup>3</sup> N rad <sup>-1</sup>
$q_r$	-1085.90 × 10 <sup>4</sup> N rad <sup>-3</sup>
$d_r$	17

En plus de l'aptitude de la méthode d'équilibrage harmonique à donner une bonne estimation des fonctions réponses fréquentielles, la méthode permet également de montrer que la présence des paramètres non linéaires  $q_i$  combinée à une forte excitation tend à introduire d'importantes distorsions dans la forme des FRF. Cette distorsion intervient aux basses fréquences aux niveaux des gains statiques. Elle tend également à augmenter la fréquence de résonance.

L'influence des distorsions harmoniques sur les FRF dépend en grande partie de la nature des non linéarités présentes dans le système. Le modèle bicyclette non linéaire contient uniquement des termes cubiques  $q_i$  négatifs. Donc, la distorsion a tendance à augmenter la fréquence de résonance. Si  $q_i$  était positifs, la distorsion aurait tendance à diminuer la fréquence de résonance.

L'effet des non linéarités devient plus important pour les grandes amplitudes d'excitation. Pour les petites amplitudes, la fonction réponse fréquentielle est identique à la FRF de la partie linéaire du système. Il est important de remarquer que lorsque l'amplitude augmente, la méthode d'équilibrage harmonique devient limitée à cause des contributions des harmoniques négligées d'ordres supérieurs. Afin d'améliorer ces résultats il faut utiliser la méthode d'équilibrage multi-harmoniques.

Egalement, les paramètres modaux indiquent une dépendance explicite aux amplitudes des réponses et indirectement à l'amplitude d'excitation d'entrée à travers les FRF  $H_{\alpha f}(\omega)$  et  $H_{\alpha r}(\omega)$ .

Une fois les FRF des dérivées avant et arrière calculées, les FRF de la vitesse de lacet et de la dérive au CdG s'obtiennent en fonction de  $H_{\alpha f}(\omega)$  et  $H_{\alpha r}(\omega)$  comme suit :

$$H_{\psi}(\omega) = \frac{v}{l} (H_{\alpha 1}(\omega) - H_{\alpha 2}(\omega) + 1) \quad (39)$$

$$H_{\beta}(\omega) = \frac{l_f}{l} H_{\alpha 2}(\omega) + \frac{l_r}{l} (H_{\alpha 1}(\omega) + 1) \quad (40)$$

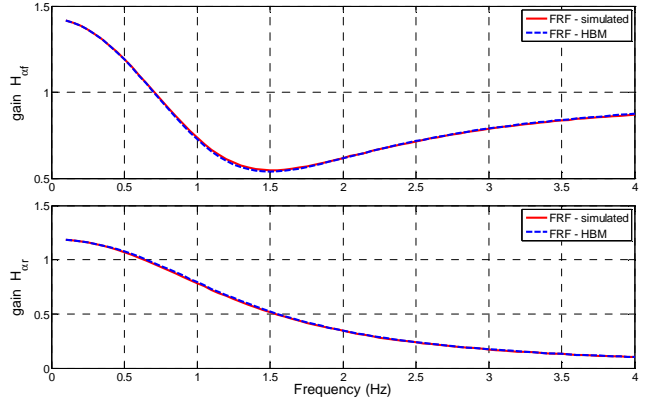


Fig. 2. FRF  $H_{\alpha f}$  et  $H_{\alpha r}$  pour  $\xi = 10^\circ / dr$ .

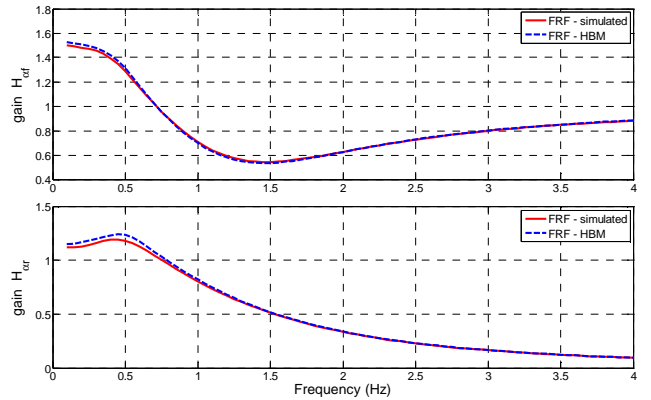


Fig. 3. FRF  $H_{\alpha f}$  et  $H_{\alpha r}$  pour  $\xi = 50^\circ / dr$ .

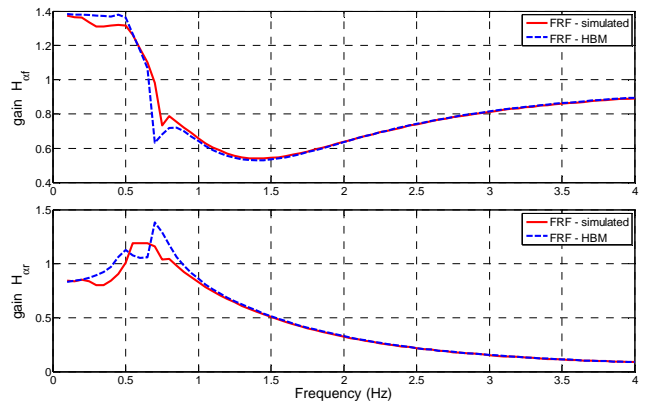


Fig. 4. FRF  $H_{\alpha f}$  et  $H_{\alpha r}$  pour  $\xi = 70^\circ / dr$ .

