

# Observateur $H_\infty$ pour une classe de systèmes singuliers bilinéaires

Mohamed ZERROUGUI<sup>1</sup>, Latifa BOUTAT-BADDAS<sup>1</sup>, Mohamed DAROUACH<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centre de Recherche en Automatique de Nancy,  
UMR 7039 – Nancy-Université, CNRS  
186, Rue de Lorraine, Cosnes-Et-Romains

*Mohamed.Zerrougui@iut-longwy.uhp-nancy.fr, Latifa.Boutat-Baddas@iut-longwy.uhp-nancy.fr,  
Mohamed.Darouach@iut-longwy.uhp-nancy.fr*

**Résumé**— L'article que nous présentons concerne la synthèse d'observateur  $H_\infty$  pour une classe de systèmes singuliers bilinéaires. L'approche utilisée est basée sur la résolution d'un système d'équations de contraintes Sylvester. La synthèse proposée unifie celle d'observateurs d'ordre réduit, d'ordre plein et d'ordre minimal pour cette classe de systèmes singuliers bilinéaires. Les gains de l'observateur sont obtenus par la résolution des inégalités matricielles affines (LMI), un exemple numérique est présenté pour illustrer notre approche.

**Mots-clés**— Observateur  $H_\infty$ , systèmes bilinéaires singuliers,

## I. INTRODUCTION

Les systèmes singuliers ont été introduit pour décrire la dynamique de certains systèmes pour lesquels la représentation d'état standard n'est pas applicable. Récemment, les systèmes singuliers ont beaucoup attiré l'attention de la communauté des automaticiens. Ils sont appelés systèmes singuliers, descripteurs, généralisés, implicites ou systèmes à semi-état ([4]), ces systèmes ont un grand intérêt à la fois pratique et théorique ([5], [4], [3]), Nous les rencontrons dans des domaines aussi variés que les industries chimiques ([5]) et minérales, la robotique, en génie électrique et dans les systèmes économiques ([10]). Par conséquent, la synthèse d'observateurs pour les systèmes singuliers semble être très intéressante (voir [4], [7], [8]).

Beaucoup de travaux ont été élaborés autour de l'observation et la synthèse d'observateurs pour les systèmes singuliers linéaires (voir [7] et [4]). Dans ([8]) une extension d'observateurs est proposée pour une classe de systèmes singuliers non-linéaires Lipschitziens.

En outre, lorsque le comportement dynamique d'un système ne permet pas de le modéliser par un système linéaire, quelques procédés physiques peuvent être modélisés par des équations d'état bilinéaires. La synthèse d'observateurs pour les systèmes bilinéaires a été étudiée abondamment dans la littérature (voir [12]).

Dans le présent article nous proposons la synthèse d'un observateur  $H_\infty$  pour une classe de systèmes bilinéaires singuliers dont les bilinéarités sont considérées comme des incertitudes structurées. L'approche proposée est basée sur la résolution des contraintes sous formes d'équations de Sylvester. Les conditions d'existence des solutions de ces

équations sont données. Les problèmes de convergence exponentielle et de l'atténuation du gain  $\mathcal{L}_2$  sont garanties par l'utilisation du lemme borné réel, qui nous permet d'obtenir une formulation sous formes d'inégalités matricielles LMI. L'avantage de cette méthode est que l'erreur d'estimation ne dépend pas explicitement de l'état du système, l'observateur obtenu est d'ordre flexible et unifie la synthèse d'observateurs de différents ordres.

## II. FORMULATION DU PROBLÈME

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= A_0x(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^m u_i A_i x(t) + D_1 w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (1)$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le semi-vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  l'entrée du système,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  un signal de perturbation à énergie finie, et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  la sortie du système. La matrice  $E \in \mathbb{R}^{n_E \times n}$  est singulière pour  $n_E = n$ . Les matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n_E \times n}$  pour  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_E \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n_E \times n_w}$  et,  $D_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_w}$  sont réelles. le signal de perturbation  $w(t) \in \mathcal{L}_2$  est continu. L'entrée  $u(t)$ , est continue et bornée, c-à-d  $u(t) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^m$ , tels que

$$\Gamma := \{u(t) \in \mathbb{R}^m / u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}, i = 1, \dots, m\}.$$

