Un critère simple de stabilité polynomiale

Christophe FONTE[1], Cédric DELATTRE[1]

[1]Centre de Recherche en Automatique de Nancy,
UMR 7039 – Nancy-Université, CNRS
2, Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandœuvre, France.
Christophe.Fonte@cran.uhp-nancy.fr, Cedric.Delattre@iut-longwy.uhp-nancy.fr

Résumé— **Dans cet article, nous montrons que l'étude du signe d'un Wronskien polynomial permet de déterminer la stabilité d'un polynôme réel quelconque. La preuve utilise la propriété d'entrelacement des polynômes Hurwitz ainsi que le théorème de Hermite-Biehler. Ce test est appliqué au problème de la stabilité de polynômes incertains.**

Mots-clés—**Polynôme Hurwitz, stabilité, Wronskien, théorème de Hermite-Biehler, polynôme incertain.**

I. INTRODUCTION

Ce papier concerne la stabilité polynomiale telle que définie par Hurwitz. Si nous examinons les nombreux travaux traitant du problème de la stabilité polynomiale, par exemple [8], nous savons que les propositions suivantes sont équivalentes :

- Le polynôme réel $f(s)$, défini par l'expression ci-dessous, est stable (ou Hurwitz).

$$f(s) = \alpha_m\, s^m + \alpha_{m-1}\, s^{m-1} \cdots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (1)$$

  avec $\alpha_m > 0$.
- Toutes les racines de $f(s)$ ont une partie réelle négative.
- Tous les mineurs principaux de la matrice Hurwitz $H(f)$ sont strictement positifs où $H(f)$ est une matrice carrée d'ordre m donnée par l'expression suivante :

$$H(f) = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-5} & \alpha_{m-7} & \cdots \\ \alpha_m & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-6} & \cdots \\ 0 & \alpha_{m-1} & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-5} & \cdots \\ 0 & \alpha_m & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix}$$

La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité polynomiale de $f(s)$ est que tous les déterminants Δ_i soient strictement positifs. Ce critère bien connu de Routh-Hurwitz revient à tester m inégalités satisfaisant $\Delta_i > 0$ où

$$\Delta_1 = \alpha_{m-1}$$

et

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_{m-3} \\ \alpha_m & \alpha_{m-2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-5} \\ \alpha_m & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-4} \\ 0 & \alpha_{m-1} & \alpha_{m-3} \end{vmatrix}$$

et cela jusqu'à Δ_m.

Nous observons que l'utilisation de ce critère algébrique pour un polynôme d'ordre m nécessite de tester la positivité de m polynômes multivariés non-linéaires où m est le degré de $f(s)$. Cette solution n'est donc pas simple à mettre en oeuvre. Par conséquent, dans le cas où quelques coefficients sont inconnus ou contraints, les solutions du système algébrique défini par $H(f)$ ne sont pas facilement calculables.

La méthode discutée dans ce papier pose le problème de la stabilité polynomiale comme un simple test de positivité de seulement un polynôme univarié. Parmi la littérature abondante traitant du problème de stabilité linéaire, nous pouvons mentionner les travaux qui abordent plus particulièrement les liens entre la stabilité définie par Hurwitz et le théorème de Hermite-Biehler : [10], [14], [1], [11], [9].

Routh et Hurwith ont obtenu leur critère en utilisant le théorème de Sturm et l'indice de Cauchy d'une fraction rationnelle régulière de type particulier (voir entre autres [8]). Dans ce papier, nous exposons une nouvelle méthode déduite du critère de stabilité d'Hermite-Biehler. Il n'est pas dans nos objectifs de reformuler le théorème d'Hermite-Biehler, mais d'utiliser le critère d'Hermite pour présenter notre résultat principal qui se réduit à un critère algébrique simple : pour un polynôme d'ordre m nous n'avons qu'à vérifier la positivité d'un seul polynôme.

Ce résultat peut être utilisé pour résoudre d'importants problèmes en automatique notamment pour la commande des systèmes. Une application est présentée dans la seconde partie de ce papier concernant la stabilité des polynômes incertains.

II. UN WRONSKIEN POUR TESTER LA STABILITÉ D'UN POLYNÔME

Dans cette partie, un lien explicite est établi entre la stabilité polynomiale et le signe d'un polynôme obtenu par calcul d'un Wronskien.

A. Entrelacement des racines d'un polynôme et stabilité polynomiale

Définition 1 : [8], Propriété d'entrelacement des zéros.

