

Design d'un observateur pour une classe triangulaire de systèmes non-linéaires à retard

Boubekeur TARGUI^{1*}, Miloud FRIKEL¹, Mohammed M'SAAD¹, Carlos-M. ASTORGA-ZARAGOZA²

¹Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen, UMR 6072
6 Boulevard du Maréchal Juin, 14050 CAEN Cedex, France.

²Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Interior Internado
Palmira s/n, Col. Palmira, A.P. 5-164, C.P. 62050, Cuernavaca, Mor., México

Résumé— Dans ce travail nous proposons un observateur pour une classe de systèmes non-linéaires triangulaires à retard variable simple et multiple. La principale caractéristique de l'observateur proposé est sa simplicité d'implémentation car il est basé sur un gain constant. La synthèse de l'observateur sera présentée pour les systèmes à retard variable et ensuite le résultat sera étendu aux systèmes soumis à des retards multiples. Les performances de l'observateur proposé sont illustrées en simulation à travers un exemple.

Mots-clés— Systèmes non-linéaires triangulaires, Systèmes à retard, Observateur non-linéaire.

I. INTRODUCTION

Ces dernières années les systèmes à retard ont fait l'objet de nombreux travaux car le phénomène du retard est présent dans de nombreux systèmes physiques tels que les systèmes mécaniques, les circuits électriques, les réseaux de communication, etc. La source du retard dans un système peut-être due à la physique même du système ou induit dans le système sous forme de retard de transmission du aux canaux de communication. La présence d'un retard dans un système peut-être source d'oscillation et d'instabilité. L'étude de la stabilité de la commande et de l'estimation d'état pour les systèmes à retard ont fait l'objet d'une vaste littérature. L'article [1] offre une présentation des différentes approches de commande des systèmes à retard.

D'un autre côté l'estimation d'état pour les systèmes non-linéaires par le moyen d'observateur a fait l'objet de nombreux travaux. Le synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires est liée a la notion d'observabilité. En effet, l'uniforme observabilité des systèmes non-linéaires mono-sortie se traduit par la structure triangulaire du système sur lequel le synthèse d'observateur sera basée[4][5][6][9][10] et une généralisation au cas multi-sortie a été proposée dans [7]. Le synthèses des observateurs à grand gain est, directement, liée à la structure triangulaire du système qui est liée à la notion d'uniforme observabilité [4][5]. Dans [6][9][10] un observateur à gain constant pour des structures triangulaires a été proposé. Le synthèses d'observateur pour les systèmes à retard a fait l'objet de nombreux travaux [2] [11][12]. Dans [3] une approche basée sur un cascade d'observateurs pour estimer l'état lorsque le retard est présent sur la sortie mesurée a été présentée et une approche basée sur un observateur adaptatif a été

proposée récemment [10] pour une classe de systèmes non-linéaires triangulaires avec une partie linéaire.

Cet article est organisé de la façon suivante : la première partie est consacrée au formulation du problème et à la présentation de quelques préliminaires. Dans la seconde partie nous présentons un observateur pour une classe de systèmes non-linéaires avec un retard variable. Dans la troisième partie nous présentons une extension du résultat de la deuxième partie à la classe considérée mais avec des retards variables multiples. La dernière partie illustre les performances de l'approche proposée à travers un exemple.

II. FORMULATION DU PROBLÈME ET PRÉLIMINAIRES

Considérons la classe de systèmes non-linéaires à retard suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(u, u_\tau, x_1, x_{1\tau}, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(u, u_\tau, x_1, x_{1\tau}, x_2, x_{2\tau}, x_3) \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(u, u_\tau, x_1, x_{1\tau}, x_2, x_{2\tau}, \dots, x_i, x_{i\tau}, x_{i+1}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(u, u_\tau, x_1, x_{1\tau}, \dots, x_{n-1}, x_{n-1\tau}, x_n) \\ \dot{x}_n = f_n(u, u_\tau, x, x_\tau) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

Où $u(t) \in \mathbb{R}^m$ représente l'entrée et $y \in \mathbb{R}$ est la sortie du système. Avec $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On note

$$x_\tau(t) \triangleq x(t - \tau(t)) = \begin{bmatrix} x_{1\tau}(t) \\ x_{2\tau}(t) \\ \vdots \\ x_{n\tau}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, u_\tau \triangleq u(t - \tau(t)),$$

$\tau(t)$ est un retard variable supposé connu et $x(t) = \phi(t)$ pour $t \leq \tau$. Où $\phi(t)$ représente la condition initiale appartenant à un espace de Banach et $\|\cdot\|$ définit la norme euclidienne.