Soit la matrice  $\Phi \in \mathbb{R}^{r \times n_1}$  matrice de rang plein ligne ([8]), telle que  $\Phi E = 0$ . par conséquent nous obtenons

$$\Phi A_0 x(t) + \Phi D_1 w(t) + \sum_{i=1}^m u_i \Phi A_i x(t) = -\Phi B u(t).$$

Considérons l'observateur d'ordre réduit suivant :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) &= (N_0 + \sum_{i=1}^m u_i N_i) \zeta(t) + H u(t) \\ &+ (J_0 + \sum_{i=1}^m u_i J_i) y(t) \\ \hat{x}(t) &= P \zeta(t) - Q \Phi B u(t) + (G_0 + \sum_{i=1}^m u_i G_i) y(t) \end{cases} \quad (2)$$

Le vecteur  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^q$  représente le vecteur d'état de l'observateur et  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  l'estimé de  $x(t)$ . Les matrices  $N_i$ ,  $J_i$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $Q$ , et  $G_i$  sont des matrices de dimensions appropriées à déterminer pour que  $\hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers  $x(t)$  pour  $w(t) = 0$ , et pour  $w(t) \neq 0$ ,  $\|e(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|$

Posons  $\varepsilon(t) = \zeta(t) - T E x(t)$  l'écart entre  $\zeta(t)$  et  $T E x(t)$ .

Nous obtenons donc le système suivant.

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \sum_{i=1}^m u_i N_i) \varepsilon(t) \\ + (J_0 C + N_0 T E - T A_0) x(t) \\ + (\sum_{i=1}^m u_i (N_i T E + J_i C - T A_i)) x(t) \\ + (H - T B) u(t) \\ + (J_0 D_2 - T D_1 + \sum_{i=1}^m u_i J_i D_2) w(t) \\ e(t) = P \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^m u_i (G_i C + Q \Phi A_i) x(t) \\ + (P T E + Q \Phi A_0 + G_0 C - I_n) x(t) \\ + (Q \Phi D_1 + G_0 D_2 + \sum_{i=1}^m u_i G_i D_2) w(t) \\ = P \varepsilon(t) + \left( [P \quad Q \quad G_0] \begin{bmatrix} T E \\ \Phi A_0 \\ C \end{bmatrix} - I_n \right) x(t) \\ + \sum_{i=1}^m u_i \left( [Q \quad G_i] \begin{bmatrix} \Phi A_i \\ C \end{bmatrix} \right) x(t) \\ + (Q \Phi D_1 + G_0 D_2 + \sum_{i=1}^m u_i G_i D_2) w(t) \end{cases} \quad (3)$$

Maintenant, si :

$$\begin{aligned} i) \quad & N_0 T E - T A_0 + J_0 C = 0 \\ ii) \quad & N_i T E - T A_i + J_i C = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m \\ iii) \quad & H = T B \\ iv) \quad & [P \quad Q \quad G_0] \begin{bmatrix} T E \\ \Phi A_0 \\ C \end{bmatrix} = I_n \\ v) \quad & [Q \quad G_i] \begin{bmatrix} \Phi A_i \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (4)$$

L'erreur (3) est indépendante de  $u_i$  et  $x$ , dans ce cas nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \sum_{i=1}^m u_i N_i) \varepsilon(t) \\ + (J_0 D_2 - T D_1 + \sum_{i=1}^m u_i J_i D_2) w(t) \\ e(t) = P \varepsilon(t) + (Q \Phi D_1 + G_0 D_2 + \sum_{i=1}^m u_i G_i D_2) w(t) \end{cases} \quad (5)$$

Les équations  $i) - v)$  ont la forme d'un système d'équations de Sylvester. La solution de ces équations peut être donnée de la manière suivante :