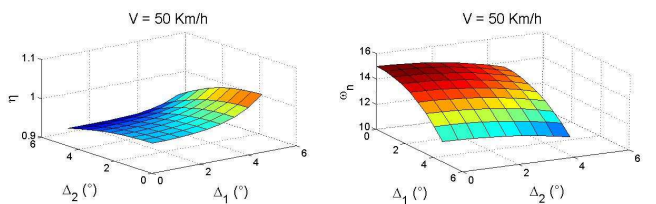


Fig. 5. paramètres modaux pour  $v = 50 \text{ km/h}$ .

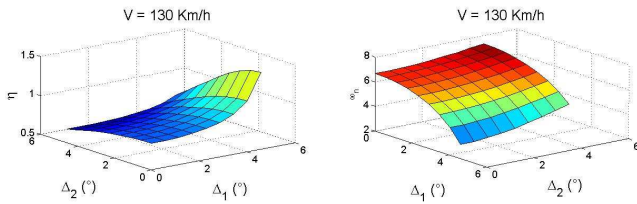


Fig. 6. paramètres modaux pour  $v = 130 \text{ km/h}$ .

#### IV. CONCLUSION

La méthode d'équilibrage harmonique appliquée au modèle bicyclette non linéaire a permis d'extraire analytiquement les fonctions réponses fréquentielles et d'investiguer les distorsions harmoniques en fonction de l'amplitude de l'entrée. Cette méthode nous a également permis d'étudier l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude d'entrée. En dynamique non linéaire de véhicule, les résultats obtenus par l'équilibrage harmonique constituent une innovation majeure et c'est la première application dans ce domaine. Les résultats présentés peuvent être étendus pour analyser les harmoniques d'ordres supérieurs en utilisant la méthode d'équilibrage multi-harmoniques.

#### V. GLOSSAIRE

FRF	: Fonction réponse fréquentielle
$a_y$	: Accélération latérale ( $\text{m s}^{-2}$ )
$F_{yi}$	: Effort latéral sur l'axe $i$ (N)
$m$	: Masse du véhicule (kg)
$I_z$	: Moment d'inertie sur l'axe vertical ( $\text{kg m}^2$ )
$\dot{\psi}$	: Vitesse de lacet ( $\text{rad s}^{-1}$ )
$\alpha_f, \alpha_r$	: Dérives des pneumatiques avant et arrière (rad)
$\beta$	: Dérive au centre de gravité (rad)
$\delta_f, \delta_h$	: Braquage des roues avant et braquage volant (rad)
$l_f, l_r, l$	: Empattement avant, arrière et total (m)
$v, v_{T,ij}$	: Vitesse du véhicule et vitesse du point de contact pneu/sol ( $\text{ms}^{-1}$ )
$H_{\alpha_f}, H_{\alpha_r}$	: FRF des dérives avant et arrière.

#### REFERENCES

- [1] Pacejka, H.B.: "Tyre and vehicle dynamics", Butterworth-Heinemann (2nd edition), 2006.
- [2] Brossard, J.P.: "Dynamique du véhicule: modélisation des systèmes complexes", Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.
- [3] Kiencke, U. and Nielsen, L.: "Automotive control systems: for engine, driveline and vehicle", Springer Verlag, 2000.
- [4] Genta, G.: "Motor vehicle dynamics", World scientific publishing, 1997.
- [5] Badji B., Fenaux F., EL Bagdouri M., Miraoui A., 2009 «Advanced theoretical methods for non linear single track model analysis », Congrès international de la dynamique de véhicule de la SIA, 24-25 Septembre.
- [6] Badji B., Fenaux F., EL Bagdouri M., Miraoui A.: "Nonlinear single track model analysis using Volterra series approach", Vehicle System Dynamics, Vol. 47, No. 1, pp. 81-98, 2009.

- [7] Hiamang S., Mickens R.E.: "Harmonic balance: comparison of equation of motion and energy methods", Journal of sound and vibration, Vol. 164, No. 1, 179-181, 1993.
- [8] Hugo Ramon Elizalde Siller: "Nonlinear modal analysis methods for engineering structures", PHD thesis, Department of mechanical engineering, University of London, 2004.
- [9] Landa P.S.: "Regular and Chaotic Oscillations", Springer, New York, 2000.
- [10] Landau I.D., Bitmead R. R.: "On the method of Krylov and Bogoliubov for the analysis of nonlinear oscillations", Technical report, Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California, San Diego, USA, 2004.
- [11] Maia N., Silva J.: "Theoretical and experimental modal analysis", Research Studies Press LTD, England, 1997.
- [12] Petrov E.P., Ewins D.J.: "Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks", ASME transactions, Vol. 125, pp. 364-371, 2003.
- [13] Ren Y., Beards C.F.: "A new receptance-based perturbative multi-harmonic balance method for the calculation of the steady state response of nonlinear systems", Journal of sound and vibration, Vol. 172, N°5, pp. 593-604, 1994.
- [14] Sanliturk K.Y., Imergun M., Ewins D.J.: "Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers", ASME transaction, Vol. 119, pp. 90-103, 1997.
- [15] Sastry S.: "Nonlinear systems: analysis, stability and control", Springer-Verlag, New York, 1999.
- [16] Setio S., Setio H.D., ezequel L.: "Modal Analysis of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Structure", The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 7, No. 2, pp. 75-93, 1992.