Le système (1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(u(t), u_\tau(t), x(t), x_\tau(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

*Contact : boubekeur.targui@greyc.ensicaen.fr, Tél : +33 (0)2 31 45 27 12 Fax : +33 (0)2 31 45 26 98

$$\text{Avec } f = \begin{bmatrix} f_1(u, u_\tau, x_1, x_{1\tau}, x_2) \\ f_2(u, u_\tau, x_1, x_{1\tau}, x_2, x_{2\tau}, x_3) \\ \vdots \\ f_{n-1}(u, u_\tau, x_1, x_{1\tau}, \dots, x_{n-1}, x_{n-1\tau}, x_n) \\ f_n(u, u_\tau, x, x_\tau) \end{bmatrix}$$

et C est une matrice de dimension $(1 \times n)$ donnée par :

$$C = [1, 0, \dots, 0] \quad (3)$$

Considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 (H1). L'état $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ et l'entrée $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ sont bornés.

Hypothèse 2 (H2). Les fonctions f_i ; $i = 1, \dots, n$ sont globalement Lipschitziennes par rapport à x et x_τ , alors $\exists c > 0$ et $\forall x(t), y(t), x(t - \tau), y(t - \tau) \in \mathbb{R}^n$ nous avons :

$$\|f(u, u_\tau, x, x_\tau) - f(u, u_\tau, y, y_\tau)\| \leq c(\|x - y\| + \|x_\tau - y_\tau\|)$$

Hypothèse 3 (H3). Il existe des constantes $0 < \alpha < \beta < +\infty$, telle que $\forall (x, u) \in X \times U$, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < a_i(t) &= a_i(u, u_\tau, x_1, x_{1\tau}, x_2, x_{2\tau}, \dots, x_i, x_{i\tau}, x_{i+1}) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \leq \beta; \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4)$$

Hypothèse 4 (H4). Le retard variable $\tau(t)$ est borné c -à-d $0 < \tau(t) \leq \tau_{max}$ et il est dérivable et satisfait $\dot{\tau}(t) \leq \mu < 1$.

Nous adoptons les notations suivantes :

Soit la matrice $A(t)$ de dimension $(n \times n)$ de la forme suivante,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2(t) & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & a_{n-1}(t) \\ 0 & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Avec les fonctions $a_i(t)$; $i = 1, \dots, n-1$ sont définies comme dans (4) et satisfont **(H3)**.

Considérons S une matrice constante Symétrique Définie Positive (S.D.P) de dimension $(n \times n)$ de la forme suivante :

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_1 & 0 & & 0 \\ s_1 & s_{22} & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & & s_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & s_{n-1} & s_{nn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Où les éléments $s_{ii} > 0$ et $s_j < 0$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n-1$.

Considérons la matrice Λ_ρ de dimension $(n \times n)$ diagonale donnée comme suivant :

$$\Lambda_\rho = \text{diag} [\rho, \rho^2, \dots, \rho^n] \quad (7)$$

où ρ est un réel strictement positif.

Afin de pouvoir présenter ce résultat, nous avons besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme : [6][7][8] Il existe une matrice constante S de dimension $n \times n$ Symétrique Définie Positive (S.D.P) de la forme (6); $\exists \eta > 0$ tel que

$$A^T(t)S + SA(t) - 2C^T C \leq -\eta I; \quad \forall t \geq 0 \quad (8)$$

Où $A(t)$ est donnée par (5) et I est la matrice identité de dimension $(n \times n)$. Finalement les éléments s_{ii}, s_j , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n-1$ de S sont donnés en fonction de α et β définis par (4).

III. SYNTHÈSE D'OBSERVATEUR

L'observateur proposé pour (1) est donné par le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = f(u(t), u_\tau(t), \hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t)) - \Lambda_\rho S^{-1} C^T (C \hat{x}(t) - y(t)) \quad (9)$$

Où S est de la forme (6) et satisfait le Lemme précédent,

et C est donnée par (3). Avec $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(t) \end{bmatrix}$ et on note

$$\hat{x}_\tau \triangleq \hat{x}(t - \tau) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1\tau} \\ \hat{x}_{2\tau} \\ \vdots \\ \hat{x}_{n\tau} \end{bmatrix}. \quad \hat{x}(t) \text{ et } \hat{x}_\tau(t) \text{ sont, respectivement,}$$

les vecteurs estimés d'état sans et avec retard, u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (1), et la matrice Λ_ρ est donnée par (7).