Définissons la matrice  $\tilde{T} = T - \Psi \Phi$ , où  $\Psi$  est une matrice arbitraire ([8]), donc les équations  $i), ii), iv)$  et  $v)$  peuvent être écrites comme suit :

$$i) \quad [N_0 \quad -\Psi \quad J \quad \bar{N}] \begin{bmatrix} \tilde{T} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \\ \Theta \end{bmatrix} = \tilde{T} \bar{A} \quad (6)$$

$$ii) \quad [P \quad Q \quad G] \begin{bmatrix} \tilde{T} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \bar{I}_n \quad (7)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{N} &= [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_m], \bar{A} = [A_0 \quad \bar{A}_1], \\ G &= [G_0 \quad \bar{G}], \bar{G} = [G_1 \quad \dots \quad G_m], \\ \bar{J} &= [J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_m], J = [J_0 \quad \bar{J}], \\ \bar{E} &= [E \quad 0 \quad \dots \quad 0], \bar{I}_n = [I_n \quad 0], \end{aligned}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C}_1 \end{bmatrix} \text{ et } \Theta = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{T} E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{T} E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{T} E \end{bmatrix}.$$

Avec

$$\bar{A}_1 = [A_1 \quad \dots \quad A_m] \text{ et } \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C \end{bmatrix}.$$

Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des matrices définies par :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= J_0 D_2 - T D_1 + (\sum_{i=1}^m u_i J_i) D_2 \\ \varphi_2 &= Q \Phi D_1 + G_0 D_2 + (\sum_{i=1}^m u_i G_i) D_2 \end{aligned}$$

dans ce cas le système (5) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \sum_{i=1}^m u_i N_i) \varepsilon(t) + \varphi_1 w(t) \\ e(t) = P \varepsilon(t) + \varphi_2 w(t) \end{cases} \quad (8)$$

nous supposons :

$$\text{Hypothèse 1 : } \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n + \text{rang} \begin{bmatrix} \Phi \bar{A}_1 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix}.$$

*Remarque 1 :* Lorsque  $u_i = 0$ , pour  $i = 1, \dots, m$ , l'Hypothèse 1 se réduit à celle obtenue pour les systèmes singuliers linéaires (voir [8]).

*Remarque 2 :* Nous pourrions remarquer que la dimension de l'observateur (2) est  $q \leq n$ , donc la présente approche unifie la synthèse des observateurs d'ordre plein ( $q = n$ ) et d'ordre réduit ( $q = n - p$ ).

### III. PRINCIPAUX RÉSULTATS

Dans cette section, nous présentons une nouvelle méthode pour la synthèse de l'observateur (2) pour le système (1) qui garantit que l'erreur  $e(t)$  converge asymptotiquement vers zéro pour  $w(t) = 0$  ainsi que pour  $w(t) \neq 0, \|e(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$  où  $\gamma$  est un scalaire qui correspond à la performance prescrite. La synthèse de l'observateur (2) de dimension  $q$  revient à trouver les matrices  $T, N_i, J_i, H, P, Q$  et  $G_i$ .

#### A. La solution des contraintes de Sylvester

Avant de donner la méthode suivie pour la synthèse de l'observateur (2), nous considérons l'équation (7) :

$$[P \quad Q \quad G] \begin{bmatrix} \tilde{T} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \bar{I}_n$$

Elle admet une solution si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{T} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{T} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Maintenant, de l'Hypothèse 1 et (9), nous avons

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{T} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n + \text{rang} \begin{bmatrix} \Phi \bar{A}_1 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix}$$

Soit  $R_1$  une matrice de rang plein ligne tels que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} R_1 \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{T} \bar{E} \\ \Phi \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n + \text{rang} \begin{bmatrix} \Phi \bar{A}_1 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix}$$

donc, il existe toujours des matrices  $K_1$  et  $\tilde{T}$  tel que

$$\tilde{T}\bar{E} = R_1 - K_1 \begin{bmatrix} \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}.$$

Ou encore

$$[\tilde{T} \quad K_1] \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = R_1 \quad (10)$$

Donc sous l'Hypothèse 1, une solution de (10) est donnée par :

$$[\tilde{T} \quad K_1] = R_1 \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}^+ \quad (11)$$

Où  $M^+$  est une inverse généralisée de  $M^+$  vérifiant  $MM^+M$ . Ce qui donne

$$\tilde{T} = R_1 \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$K_1 = R_1 \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Egalement, sous l'Hypothèse 1 la solution générale de (7) sera donnée par

$$[P \quad Q \quad G] = \bar{I}_n \Omega_1^+ - Z_2 (I - \Omega_1 \Omega_1^+) \quad (12)$$

Où  $\Omega_1 = \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$  et  $Z_2$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