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes réels de degrés respectifs l et $l-1$ (ou $l+1$). Supposons que les racines de ces polynômes soient définies par les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rrcl} & Rac(P(x)) & = & \{x_1, \ldots, x_l\} \\ & Rac(Q(x)) & = & \{y_1, \cdots, y_{l-1}\} \\ (\text{ou} & Rac(Q(x)) & = & \{y_1, \cdots, y_{l+1}\}) \end{array}$$

Alors $P(x)$ et $Q(x)$ *s'entrelacent* si, et seulement si

- les racines de $P(x)$ et $Q(x)$ sont réelles, simples et distinctes,
- les coefficients de plus haut degré de $P(x)$ et $Q(x)$ sont de même signe,

– les l racines de $P(x)$ alternent avec les $l-1$ (ou $l+1$) racines de $Q(x)$ ainsi :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 \ldots < x_{l-1} < y_{l-1} < x_l$$
$$(ou\, y_1 < x_1 < y_2 \ldots < x_{l-1} < y_l < x_l < y_{l+1})$$

■

Considérons la propriété d'entrelacement des zéros quand $f(s)$ donné par l'équation (1) est écrit comme il suit :

$$f(s) = f^e(s^2) + sf^o(s^2) \tag{2}$$

Dans le cas où $m = 2k$ est pair, f^e et f^o sont alors développés de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} f^e(s^2) & = & \alpha_{2k}\,(s^2)^k + \cdots + \alpha_2\, s^2 + \alpha_0 \\ f^o(s^2) & = & \alpha_{2k-1}\,(s^2)^{k-1} + \cdots + \alpha_3\, s^2 + \alpha_1 \end{array} \tag{3}$$

Dans le cas où $m = 2k+1$ est impair, f^e conserve la même forme que dans le cas où m est pair mais f^o est alors donné par :

$$f^o(u) = \alpha_{2k+1}\,(s^2)^{k+1} + \cdots + \alpha_3\, s^2 + \alpha_1 \tag{4}$$

B. Résultat principal

Le lien entre la propriété d'entrelacement des zéros et la stabilité polynomiale est formalisée par le théorème de Hermite-Biehler que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 1 : (e.g. [11]), Théorème de Hermite-Biehler. *Le polynôme réel $f(s)$ est stable si, et seulement si les polynômes $f^e(-s^2)$ et $f^o(-s^2)$ vérifient la propriété d'entrelacement des zéros.*

Nous utiliserons ce Théorème 1 pour montrer le résultat ci-après.

Théorème 2 : Le polynôme réel $f(s)$ est stable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées.

a) Les racines de $f^e(-s^2)$ sont réelles,

b) $\forall s \in \mathbb{R}$, on a

$$W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) = \begin{vmatrix} f^e(-s^2) & sf^o(-s^2) \\ \dfrac{df^e(-s^2)}{ds} & \dfrac{d\left(sf^o(-s^2)\right)}{ds} \end{vmatrix} > 0 \tag{5}$$

Preuve

Partie : "Condition suffisante" :

D'après le Théorème 1, il suffit de montrer que :

i) $f^e(-s^2)$ et $sf^o(-s^2)$ ont des racines simples et distinctes.

ii) les coefficient de plus haut degré de $f^e(s^2)$ et $sf^o(s^2)$ sont de même signe.

iii) les racines de $sf^o(-s^2)$ sont toutes réelles et s'entrelacent avec celles de $f^e(-s^2)$.

Etudions ces trois conditions.

i) D'abord, on peut observer que si

$$W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) > 0$$

alors les zéros de $f^e(-s^2)$ et $sf^o(-s^2)$ sont simples et distincts. En effet, si s_i est un zéro commun à $f^e(-s^2)$ et à $sf^o(-s^2)$ (ou un zéro commun à $f^e(-s^2)$ et $\frac{df^e(-s^2)}{ds}$, ou un zéro commun à $sf^o(-s^2)$ et à $\frac{dsf^o(-s^2)}{ds}$) alors $W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) = 0$.

ii) Deuxièmement, considérons que f est donné par (1). Alors le coefficient de plus haut degré de $W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2))$ est $\alpha_m\alpha_{m-1}$, où α_m et α_{m-1} sont les coefficients de plus haut degré de f^e et f^o. Supposons que α_m et α_{m-1} ont des signes différents , alors $\alpha_m\alpha_{m-1}$ est négatif, ainsi que $W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2))$ pour s suffisamment grand. Donc les coefficients de plus haut degré de f^e et f^o sont de même signe.