Nous annonçons le théorème suivant :

Théorème 1 : Supposons que le système (1) satisfait les hypothèses **(H1)-(H4)** alors pour $\rho > \rho^*$ avec $\rho^* = \frac{4 - 3\mu}{\eta(1 - \mu)} c \lambda_{max}(S)$, le système (9) est un observateur à convergence asymptotique pour système (1). L'erreur d'observation $\tilde{x} = \hat{x}(t) - x(t)$ est asymptotiquement stable pour $\hat{x}(0), x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Considérons l'erreur d'observation $\tilde{x}(t) =$

$$\hat{x}(t) - x(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \text{ avec } \tilde{x}_i = \hat{x}_i(t) - x_i(t)$$

$i = 1, \dots, n$.

$$\text{Posons } x^i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix}, \quad x_\tau^i = \begin{pmatrix} x_{1\tau} \\ x_{2\tau} \\ \vdots \\ x_{i\tau} \end{pmatrix}; \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\text{et } \Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}$$

Avec,

$$\Delta f_i = \begin{cases} f_i(u, u_\tau, \hat{x}^i, \hat{x}_\tau^i, x_{i+1}) - f_i(u, u_\tau, x^i, x_\tau^i, x_{i+1}) \\ ; i = 1, \dots, n-1 \\ f_n(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - f_n(u, u_\tau, x, x_\tau); i = n \end{cases} \quad (10)$$

Pour $i = 1, \dots, n-1$ nous avons :

$$\begin{aligned} f_i(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - f_i(u, u_\tau, x, x_\tau) &= \\ f_i(u, u_\tau, \hat{x}^i, \hat{x}_\tau^i, \hat{x}_{i+1}) - f_i(u, u_\tau, x^i, x_\tau^i, x_{i+1}) + \Delta f_i & \end{aligned} \quad (11)$$

En utilisant le théorème de la valeur moyenne nous avons :

$$\begin{aligned} f_i(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - f_i(u, u_\tau, x, x_\tau) &= a_i(t) \tilde{x}_{i+1}(t) + \Delta f_i \\ ; i = 1, \dots, n-1 & \end{aligned} \quad (12)$$

Où les fonctions $a_i(t)$; $i = 1, \dots, n-1$ sont données par (4) est verifient **(H3)**.

D'après (2) et (9), la dynamique de \tilde{x} est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}} = f(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - f(u, u_\tau, x, x_\tau) - \Lambda_\rho S^{-1} C^T C \tilde{x} \quad (13)$$

Combinons (10), (12) et (13) nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= (A(t) - \Lambda_\rho S^{-1} C^T C) \tilde{x}(t) \\ + \Delta f(u(t), u_\tau(t), \hat{x}(t), x(t), \hat{x}_\tau(t), x_\tau(t)) & \end{aligned} \quad (14)$$

Où $A(t)$ est une matrice de dimension $(n \times n)$ de la forme (5).

Posons $\bar{x} = \Lambda_\rho^{-1} \tilde{x}$. Notons que nous pouvons facilement verifier que $\Lambda_\rho^{-1} A(t) \Lambda_\rho = \rho A(t)$ et par conséquent on obtient

$$\dot{\bar{x}}(t) = \rho(A(t) - S^{-1} C^T C) \bar{x}(t) + \Lambda_\rho^{-1} \Delta f(u, u_\tau, \hat{x}, x, \hat{x}_\tau, x_\tau)$$

Considérons, maintenant la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T S \bar{x} + \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} \int_{t-\tau(t)}^t \|\bar{x}(s)\|^2 ds$$

Où c est la constante de Lipschitz provenant de l'hypothèse **(H2)**, $\lambda_{\max}(S)$ est la plus grande valeur propre de S et la constante μ vient de l'hypothèse **(H4)**.

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\rho \bar{x}^T (SA(t) - C^T C) \bar{x}(t) \\ + \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} \|\bar{x}(t)\|^2 - \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} (1 - \dot{\tau}(t)) \|\bar{x}(t - \tau)\|^2 & \\ + 2\bar{x}(t)^T S \Lambda_\rho^{-1} \Delta f(u, \hat{x}(t), x(t), \hat{x}_\tau(t), x_\tau(t)) & \\ = \rho \bar{x}(t)^T (SA(t) + A(t)^T S - 2C^T C) \bar{x}(t) & \\ + \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} \|\bar{x}(t)\|^2 - \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} (1 - \dot{\tau}(t)) \|\bar{x}(t - \tau)\|^2 & \\ + 2\bar{x}(t)^T S \Lambda_\rho^{-1} \Delta f(u, \hat{x}(t), x(t), \hat{x}_\tau(t), x_\tau(t)) & \end{aligned}$$

Par l'utilisation du lemme nous obtenons,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho \eta \|\bar{x}(t)\|^2 \\ + \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} \|\bar{x}(t)\|^2 - \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} (1 - \dot{\tau}(t)) \|\bar{x}(t - \tau)\|^2 & \\ + 2\|\bar{x}(t)^T S\| \|\Lambda_\rho^{-1} \Delta f(u, \hat{x}(t), x(t), \hat{x}_\tau(t), x_\tau(t))\| & \end{aligned}$$