De la même façon, sous l'Hypothèse 1, la solution générale de (6) est donnée par

$$[N_0 \quad -\Psi \quad J \quad \bar{N}] = \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ - Z_1 (I - \Omega_2 \Omega_2^+) \quad (13)$$

Où  $\Omega_2 = \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \\ \Theta \end{bmatrix}$  et  $Z_1$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

Maintenant, définissons les matrices suivantes

$$\begin{aligned} \Lambda_P &= \bar{I}_n \Omega_1^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_Q = \bar{I}_n \Omega_1^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Lambda_G &= \bar{I}_n \Omega_1^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \Delta_P = (I - \Omega_1 \Omega_1^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Delta_Q &= (I - \Omega_1 \Omega_1^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_G = (I - \Omega_1 \Omega_1^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \Lambda_{N_0} &= \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_\Psi = \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_J &= \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_{\bar{N}} = \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \Delta_{N_0} &= (I - \Omega_2 \Omega_2^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_\Psi = (I - \Omega_2 \Omega_2^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Delta_J &= (I - \Omega_2 \Omega_2^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_{\bar{N}} = (I - \Omega_2 \Omega_2^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} N_0 &= \Lambda_{N_0} - Z_1 \Delta_{N_0}, \bar{N} = \Lambda_{\bar{N}} - Z_1 \Delta_{\bar{N}}, \\ \Psi &= -\Lambda_\Psi + Z_1 \Delta_\Psi, J_0 = \Lambda_{J_0} - Z_1 \Delta_{J_0}, \\ \bar{J} &= \Lambda_{\bar{J}} - Z_1 \Delta_{\bar{J}}, P = \Lambda_P - Z_2 \Delta_P, \\ \bar{G} &= \Lambda_G - Z_2 \Delta_G, Q = \Lambda_Q - Z_2 \Delta_Q \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_G &= [\Lambda_{G_0} \quad \Lambda_{\bar{G}}], \Delta_G = [\Delta_{G_0} \quad \Delta_{\bar{G}}] \\ &\text{et} \\ \Lambda_J &= [\Lambda_{J_0} \quad \Lambda_{\bar{J}}], \Delta_J = [\Delta_{J_0} \quad \Delta_{\bar{J}}] \end{aligned}$$

A partir de ces valeurs nous pouvons déduire les matrices  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  comme suit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Lambda_{\varphi_1} - Z_1 \Delta_{\varphi_1} \\ \varphi_2 &= \Lambda_{\varphi_2} - Z_2 \Delta_{\varphi_2} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_{\varphi_1} &= \Lambda_{J_0} D_2 - T D_1 + \sum_{i=1}^m u_i \Lambda_{J_i} D_2, \\ \Delta_{\varphi_1} &= \Delta_{J_0} D_2 + \sum_{i=1}^m u_i \Delta_{J_i} D_2, \\ \Lambda_{\varphi_2} &= \Lambda_Q \Phi D_1 + \Lambda_{G_0} D_2 + \sum_{i=1}^n u_i \Lambda_{G_i} D_2, \\ \Delta_{\varphi_2} &= \Delta_Q \Phi D_1 + \Delta_{G_0} D_2 + \sum_{i=1}^m u_i \Delta_{G_i} D_2. \end{aligned}$$

## B. Synthèse de l'observateur $H_\infty$

Dans cet article, nous considérons chaque entrée  $u_i(t)$  comme "une incertitude structurée" (voir [1]), donc nous pouvons récrire  $u_i(t)$  comme suit :

$$u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i \delta_i(t)$$

où  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{R}$  sont données  $\forall i = 1, \dots, m$  par

$$\alpha_i = \frac{u_{i,\min} + u_{i,\max}}{2} \text{ et } \sigma_i = \frac{u_{i,\max} - u_{i,\min}}{2}$$

avec  $\alpha_0 = 1$  et  $\sigma_0 = 0$ .

La nouvelle variable incertaine sera  $\delta_i(t) \in \bar{\Gamma} \subset \mathbb{R}^m$  où le polytope  $\bar{\Gamma}$  est défini par

$$\bar{\Gamma} := \{\delta(t) \in \mathbb{R}^m / \underbrace{\delta_{i,\min} \leq \delta_i(t) \leq \delta_{i,\max}}_{\text{pour } i=1, \dots, m}\}.$$

où :  $\delta_{i,\min} = -1$  et  $\delta_{i,\max} = +1$ .