iii) Enfin, montrons que si $W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) > 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, alors les zéros de $f^e(-s^2)$ et $sf^o(-s^2)$ s'entrelacent. Soient s_i et s_{i+1} deux zéros réels consécutifs de $f^e(-s^2)$. Alors on a

$$W(f^e(-s_i^2), s_if^o(-s_i^2)) = -s_if^o(-s_i^2)\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_i}$$
$$W(f^e(-s_{i+1}^2), s_{i+1}f^o(-s_{i+1}^2)) = -s_{i+1}f^o(-s_{i+1})\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_{i+1}}$$

d'où

$$-s_if^o(-s_i^2)\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_i} > 0$$
$$-s_{i+1}f^o(-s_{i+1})\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_{i+1}} > 0$$

De plus $\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_i}$ et $\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_{i+1}}$ n'ont pas le même signe puisque s_i et s_{i+1} sont deux zéros réels consécutifs simples du polynôme $f^e(-s^2)$. En outre, le signe de $W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2))$ est constant pour tout s. Donc les signes de $s_if^o(s_i)$ et $s_{i+1}f^o(s_{i+1})$ sont opposés. Comme la fonction $sf^o(-s^2)$ est continue, alors entre deux zéros réels consécutifs s_i et s_{i+1} de $f^e(-s^2)$, il y a un nombre impair de zéros réels simples de $sf^o(-s^2)$.

A partir de ce fait, nous pouvons considérer deux cas :

Cas 1 : Si m est pair, alors le nombre de racines de $sf^o(-s^2)$ est égal à celui de $f^e(-s^2)$ ôté de un. Dans ce cas les racines de $sf^o(-s^2)$ sont forcément toutes réelles et s'entrelacent avec celles de $f^e(-s^2)$.

Cas 2 : Si m est impair, le nombre des racines de $sf^o(-s^2)$ est égal à celui de $f^e(-s^2)$ ajouté de un. Si on considère que deux racines de $sf^o(-s^2)$ sont complexes conjuguées ou que les racines de $sf^o(-s^2)$ et $f^e(-s^2)$ ne s'entrelacent pas alors la plus grande racine s_k de $f^e(-s^2)$ est plus grande que la plus grande racine de $sf^o(-s^2)$. On a donc :

$$W(f^e(-s_k^2), s_kf^o(-s_k^2)) = -s_kf^o(-s_k^2)\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_k} > 0 \tag{6}$$

Par conséquent $s_kf^o(-s_k^2)$ et $\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_k}$ n'ont pas le même signe.

Considérons le cas où $\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_k} > 0$ (le cas $\frac{df^e(-s^2)}{ds}|_{s=s_k} < 0$ est similaire). Donc $f^e(-s^2)$ est positif pour $s > s_k$. De plus, nous déduisons de (8) que $sf^o(-s^2)$ est négatif pour $s > s_k$. Cela signifie que les coefficients de plus haut degré de $f^e(-s^2)$ et de $f^o(-s^2)$ ont des signes opposés. Cela est en contradiction avec ii) : En effet, ii) montre que les coefficients de plus haut degré de f^e and sf^o sont de même signe, il en est donc de même pour $f^e(-s^2)$ et $f^o(-s^2)$ puique m est impair.

Nous pouvons donc conclure que tous les zéros $sf^o(-s^2)$ sont réels et qu'ils s'entrelacent avec ceux de $f^e(-s^2)$.

Partie "Condition nécessaire"

Supposons f stable, alors nous savons d'après le Théorème 1 que toutes les racines s_i de $f^e(-s^2)$ sont réelles simples, et que $f^e(-s^2)$ et $sf^o(-s^2)$ s'entrelacent. Selon [8], si $m = 2k$, alors nous pouvons écrire

$$\frac{sf^o(-s^2)}{f^e(-s^2)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{s - s_i} \tag{7}$$

où les s_i sont les racines de $f^e(-s^2)$ et :

$$R_i = \frac{s_i f^o(-s_i^2)}{\frac{d(f^e(-s^2))}{ds}|_{s=s_i}} = \frac{f^o(-s_i^2)}{-2\frac{df^e(u)}{du}|_{u=-s_i^2}} < 0, \tag{8}$$

car $\frac{f^o(u)}{\frac{df^e(u)}{du}} > 0$ lorsque $f^e(-s^2)$ et $sf^o(-s^2)$ s'entrelacent, voir [8].

Nous avons alors

$$\frac{f^e(-s^2)\frac{df^o(-s^2)}{ds} - sf^o(-s^2)\frac{df^e(-s^2)}{ds}}{(f^e(-s^2))^2} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{(s - s_i)^2} > 0 \tag{9}$$

Si $m = 2k + 1$, nous avons

$$\frac{sf^o(-s^2)}{f^e(-s^2)} = a_0 s + b_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{s - s_i} \tag{10}$$

et a_0 et b_0 sont des constantes. En outre, d'après le Théorème 1, $sf^o(-s^2)$ et $f^e(-s^2)$ ont leur coefficient de plus haut degré de même signe donc $a_0 > 0$.