De la condition Lipschitz de l'hypothèse **(H2)** nous avons,

$$\|\Lambda_\rho^{-1} \Delta f(u, \hat{x}(t), x(t), \hat{x}_\tau(t), x_\tau(t))\| \leq c \|\bar{x}(t)\| + c \|\bar{x}(t - \tau)\|$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho \eta \|\bar{x}(t)\|^2 \\ + \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} \|\bar{x}(t)\|^2 - \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} (1 - \dot{\tau}(t)) \|\bar{x}(t - \tau)\|^2 & \\ + 2c \|S\| \|\bar{x}(t)\|^2 + 2c \|S\| \|\bar{x}(t)\| \|\bar{x}(t - \tau)\| & \end{aligned}$$

Comme $\|\bar{x}(t)\| \|\bar{x}(t - \tau)\| \leq \frac{1}{2} (\|\bar{x}(t)\|^2 + \|\bar{x}(t - \tau)\|^2)$ nous avons alors,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho \eta \|\bar{x}(t)\|^2 \\ + \frac{c \lambda_{\max}(S)}{1 - \mu} \|\bar{x}(t)\|^2 & \\ + 3c \|S\| \|\bar{x}(t)\|^2 + \frac{\dot{\tau}(t) - \mu}{1 - \mu} c \|S\| \|\bar{x}(t - \tau)\|^2 & \end{aligned}$$

De l'hypothèse **(H4)** résulte $\frac{\dot{\tau}(t) - \mu}{1 - \mu} \leq 0$, ce qui nous conduit à,

$$\dot{V} \leq (-\rho \eta + \frac{4 - 3\mu}{1 - \mu} c \lambda_{\max}(S)) \|\bar{x}(t)\|^2 \quad (15)$$

Posons $\rho^* = \frac{4 - 3\mu}{\eta(1 - \mu)} c \lambda_{\max}(S)$. Pour $\rho > \rho^*$ nous avons :

$$\dot{V} \leq -\alpha(\rho) \|\bar{x}(t)\|^2 \quad (16)$$

Avec $\alpha(\rho) = \rho \eta - \frac{4 - 3\mu}{1 - \mu} c \lambda_{\max}(S)$ et $\alpha(\rho) > 0$, nous avons alors $\dot{V} \leq 0$ c-à-d $V(t) \leq V(0)$ et comme $\alpha(\rho) \|\bar{x}(t)\|^2 \leq -\dot{V}$ nous avons :

$$\alpha(\rho) \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \|\bar{x}(s)\|^2 ds \leq V(0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) \quad (17)$$

Il en résulte que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t) \rightarrow 0$, nous avons par ailleurs $\|x(t)\| \leq \rho^n \|\bar{x}\|$ et par conséquent $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \rightarrow 0$.

L'erreur d'observation $\tilde{x} = \hat{x}(t) - x(t)$ est asymptotiquement stable pour $\hat{x}(0), x(0) \in \mathbb{R}^n$ et donc le système (9) est un observateur asymptotique pour (1) ce qui termine la démonstration du théorème 1□.

Remarque 1 : Il a été montré dans [6] que le système (9) est un observateur à convergence exponentielle pour le système (1) sans retard.

Remarque 2 : Lorsque le retard dans le système (1) est constant cela correspond à $\mu = 0$ et du théorème 1 nous pouvons facilement déduire le théorème suivant.

Théorème 2 : Supposons que le système (1) satisfait les hypothèses **(H1)-(H4)** alors pour $\rho > \rho^*$ avec $\rho^* =$

$\frac{4}{\eta}c\lambda_{max}(S)$, le système (9) est un observateur à convergence asymptotique pour système (1). L'erreur d'observation $\tilde{x} = \hat{x}(t) - x(t)$ est asymptotiquement stable pour $\hat{x}(0), x(0) \in \mathbb{R}^n$.

IV. EXTENSION AUX SYSTÈMES TRIANGULAIRES À RETARD MULTIPLE

Considérons le système triangulaire à plusieurs retards de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = f_1(x_1, x_1^{\tau}, x_2, u, u^{\tau}) \\ \dot{\hat{x}}_2 = f_2(x_1, x_1^{\tau}, x_2, x_2^{\tau}, x_3, u, u^{\tau}) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_i = f_i(x_1, x_1^{\tau}, x_2, x_2^{\tau}, \dots, x_i, x_i^{\tau}, x_{i+1}, u, u^{\tau}) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_1^{\tau}, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}^{\tau}, x_n, u, u^{\tau}) \\ \dot{\hat{x}}_n = f_n(x, x^{\tau}, u, u^{\tau}) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (18)$$