*Remarque 3 :* Nous pouvons remarquer que la stabilité asymptotique de  $\varepsilon(t)$  est suffisante pour  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , puisque pour  $w(t) = 0$  nous avons

$$e(t) = P\varepsilon(t).$$

Le lemme suivant donne les conditions de stabilité de  $\varepsilon(t)$  pour  $w(t) = 0$ .

*Lemme 1 :* Pour  $w(t) = 0$ , la dynamique de l'erreur (8) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice  $X$  définie positive telle que

$$\left( \begin{array}{c} (N_0 + \bar{N}\bar{\alpha} + \bar{N}\bar{\sigma}\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon)^T X + \\ X(N_0 + \bar{N}\bar{\alpha} + \bar{N}\bar{\sigma}\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon) \end{array} \right) < 0 \quad (14)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_\varepsilon &= [\alpha_1 I_q \quad \dots \quad \alpha_m I_q]^T, \\ \bar{\alpha}_w &= [\alpha_1 I_p \quad \dots \quad \alpha_m I_p]^T, \\ \bar{\sigma}_\varepsilon &= \text{bdiag} [\sigma_1 I_q \quad \dots \quad \sigma_m I_q], \\ \bar{D}_2 &= \text{bdiag} [\sigma_1 D_2 \quad \dots \quad \sigma_m D_2], \\ \Delta_\varepsilon(\delta) &= \text{bdiag}([\delta_1 I_q \quad \dots \quad \delta_m I_q]), \\ \Delta_w(\delta) &= \text{bdiag}([\delta_1 I_{n_w} \quad \dots \quad \delta_m I_{n_w}]), \\ \bar{H}_\varepsilon &= [I_q \quad \dots \quad I_q]^T \\ \bar{H}_w &= [I_{n_w} \quad \dots \quad I_{n_w}]^T \end{aligned}$$

*Preuve 1 :* Pour  $w(t) = 0$ , l'équation (8) devient :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \sum_{i=1}^m u_i N_i) \varepsilon(t) \\ e(t) = P\varepsilon(t) \end{cases} \quad (15)$$

Par la substitution de  $u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i \delta_i(t)$  dans (15) nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \sigma_i \delta_i(t)) N_i) \varepsilon(t) \\ e(t) = P\varepsilon(t) \end{cases}$$

Ce que nous pouvons réécrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \bar{N}\bar{\alpha}_\varepsilon + \bar{N}\bar{\sigma}_\varepsilon \Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon) \varepsilon(t) \\ e(t) = P\varepsilon(t) \end{cases} \quad (16)$$

Soit la fonction de Lyapunov candidate  $V(t) = \varepsilon^T(t)X\varepsilon(t)$ , sa dérivée  $\dot{V}(t)$  le long de la solution de (16) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (N_0 + \bar{N}\bar{\alpha}_\varepsilon + \bar{N}\bar{\sigma}_\varepsilon \Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon)^T X \\ &\quad + X(N_0 + \bar{N}\bar{\alpha}_\varepsilon + \bar{N}\bar{\sigma}_\varepsilon \Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon) \end{aligned}$$

si (14) est satisfaite,  $\dot{V}(t) < 0$ , et la stabilité de  $\varepsilon(t)$  est garantie, ce qui prouve le Lemme 1.

Maintenant, soit  $w(t) \neq 0$ , donc nous avons :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \sum_{i=1}^m u_i N_i) \varepsilon(t) \\ \quad + (J_0 D_2 - T D_1 + \sum_{i=1}^m u_i J_i D_2) w(t) \\ e(t) = P\varepsilon(t) \\ \quad + (Q\Phi D_1 + G_0 D_2 + \sum_{i=1}^m u_i G_i D_2) w(t) \end{cases} \quad (17)$$