Donc nous avons

$$\frac{f^e(-s^2)\frac{df^o(-s^2)}{ds} - sf^o(-s^2)\frac{df^e(-s^2)}{ds}}{(f^e(-s^2))^2} = a_0 - \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{(s - s_i)^2} > 0 \tag{11}$$

En conséquence, si $f^e(-s^2)$ et $sf^o(-s^2)$ s'entrelacent, alors

$$W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) > 0$$

. ∎

Exemple : Soit $f(s) = (s + 1)^4$. En considérant le Théorème 2 précédent, nous avons

$$\begin{cases} f^e(-s^2) = s^4 - 6s^2 + 1, & \frac{df^e(-s^2)}{ds} = 4s^3 - 12s \\ sf^o(-s^2) = -4s^3 + 4s, & \frac{d(sf^o(-s^2))}{ds} = -12s^2 + 4 \end{cases}$$

Quel que soit $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) = 4s^6 + 12s^4 + 12s^2 + 4 > 0$$

C. Lien entre le critère de Hermite et la condition sur le Wronskien du Théorème 2.

Il est connu que pour tester la stabilité polynomiale, il est possible d'utiliser le critère de Hermite, voir e.g. [13]. Dans cette partie, une relation est établie entre le critère de Hermite et la condition du Wronskien positif (5).

Théorème 3 : (Hermite). *Un polynôme réel $f(s)$ de degré m est stable si, et seulement si, la matrice symétrique $B = [b_{ij}]$ de dimension $m \times m$ est définie positive, avec les termes b_{ij} donnés par la relation suivante*

$$\forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij} s_1^{i-1} s_2^{j-1} = \frac{s_1 f^o(-s_1^2) f^e(-s_2^2) - f^e(-s_1^2) s_2 f^o(-s_2^2)}{s_1 - s_2} \tag{12}$$

Réécrivons la relation (12). Nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{s_1 f^o(-s_1^2) f^e(-s_2^2) + s_1 f^o(-s_1^2) f^e(-s_1^2)}{s_1 - s_2} - \\ &\frac{s_1 f^o(-s_1^2) f^e(-s_1^2) + f^e(-s_1^2) s_2 f^o(-s_2^2)}{s_1 - s_2} = \\ &f^e(-s_1^2)\frac{s_1 f^o(-s_1^2) - s_2 f^o(-s_2^2)}{s_1 - s_2} - \\ &s_1 f^o(-s_1^2)\frac{f^e(-s_1^2) - f^e(-s_2^2)}{s_1 - s_2} \end{aligned} \tag{13}$$

Considérons $s_1 = s$ et $s_2 = s + \epsilon$, et calculons la limite de l'expression (13) quand ϵ tend vers 0.

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \to 0} \frac{sf^o(-s^2) f^e(-(s+\epsilon)^2) - f^e(-s^2)(s+\epsilon) f^o(-(s+\epsilon)^2)}{s - (s+\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} f^e(-s^2)\frac{(s+\epsilon) f^o(-(s+\epsilon)^2) - sf^o(-s^2)}{\epsilon} - \\ &\quad \lim_{\epsilon \to 0} sf^o(-s^2)\frac{f^e(-(s+\epsilon)^2) - f^e(-s^2)}{\epsilon} \\ &= W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) \end{aligned} \tag{14}$$

Dans le cas où le polynôme $f(s)$ est stable, la relation (12) est équivalente à une forme positive. Donc, en considérant (14), nous avons

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij} s^{i+j-2} = V^T(s) B V(s) > 0$$

où

$$V^T(s) = [1 \quad s \quad s^2 \ldots s^{m-1}]$$

Ce qui signifie que la condition (5) n'est pas équivalente à la positivité de la matrice B (donnée par l'expression (12)) puisque B est définie positive si, et seulement si, $V^T B V > 0$, $\forall V \in \mathbb{R}^m$ alors que le Wronskien est positif si, et seulement si $V^T B V > 0$ pour tout vecteur de Vandermonde V de $\mathbb{R}^m$. En outre, on peut voir que le Theorème 2 est satisfait si la condition *a)* est vérifiée.

Notre Théorème 2 est donc bien différent et c'est un résultat théorique complémentaire du critère pratique d'Hermite (Théorème 3).

Dans l'exemple ci-après, il est montré que la condition du Wronskien positif n'est pas une condition suffisante pour prouver la stabilité polynomiale.