Avec $x^{i\tau} = \begin{pmatrix} x_i(t - \tau_1) \\ x_i(t - \tau_2) \\ \vdots \\ x_i(t - \tau_l) \end{pmatrix}; i = 1, \dots, n, x^{\tau}(t) =$

$\begin{pmatrix} x^{1\tau} \\ x^{2\tau} \\ \vdots \\ x^{n\tau} \end{pmatrix}$ et $u^{\tau}(t) = \begin{pmatrix} u(t - \tau_1) \\ u(t - \tau_2) \\ \vdots \\ u(t - \tau_l) \end{pmatrix}$ et les l retards variables $\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_l(t)$, où chaque retard $\tau_i(t); i = 1, \dots, l$ est connu borné et satisfait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5 (H5). Le retard variable $\tau_i(t); i = 1, \dots, l$ est borné c-à-d $0 < \tau_i(t) \leq \tau_{max}^i; i = 1, \dots, l$ et il est dérivable est satisfait $\dot{\tau}_i(t) \leq \mu_i < 1; i = 1, \dots, l$.

Le système (18) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(u(t), u^{\tau}(t), x(t), x^{\tau}(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (19)$$

Avec $f = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_1^{\tau}, x_2, u, u^{\tau}) \\ f_2(x_1, x_1^{\tau}, x_2, x_2^{\tau}, x_3, u, u^{\tau}) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, x_1^{\tau}, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}^{\tau}, x_n, u, u^{\tau}) \\ f_n(x, x^{\tau}, u, u^{\tau}) \end{bmatrix}$

et C est donnée par (3).

Soit le système dynamique :

$$\dot{\hat{x}} = f(u(t), u^{\tau}(t), \hat{x}(t), \hat{x}^{\tau}(t)) - \Lambda_{\rho} S^{-1} C^T (C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (20)$$

Où S est de la forme (6) et elle satisfait le Lemme, C est

donnée par (3), $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(t) \end{bmatrix}$ et on note $\hat{x}^{\tau} \triangleq \hat{x}(t - \tau) =$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^{1\tau} \\ \hat{x}^{2\tau} \\ \vdots \\ \hat{x}^{n\tau} \end{bmatrix}, \text{ sont les vecteurs estimés d'état sans et avec re-}$$

tard, u et y sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système (18), et la matrice Λ_{ρ} est donnée par (7) avec $\rho > 0$.

Nous annonçons le théorème suivant qui est une extension du théorème 1 pour le cas des retards multiples.

Théorème 3 : Supposons que le système (18) satisfait les hypothèses **(H1)-(H5)** alors pour $\rho > \rho^*$ avec $\rho^* = (2 + l + \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i}) \frac{c\lambda_{max}(S)}{\eta}$, le système (20) est un observateur à convergence asymptotique pour le système (18). L'erreur d'observation $\tilde{x} = \hat{x}(t) - x(t)$ est asymptotiquement stable pour $\hat{x}(0), x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Le début de la démonstration est semblable à celle du théorème 1, on définit $\tilde{x} = \hat{x} - x$, puis $\bar{x} = \Lambda_{\rho}^{-1} \tilde{x}$ et on obtient la dynamique de $\bar{x}(t)$:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \rho(A(t) - S^{-1}C^T C)\bar{x}(t) + \Lambda_{\rho}^{-1} \Delta f(u, u^{\tau}, \hat{x}, x, \hat{x}_{\tau}, x_{\tau})$$

Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T S \bar{x} + c\lambda_{max}(S) \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i} \int_{t - \tau_i(t)}^t \|\bar{x}(s)\|^2 ds$$

Où c est la constante de Lipschitz provenant de l'hypothèse **(H2)**, $\lambda_{max}(S)$ est la plus grande valeur propre de S et la constante $\mu_i; i = 1, \dots, l$ vient de l'hypothèse **(H5)**. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\rho \bar{x}^T (SA(t) - C^T C)\bar{x}(t) + c\lambda_{max}(S) \|\bar{x}(t)\|^2 \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i} \\ &- c\lambda_{max}(S) \sum_{i=1}^l \frac{1 - \dot{\tau}_i(t)}{1 - \mu_i} \|\bar{x}(t - \tau_i)\|^2 \\ &+ 2\bar{x}(t)^T S \Lambda_{\rho}^{-1} \delta f(u, \hat{x}(t), x(t)) \\ &= \rho \bar{x}(t)^T (SA(t) + A(t)^T S - 2C^T C)\bar{x}(t) \\ &+ c\lambda_{max}(S) \|\bar{x}(t)\|^2 \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i} \\ &- c\lambda_{max}(S) \sum_{i=1}^l \frac{1 - \dot{\tau}_i(t)}{1 - \mu_i} \|\bar{x}(t - \tau_i)\|^2 \\ &+ 2\bar{x}(t)^T S \Lambda_{\rho}^{-1} \delta f(u, \hat{x}(t), x(t)) \end{aligned}$$