En substituant  $u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i \delta_i(t)$  dans (17), nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \sigma_i \delta_i(t)) N_i) \varepsilon(t) \\ \quad + (J_0 D_2 - T D_1) w(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \sigma_i \delta_i(t)) J_i D_2 w(t) \\ e(t) = P\varepsilon(t) + (Q\Phi D_1 + G_0 D_2) w(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \sigma_i \delta_i(t)) G_i D_2 w(t) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (N_0 + \bar{N}\bar{\alpha}_\varepsilon + \bar{N}\bar{\sigma}_\varepsilon \Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon) \varepsilon(t) \\ \quad + (J_0 D_2 + \bar{J}\bar{\alpha}_w D_2 - T D_1 - \Psi\Phi D_1) w(t) \\ \quad + \bar{J}\bar{D}_2 \Delta_w(\delta)\bar{H}_w w(t) \\ e(t) = P\varepsilon(t) + (Q\Phi D_1 + G_0 D_2 + \bar{G}\bar{\alpha}_w D_2) w(t) \\ \quad + \bar{G}\bar{D}_2 \Delta_w(\delta)\bar{H}_w w(t) \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = [(\Lambda_{N_0} + \Lambda_{\bar{N}}\bar{\alpha}_\varepsilon) - Z_1(\Delta_{N_0} + \Delta_{\bar{N}}\bar{\alpha}_\varepsilon)]\varepsilon(t) \\ \quad + [(\Lambda_{\bar{N}}\bar{\sigma}_\varepsilon - Z_1\Delta_{\bar{N}}\bar{\sigma}_\varepsilon)\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon]\varepsilon(t) \\ \quad + (\Lambda_{J_0} D_2 - T D_1 + \Lambda_\Psi\Phi D_1 + \Lambda_{\bar{J}}\bar{\alpha}_w D_2) w(t) \\ \quad - Z_1(\Delta_{J_0} D_2 + \Delta_\Psi\Phi D_1 + \Delta_{\bar{J}}\bar{\alpha}_w D_2) w(t) \\ \quad + [(\Lambda_{\bar{J}}\bar{D}_2 - Z_1\Delta_{\bar{J}}\bar{D}_2)\Delta_w(\delta)\bar{H}_w] w(t) \\ e(t) = (\Lambda_P - Z_2\Delta_P)\varepsilon(t) \\ \quad + (\Lambda_{G_0} D_2 + \Lambda_{\bar{G}}\bar{\alpha}_w D_2 + \Lambda_Q\Phi D_1) w(t) \\ \quad - Z_2(\Delta_{G_0} D_2 + \Delta_Q\Phi D_1 + \Delta_{\bar{G}}\bar{\alpha}_w D_2) w(t) \\ \quad + [(\Lambda_{\bar{G}}\bar{D}_2 - Z_2\Delta_{\bar{G}}\bar{D}_2)\Delta_w(\delta)\bar{H}_w] w(t) \end{cases}$$

Donc, nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = (\mathbb{A} - Z_1\mathbb{C})\varepsilon(t) + ((\tilde{\mathbb{A}} - Z_1\tilde{\mathbb{C}})\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon)\varepsilon(t) \\ \quad + (\mathbb{B} - Z_1\mathbb{G})w(t) + ((\tilde{\mathbb{B}} - Z_1\tilde{\mathbb{G}})\Delta_w(\delta)\bar{H}_w)w(t) \\ e(t) = (\Lambda_P - Z_2\Delta_P)\varepsilon(t) + ((\tilde{\mathbb{F}} - Z_2\tilde{\mathbb{H}})\Delta_w(\delta)\bar{H}_w)w(t) \\ \quad + (\mathbb{F} - Z_2\mathbb{H})w(t) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \Lambda_{N_0} + \Lambda_{\bar{N}}\bar{\alpha}_\varepsilon, \\ \mathbb{C} &= \Delta_{N_0} + \Delta_{\bar{N}}\bar{\alpha}_\varepsilon, \tilde{\mathbb{A}} = \Lambda_{\bar{N}}\bar{\sigma}_\varepsilon, \tilde{\mathbb{C}} = \Delta_{\bar{N}}\bar{\sigma}_\varepsilon, \\ \mathbb{B} &= \Lambda_{J_0} D_2 - T D_1 + \Lambda_{\bar{J}}\bar{\alpha}_w D_2 + \Lambda_\Psi\Phi D_1, \\ \mathbb{G} &= \Delta_{J_0} D_2 + \Delta_\Psi\Phi D_1 + \Delta_{\bar{J}}\bar{\alpha}_w D_2, \tilde{\mathbb{B}} = \Lambda_{\bar{J}}\bar{D}_2, \tilde{\mathbb{G}} = \Delta_{\bar{J}}\bar{D}_2, \\ \mathbb{F} &= \Lambda_{G_0} D_2 + \Lambda_{\bar{G}}\bar{\alpha}_w D_2 + \Lambda_Q\Phi D_1, \tilde{\mathbb{F}} = \Lambda_{\bar{G}}\bar{D}_2, \\ \mathbb{H} &= \Delta_{G_0} D_2 + \Delta_Q\Phi D_1 + \Delta_{\bar{G}}\bar{\alpha}_w D_2, \tilde{\mathbb{H}} = \Delta_{\bar{G}}\bar{D}_2 \end{aligned}$$