Exemple : On considère $f(s)$ tel que :

$$f(s) = -s^3 - s^2 + s + 1 \tag{15}$$

Les racines de $f(s)$ sont $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_2' = -1$. Nous avons

$$\begin{aligned} sf^o(-s^2) &= s^3 + s \\ f^e(-s^2) &= s^2 + 1 \end{aligned}$$

Les racines de $sf^o(-s^2)$ et $f^e(-s^2)$ sont imaginaires. On obtient

$$W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) = s^4 + 2s^2 + 1$$

Ou de façon équivalente :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) = (s^2+1)^2 > 0$$

Dans ce cas, la condition *b)* du Théorème 2 est vérifiée mais $f(s)$ n'est pas un polynôme stable.

De plus, nous avons

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de B sont 0 et 2, donc la matrice B n'est pas définie positive bien que le Wronskien soit positif.

III. Application : Stabilité des segments polynomiaux

La stabilité d'une combinaison convexe de polynômes a été considérée par plusieurs auteurs, voir [5] et [3]. Par exemple, nous pouvons citer [2] et [4] qui testent le signe des valeurs propres d'un produit de matrices. Pour résoudre ce problème de stabilité polynomiale, nous proposons une alternative en regard du Théorème 2. Généralement les hypothèses de stabilité des deux extrémités du segment de polynômes sont nécessaires pour établir les résultats donnés dans la littérature [2]. Cette condition n'est pas nécessaire dans notre cas, où l'on déduit que pour vérifier la stabilité d'un segment de polynômes, il est nécessaire et suffisant de tester la positivité d'une seule expresion polynomiale.

Par contre, dans le Corollaire 1, on se ramène à l'hypothèse classique que les deux extrémités sont stables, ce qui nous donne un critère simplifié de stabilité du segment sous la forme de la positivité de deux polynômes.

Enfin une extension de ce Théorème de stabilité pour les segments polynomiaux est donnée dans le contexte de la théorie des polynômes de Kharitonov. Ainsi, il est montré qu'une simple expression polynomiale a besoin d'être testée pour prouver la stabilité des quatre polynômes de Kharitonov considérés.

Théorème 4 : Soit le segment polynomial $f_\alpha(s)$ donné par (16)

$$\forall\, \alpha \in [0,1], \quad f_\alpha(s) = \alpha f_0(s) + (1-\alpha) f_1(s) \tag{16}$$

où $f_0(s)$ et $f_1(s)$ sont deux polynômes réels de même degré. Supposons que les racines de $f_0^e(-s^2)$ et $f_1^e(-s^2)$ soient réelles. Alors le segment polynomial $f_\alpha(s)$ est stable si, et seulement si la relation (17) est vérifiée.

$$\begin{aligned} &\forall s \in \mathbb{R}, \forall\, \alpha \in [0,1], \\ &\quad \alpha^2 W(f_0^e(-s^2), sf_0^o(-s^2)) + \\ &\quad (1-\alpha)\alpha\, W(f_0^e(-s^2), sf_1^o(-s^2)) + \\ &\quad (1-\alpha)\alpha\, W(f_1^e(-s^2), sf_0^o(-s^2)) + \\ &\quad (1-\alpha)^2\, W(f_1^e(-s^2), sf_1^o(-s^2)) \qquad > 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Preuve

Comme précédemment défini pour $f(s)$, nous écrirons ce polynôme en le décomposant sous la forme d'une partie paire et d'une partie impaire respectivement notées $f_\alpha^e(-s^2)$ et $sf_\alpha^o(-s^2)$. Donc nous avons

$$f_\alpha(s) = f_\alpha^e(s^2) + sf_\alpha^o(s^2)$$

Ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} f_\alpha(s) = &[\alpha f_0^e(s^2) + (1-\alpha) f_1^e(s^2)] + \\ &s[\alpha f_0^o(s^2) + (1-\alpha) f_1^o(s^2)] \end{aligned}$$

avec $f_\alpha^e(-s^2)$ et $sf_\alpha^o(-s^2)$ les expressions suivantes

$$\begin{cases} f_\alpha^e(-s^2) = \alpha f_0^e(-s^2) + (1-\alpha) f_1^e(-s^2) \\ sf_\alpha^o(-s^2) = \alpha s f_0^o(-s^2) + (1-\alpha) s f_1^o(-s^2) \end{cases} \tag{18}$$

Selon le Théorème 2, $f_\alpha(s)$ est stable si, et seulement si

1. les racines de $f_\alpha^e(-s^2)$ sont réelles,
2. $\forall s \in \mathbb{R},\ W(f_\alpha^e(-s^2), sf_\alpha^o(-s^2)) > 0$.