D'après le Lemme nous obtenons,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho\eta \|\bar{x}(t)\|^2 + c\lambda_{max}(S) \|\bar{x}(t)\|^2 \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i} \\ &- c\lambda_{max}(S) \sum_{i=1}^l \frac{1 - \dot{\tau}_i(t)}{1 - \mu_i} \|\bar{x}(t - \tau_i)\|^2 \\ &+ 2\|\bar{x}(t)^T S\| \|\Lambda_{\rho}^{-1} \delta f(u, \hat{x}(t), x(t))\| \end{aligned}$$

De la condition Lipschitz de l'hypothèse (H2) nous avons,

$$\|\Lambda_\rho^{-1} \delta f(u, \hat{x}(t), x(t))\| \leq c \|\bar{x}(t)\| + c \sum_{i=1}^l \|\bar{x}(t - \tau_i)\|$$

Soit,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho\eta \|\bar{x}(t)\|^2 \\ &+ c\lambda_{max}(S) \|\bar{x}(t)\|^2 \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i} \\ &- c\lambda_{max}(S) \sum_{i=1}^l \frac{1 - \dot{\tau}_i(t)}{1 - \mu_i} \|\bar{x}(t - \tau_i)\|^2 \\ &+ 2c\|S\| \|\bar{x}(t)\|^2 + 2c\|S\| \|\bar{x}(t)\| \sum_{i=1}^l \|\bar{x}(t - \tau_i)\| \end{aligned}$$

Comme,

$$\|\bar{x}(t)\| \sum_{i=1}^l \|\bar{x}(t - \tau_i)\| \leq \frac{1}{2} (l \|\bar{x}(t)\|^2 + \sum_{i=1}^l \|\bar{x}(t - \tau_i)\|^2)$$

Nous obtenons alors,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho\eta \|\bar{x}(t)\|^2 \\ &+ c\lambda_{max}(S) \|\bar{x}(t)\|^2 \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i} \\ &- c\lambda_{max}(S) \sum_{i=1}^l \frac{1 - \dot{\tau}_i(t)}{1 - \mu_i} \|\bar{x}(t - \tau_i)\|^2 \\ &+ (2 + l)c\|S\| \|\bar{x}(t)\|^2 + c\|S\| \sum_{i=1}^l \|\bar{x}(t - \tau_i)\|^2 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho\eta \|\bar{x}(t)\|^2 + c\lambda_{max}(S) \|\bar{x}(t)\|^2 (2 + l + \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i}) \\ &+ c\lambda_{max}(S) \sum_{i=1}^l \frac{\dot{\tau}_i(t) - \mu_i}{1 - \mu_i} \|\bar{x}(t - \tau_i)\|^2 \end{aligned} \quad (21)$$

De l'hypothèse (H5) nous avons $\frac{\dot{\tau}_i(t) - \mu_i}{1 - \mu_i} \leq 0$, et donc,

$$\dot{V} \leq (-\rho\eta + (2 + l + \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i}) c\lambda_{max}(S)) \|\bar{x}(t)\|^2 \quad (22)$$

Posons $\rho^* = (2 + l + \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i}) \frac{c\lambda_{max}(S)}{\eta}$. Pour $\rho > \rho^*$ nous avons :

$$\dot{V} \leq -\xi(\rho) \|\bar{x}(t)\|^2 \quad (23)$$

Avec $\xi(\rho) = \rho\eta - (2 + l + \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - \mu_i}) c\lambda_{max}(S)$ et $\xi(\rho) > 0$

Nous avons alors $\dot{V} \leq 0$ c-à-d $V(t) \leq V(0)$ et comme $\xi(\rho) \|\bar{x}(t)\|^2 \leq -\dot{V}$, nous avons :

$$\xi(\rho) \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \|\bar{x}(s)\|^2 ds \leq V(0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) \quad (24)$$

Nous obtenons $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t) \rightarrow 0$, nous avons par ailleurs $\|x(t)\| \leq \rho^n \|\bar{x}\|$ et par conséquent $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \rightarrow 0$.

L'erreur d'observation $\bar{x} = \hat{x}(t) - x(t)$ est asymptotiquement stable pour $\hat{x}(0), x(0) \in \mathbb{R}^n$ et donc le système (20) est un observateur asymptotique pour (18) ce qui termine la démonstration du théorème 2 \square .