Montrons ces deux conditions.

Premièrement, examinons la condition 1.

Supposons qu'il existe $v_\alpha \in \mathbb{C}$, un zéro de $f_\alpha^e(-s^2)$. Nous avons donc

$$\alpha \in]0,1[\qquad \alpha f_0^e(v_\alpha) + (1-\alpha) f_1^e(v_\alpha) = 0.$$

Supposons que v_α ne soit pas un zéro de $f_0^e(-s^2)$. Alors nous avons

$$\alpha \in]0,1[\qquad \frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{f_1^e(v_\alpha)}{f_0^e(v_\alpha)} \tag{19}$$

Rappelons que selon les hypothèses, les racines de $f_0^e(-s^2)$ et $f_1^e(-s^2)$ sont réelles. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{f_1^e(v_\alpha)}{f_0^e(v_\alpha)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{v_\alpha - v_i} \tag{20}$$

avec v_i les racines réelles distinctes de $f_0^e(-s^2)$ et où

$$R_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_1^e(v_i)}{\frac{df_0^e}{dv}(v_i)} < 0 \tag{21}$$

Comme $v_\alpha \in \mathbb{C}$, v_α est de la forme $a_\alpha + jb_\alpha$ où a_α est la partie réelle et b_α est la partie imaginaire de v_α. Si l'équation (20) est vérifiée, alors nous avons

$$\frac{f_1^e(v_\alpha)}{f_0^e(v_\alpha)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{(a_\alpha + jb_\alpha) - v_i} \tag{22}$$

Cette équation conduit à

$$Im\left(\frac{f_1^e(v_\alpha)}{f_0^e(v_\alpha)}\right) = Im\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i}{(a_\alpha + jb_\alpha) - v_i}\right) \qquad (23)$$

Nous obtenons

$$Im\left(\frac{f_1^e(v_\alpha)}{f_0^e(v_\alpha)}\right) = -b_\alpha \sum_{i=1}^{k}\frac{R_i}{(a_\alpha - v_i)^2 + b_\alpha^2}$$

Comme la relation suivante est vérifiée, voir équation (19)

$$Im\left(\frac{f_1^e(v_\alpha)}{f_0^e(v_\alpha)}\right) = 0$$

Alors $b_\alpha = 0$. En conséquence, les racines de $f_\alpha^e(-s^2)$ sont réelles.

Deuxièmement considérons la condition 2.

En réécrivant le Wronskien ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}&W(f_\alpha^e(-s^2), sf_\alpha^o(-s^2))=\\ &f_\alpha^e(-s^2)\frac{d(sf_\alpha^o(-s^2))}{ds} - \frac{df_\alpha^e(-s^2)}{ds}(sf_\alpha^o(-s^2))\end{aligned}$$

Cela conduit à la relation (17). ■

Une forme simplifiée du Théorème 4 est maintenant présentée quand les deux extrémités de $f_\alpha(s)$ sont stables.

Corollaire 1 : Considérons deux polynômes stables de même degré et de même signe $f_0(s)$ et $f_1(s)$. Si les conditions (24) sont vérifiées alors le segment polynomial $f_\alpha(s)$ défini par (16) est stable.

$$\begin{aligned}\forall s \in \mathbb{R}, \quad &W(f_1^e(-s^2), sf_0^o(-s^2)) \geq 0 \quad \text{et}\\ &W(f_0^e(-s^2), sf_1^o(-s^2)) \geq 0\end{aligned} \qquad (24)$$

Preuve

Evidente, voir le Théorème 4. ■

Corollaire 2 : [6], [4]. *Considérons deux polynômes stables $f_0(s)$ et $f_1(s)$ de même degré et de même signe et avec les mêmes parties paires, c'est à dire avec*

$$f_0^e(-s^2) = f_1^e(-s^2) = f^e(-s^2).$$

Alors $\forall\alpha \in [0,1]$, $f_\alpha(s)$ défini par (16) est stable.

Preuve

Calculons $W(f_\alpha^e(-s^2), sf_\alpha^o(-s^2))$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}&W(f_\alpha^e(-s^2), sf_\alpha^o(-s^2)) =\\ &f^e(-s^2)\left(\alpha\frac{sf_0^o(-s^2)}{ds} + (1-\alpha)\frac{sf_1^o(-s^2)}{ds}\right)\\ &-\left(\alpha sf_0^o(-s^2) + (1-\alpha)sf_1^o(-s^2)\right)\frac{f^e(-s^2)}{ds}\end{aligned}$$

Ou de manière équivalente

$$\begin{aligned}&W(f_\alpha^e(-s^2), sf_\alpha^o(-s^2)) =\\ &\alpha W(f^e(-s^2), sf_0^o(-s^2)) + (1-\alpha)W(f^e(-s^2), sf_1^o(-s^2))\end{aligned}$$

Pour conclure cette preuve, comme nous avons $W(f^e(-s^2), sf_0^o(-s^2)) > 0$, $W(f^e(-s^2), sf_1^o(-s^2)) > 0$, alors $\forall\alpha \in [0,1]$, $W(f_\alpha^e(-s^2), sf_\alpha^o(-s^2)) > 0$. ■

Ce résultat est également vérifié si $f_1(s)$ et $f_2(s)$ ont les mêmes parties impaires.