V. EXEMPLE

Afin d'illustrer les performances de l'observateur proposé considérons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2(t)}{1 + x_2(t)} - \frac{x_1(t - \tau)}{1 + x_1(t - \tau)} + u(t) \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2(t - \tau)}{1 + x_2(t - \tau)} + u(t - \tau) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (25)$$

Avec $0 < x_{min} \leq x_i \leq x_{max} < +\infty$; $i = 1, 2$ et $0 \leq u(t) \leq u_{max} < +\infty$. Le retard τ est considéré comme constant. Il est facile de voir que (25) peut s'écrire sous la forme (1) avec $f_1 = \frac{x_2(t)}{1 + x_2(t)} - \frac{x_1(t - \tau)}{1 + x_1(t - \tau)} + u(t)$ et

$$f_2 = -\frac{x_2(t - \tau)}{1 + x_2(t - \tau)} + u(t - \tau) \text{ et } C = [1 \ 0].$$

Afin d'appliquer le théorème 2 au système (25) nous montrons qu'il satisfait les hypothèses (H1)-(H4). L'état et l'entrée du système sont bornés, donc (H1) est satisfaite et il est facile de voir que les fonctions f_i , $i = 1, 2$ sont lipchitziennes par conséquent (H2) est vérifiée, il nous reste à vérifier (H3).

Nous avons :

$$a_1(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{1}{(1 + x_2(t))^2} \quad (26)$$

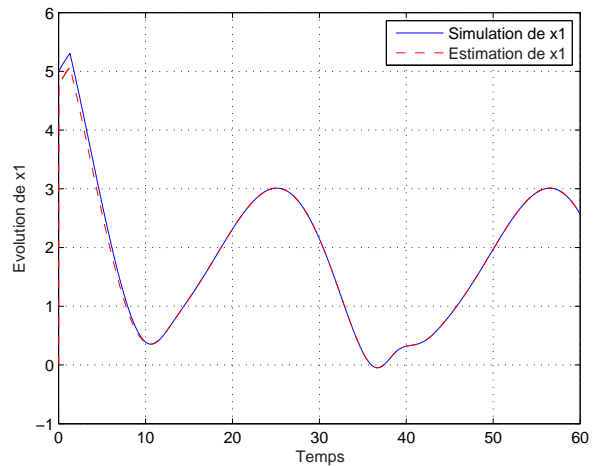


Fig. 1. Comparaison entre $x_1(t)$ et son estimée $\hat{x}_1(t)$.

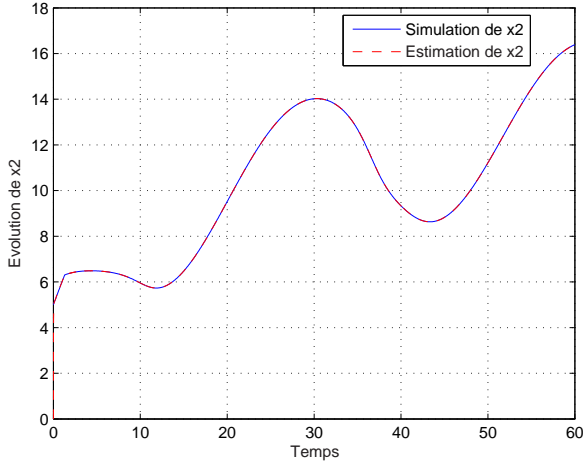


Fig. 2. Comparaison entre $x_2(t)$ et son estimée $\hat{x}_3(t)$.

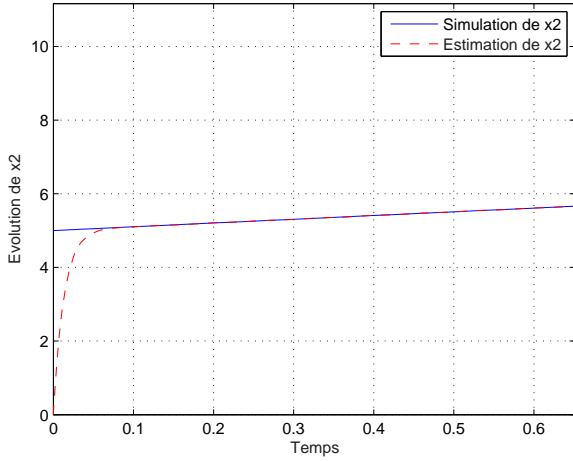


Fig. 3. Agrandissement des débuts de $x_2(t)$ et son estimée $\hat{x}_2(t)$.

Nous avons alors $\frac{1}{(1+x_{max})^2} \leq a_1(t) \leq 1$ donc **(H3)** est satisfaite avec $\alpha = \frac{1}{(1+x_{max})^2}$ et $\beta = 1$. L'application du Lemme précédent permet d'en déduire les éléments de S qui est de dimension (2×2) et dont les éléments vérifient $|s_1| > \frac{\beta^2 s_{11}^2}{2\alpha}$ et $s_{22} > \frac{s_1^2}{s_{11}}$ (voir [6], [7] et [8]). Pour la simulation prenant $s_{11} = 0,5$ et par conséquent $s_1 = 5$ et $s_{22} = 105$. Pour le système (25) nous avons $x_{max} = 5$ et la valeur du retard a été choisie constante et égale à 1,3. L'expression de l'entrée choisie lors de la simulation est $u(t) = 0,5 + 0,4\sin(0,2t + 20)$. Les équations de l'observateur s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \frac{\hat{x}_2(t)}{1+\hat{x}_2(t)} - \frac{\hat{x}_1(t-\tau)}{1+\hat{x}_1(t-\tau)} + u(t) \\ \quad - 3,82\rho(\hat{x}_1 - x_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\frac{\hat{x}_2(t-\tau)}{1+\hat{x}_2(t-\tau)} + u(t-\tau) \\ \quad - 0,18\rho^2(\hat{x}_1 - x_1) \end{cases} \quad (27)$$

Les valeurs initiales utilisées lors de la simulation sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = \hat{x}_1(t) = 0 \text{ pour } t \in [-\tau, 0[\\ x_2(t) = 0; \hat{x}_2(t) = 0 \text{ pour } t \in [-\tau, 0[\\ x_1(0) = 5; \hat{x}_1(0) = 0; x_2(0) = 5; \hat{x}_2(0) = 5; \end{cases}$$

La valeur du paramètre de réglage ρ a été prise égale à 20. Les figures 1 et 2 montrent, respectivement, une comparaison entre $x_1(t)$, $x_2(t)$ et leurs estimées $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$; on remarque que $\hat{x}_1(t)$ converge vers $x_1(t)$ après un certain temps de convergence et dans le cas de $\hat{x}_2(t)$ on remarque que $x_2(t)$ et $\hat{x}_2(t)$ sont, pratiquement, superposés. La figure 3 montre un agrandissement sur l'évolution de $x_2(t)$ et de $\hat{x}_2(t)$ montrant que $\hat{x}_2(t)$ converge rapidement vers $x_2(t)$. Les résultats obtenus sont satisfaisants et le choix du paramètre ρ permet de régler la rapidité de convergence de l'observateur.

VI. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons proposé un observateur simple pour estimer l'état d'une classe de systèmes non-linéaires triangulaires en présence de retard dans la dynamique du système. Le retard est considéré variable et peut-être simple ou multiple présent dans l'état comme dans l'entrée et il est supposé connu et borné. La caractéristique principale de l'approche proposée, par rapport aux autres méthodes de la littérature, réside dans sa simplicité puisque le système est traité dans sa forme originale sans changement de coordonnées et son gain est constant. Ses performances ont été illustrées à travers un exemple.

RÉFÉRENCES

- [1] J.-P. Richard. Time-delay systems :an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :1667-1694, 2003.
- [2] M. Darouach. Linear Functional Observers for Systems with Delays in State Variables. *IEEE Trans. Automatic Control*, 46(3) :491-496, 2001.
- [3] A. Geramani, C. Manes, et P. Pepe. A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Trans. Automatic Control*, 47(1) :96-101, 2002.
- [4] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A, *A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors.*, *IEEE Trans. on Aut. Control*, 37 :1992, pp 875-880.
- [5] J.P. Gauthier and I.A.K. Kupka, Observability and observers for nonlinear systems, *SIAM J. Control. Optim.*, 32 :1994 pp 994-994.
- [6] B. Targui, M. Farza, H. Hammouri, Observer design for a class of nonlinear systems, *Applied Mathematics Letters*, vol. 15, 2002, pp 709-720.
- [7] B. Targui, H. Hammouri, M. Farza, Observer design for a class of multi-output nonlinear systems : application to a distillation column, *40th CDC (IEEE Conference on Decision and Control)*, 2001, pp 3352-3357.
- [8] H. Hammouri, B. Targui and F. Armanet, High gain observer based on triangular structure, *Int. Journal on Robust and Nonlinear Control.*, vol. 12 (2002), pp 497-518.
- [9] M. Farza, M. M'Saad and L. Rossignol , Observer design for a class of MIMO nonlinear systems, *Automatica*, vol. 40, 2004, pp 135-143.
- [10] S. Ibrir, Adaptive observers for time-delay nonlinear systems in triangular form *Automatica*, Volume 45, Issue 10, October 2009, Pages 2392-2399
- [11] Hou, M., Zitek, P., and Patton, R.J. (2002), An observer Design for Linear Time-delay Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 121-125.
- [12] Wang, Z., Goodall, D. P., and Burnham, K. J. (2002). On designing observers for time-delay systems with nonlinear disturbances. *International Journal of Control*, 75(11), 803-811.