Définition 2 : La propriété d'entrelacement mutuel des zéros.

Considérons les polynômes réels $f^e(-s^2)$, $sf_{min}^o(-s^2)$ et $sf_{max}^o(-s^2)$ définis par leurs racines données ci-dessous

$$\begin{aligned}root(f^e(-s^2)) &= \{u_1, \cdots, u_k\}\\ root(sf_{min}^o(-s^2)) &= \{v_{min_1}, \cdots, v_{min_{k-1}}\}\\ (\text{ou } root(sf_{min}^o(-s^2)) &= \{v_{min_1}, \cdots, v_{min_{k+1}}\})\\ root(sf_{max}^o(-s^2)) &= \{v_{max_1}, \cdots, v_{max_{k-1}}\}\\ (\text{ou } root(sf_{max}^o(-s^2)) &= \{v_{max_1}, \cdots, v_{max_{k+1}}\})\end{aligned}$$

Alors nous diront que $f^e(-s^2)$, $sf_{min}^o(-s^2)$ et $sf_{max}^o(-s^2)$ s'entrelacent mutuellement si, et seulement si

- les racines de $f^e(-s^2)$, $sf_{min}^o(-s^2)$ et $sf_{max}^o(-s^2)$ sont réelles, simples et distinctes,
- les coefficents des polynômes de plus haut degré $f^e(-s^2)$, $sf_{min}^o(-s^2)$ et $sf_{max}^o(-s^2)$ ont les mêmes signes,
- les racines de $f^e(-s^2)$, $sf_{min}^o(-s^2)$ et $sf_{max}^o(-s^2)$ alternent mutuellement comme suit

$$\begin{gathered}u_1 < v_{min_1} \leq v_{max_1} < u_2 < v_{min_2} \leq v_{max_2} < u_3\\ \cdots < u_{k-1} < v_{min_{k-1}} \leq v_{max_{k-1}} < u_k\\ (ou \quad v_{min_1} \leq v_{max_1} < u_1 < v_{min_2} \leq v_{max_2} < u_2\\ \cdots < v_{min_k} \leq v_{max_k} < u_k < v_{min_{k+1}} \leq v_{max_{k+1}}\ )\end{gathered}$$

■

Etudions une combinaison linéaire de parties impaires vérifiant cette propriété d'entrelacement mutuel des zéros.

Corollaire 3 : Considérons trois polynômes $f^e(-s^2)$, $sf_{min}^o(-s^2)$ et $sf_{max}^o(-s^2)$ qui satisfont la propriété d'entrelacement mutuel des zéros. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et définissons $f^o(-s^2)$ par la relation suivante

$$f^o(-s^2) = a.f_{min}^o(-s^2) + b.f_{max}^o(-s^2) \qquad (25)$$

Si $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$a.W(f^e(-s^2), sf_{min}^o(-s^2)) + b.W(f^e(-s^2), sf_{max}^o(-s^2)) > 0 \quad (26)$$

alors le polynôme $f(s) = f^e(s^2) + sf^o(s^2)$ est stable.

Preuve

Cette preuve est basée sur le Théorème 2. Comme $f^e(-s^2)$, $sf_{min}^o(-s^2)$ et $sf_{max}^o(-s^2)$ satisfont la propriété d'entrelacement mutuel, alors la condition 1 est vérifiée. La condition 2 est également satisfaite, puisque $W(f^e(-s^2), sf^o(-s^2)) > 0$ si la relation (26) est vérifiée. ■

En considérant [12], nous savons que $sf^o(-s^2)$ a des zéros simples réels car $sf_{min}^o(-s^2)$ et $sf_{max}^o(-s^2)$ s'entrelacent.

Dans le prochain corollaire, une extension du Théorème 4 est donnée, appliquée aux polynômes de Kharitonov.

Corollaire 4 : Considérons quatre polynômes de Kharitonov $f_0(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ définis en (27)et associés à la famille polynomiale $f_q(s) = \Sigma_{i=1}^m[q_{min},\ q_{max}]s^i$

$$\begin{aligned}f_0(s) &= f_{min}^e(s^2) + sf_{min}^o(s^2), \quad f_2(s) = f_{max}^e(s^2) + sf_{min}^o(s^2)\\ f_1(s) &= f_{min}^e(s^2) + sf_{max}^o(s^2), \quad f_3(s) = f_{max}^e(s^2) + sf_{max}^o(s^2)\end{aligned} \qquad (27)$$

Supposons que les racines de $f^e_{min}(-s^2)$ et $f^e_{max}(-s^2)$ soient réelles. Alors le polynôme $f_q(s)$ défini par intervalle est stable si, et seulement si la condition (28) est vérifiée

$$\begin{array}{l} \forall\lambda \in [0,1],\ \forall\mu \in [0,1],\ \forall u \in \mathbb{R}, \\ (1-\lambda)(1-\mu)\, W(f^e_{min}(-s^2), sf^o_{min}(-s^2)) + \\ (1-\lambda)\mu\, W(f^e_{min}(-s^2), sf^o_{max}(-s^2)) + \\ (1-\mu)\lambda\, W(f^e_{max}(-s^2), sf^o_{min}(-s^2)) + \\ \lambda\mu\, W(f^e_{max}(-s^2), sf^o_{max}(-s^2)) > 0 \end{array} \tag{28}$$

Preuve

Si $f_q(s)$ est stable alors les polynômes $f_0(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ sont réels. Avec ces conditions et selon [7], nous savons que le plan de Kharitonov est stable

$$(1-\lambda)f^e_{min}(s^2)+\lambda f^e_{max}(s^2)+(1-\mu)sf^o_{min}(s^2)+\mu sf^o_{max}(s^2)$$

Nous en déduisons que la relation (28) est vraie. Réciproquement, si les racines de $f^e_{min}(-s^2)$ et $f^e_{max}(-s^2)$ sont réelles et si la relation (28) est vérifiée quel que soit λ et quel que soit μ appartenant à $[0,1]$, alors les polynômes $f_0(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ sont stables et $f_q(s)$ est stable.

■

IV. Conclusion

Dans ce papier un nouveau théorème de stabilité polynomiale a été présenté. Ce critère est basé sur un simple test de positivité polynomial, cf. le Théorème 2. De plus, il a été montré que ce résultat peut être utilisé pour tester la stabilité de polynômes incertains. Ce résultat pourra trouver certainement de nombreux développements dans le cadre de l'étude des polynômes positifs.

Références

[1] B.D. Anderson, E. Jury, and M. Mansour. On robust Hurwitz polynomials. *IEEE TAC*, 32(10) :pp. 909–913, 1987.

[2] B.R Barmish. *New tools for robustness of linear systems,*. Mac Millan, 1994.

[3] S. P. Bhattacharyya, H. Chappellat, and L. H. Keel. *Robust Control, The parametric Approach.* Prentice Hall, 1995.

[4] S. Bialas. A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials and matrices. *Bulletin of Polish Academy*, 33 :473–480, 1985.

[5] V. Blondel. A note on convex combinations of polynomials. *IEEE TAC*, 41(11) :pp. 1690–1691, 1996.

[6] N.K Bose. A system theoretic approach to stability of sets of polynomials. *Contemporary Math*, 47 :pp 25–34, 1985.

[7] H. Chappellat and S.P. Bhattacharyya. An alternative proof of Kharitonov's theorem. *IEEE-TAC*, 34 :pp. 448–450, 1989.

[8] F.R Gantmacher. *The Theory of Matrices.* Chelsea Publishing Company, New York edition, 1959.

[9] D. Henrion. On convexity of the frequency response of a stable polynomial. *IEEE TAC*, 53(4) :pp. 1062–1066, 2008.

[10] Ming-Tzu Ho, Aniruddha Datta, and S.P. Bhattacharyya. Generalizations of the Hermite-Biehler theorem. *Linear Algebra and its Applications*, 302-303 :pp. 135–153, 1999.

[11] O. Holtz. Hermite-Biehler, Routh-Hurwitz, and total positivity. *Linear Algebra and its Applications*, 372 :pp. 105–110, 2003.

[12] N. Obreschkoff. Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome. *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, 1963.

[13] A. Olshevsky and V. Olshevsky. Kharitonov's theorem and bezoutians. *Linear Algebra and its Applications*, 399 :pp. 285–297, 2005.

[14] M.R. Stojic and D.D. Siljak. Generalization of Hurwitz Nyquist and Mikhailov stability criteria. *IEEE TAC*, 10 :pp. 250–254, 1965.