Finalement nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= (\mathbb{A} - Z_1\mathbb{C})\varepsilon(t) + ([\mathbb{B} \quad \tilde{\mathbb{A}} \quad \tilde{\mathbb{B}}] \\ &\quad - Z_1[\mathbb{G} \quad \tilde{\mathbb{C}} \quad \tilde{\mathbb{G}}]) \begin{pmatrix} w \\ p_\varepsilon \\ p_w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ q_\varepsilon \\ q_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_P - Z_2\Delta_P \\ \bar{H}_\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon(t) \quad (18)$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbb{F} - Z_2\mathbb{H} & 0 & \tilde{\mathbb{F}} - Z_2\tilde{\mathbb{H}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{H}_w & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ p_\varepsilon \\ p_w \end{bmatrix} \quad (19)$$

où

$$\begin{bmatrix} p_\varepsilon \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_\varepsilon(\delta) & 0 \\ 0 & \Delta_w(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\varepsilon \\ q_w \end{bmatrix} \quad (20)$$

La synthèse de l'observateur peut être obtenue à partir du théorème suivant .

*Théorème 1 :* Sous l'Hypothèse 1, il existe un observateur de la forme (2) tel que l'erreur  $e(t)$  donnée par (8) est asymptotiquement stable pour  $w(t) \neq 0$  et qui satisfait  $\|e(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$  s'il existe des matrices symétriques et définies positives  $X, S_\varepsilon, S_w$  et une matrice  $Y_1$  et un scalaire  $\gamma$  tels que la LMI suivante soit satisfaite

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}^T X - \mathbb{C}^T Y_1 + X \mathbb{A} - Y_1^T \mathbb{C} & * & * \\ \mathbb{B}^T X - \mathbb{G}^T Y_1 & -\gamma^2 I & * \\ \tilde{\mathbb{A}}^T X - \tilde{\mathbb{C}}^T Y_1 & 0 & -S_\varepsilon \\ \tilde{\mathbb{B}}^T X - \tilde{\mathbb{G}}^T Y_1 & 0 & 0 \\ \Lambda_P - Z_2 \Delta_P & \mathbb{F} - Z_2 \mathbb{H} & 0 \\ S_\varepsilon \tilde{H}_\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & S_w \tilde{H}_w & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -S_w & * & * \\ \tilde{\mathbb{F}} - Z_2 \tilde{\mathbb{H}} & -I & * \\ 0 & 0 & -S_\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & -S_w \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

avec

$$\begin{aligned} S_\varepsilon &= B \text{diag}(\mu_{1,\varepsilon} I, \dots, \mu_{m,\varepsilon} I) > 0, \\ S_w &= B \text{diag}(\mu_{1,w} I, \dots, \mu_{m,w} I) > 0, \\ Y_1 &= Z_1^T X. \end{aligned}$$

Où,  $\mu_{i,\varepsilon}$  et  $\mu_{i,w}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont des scalaires positifs, ' $*$ ' : est le transposé de la partie triangulaire inférieure de la matrice.

*Preuve 2 :* Tout d'abord , définissons les matrices suivantes :

$$A_e = \mathbb{A} - Z_1 \mathbb{C}, B_e = \mathbb{B} - Z_1 \mathbb{G} \quad (22)$$

$$H_1 = [ \tilde{\mathbb{A}} - Z_1 \tilde{\mathbb{C}} \quad \tilde{\mathbb{B}} - Z_1 \tilde{\mathbb{G}} ], C_e = \Lambda_p - Z_2 \Delta_p \quad (23)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} \tilde{H}_\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{H}_w \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

$$D_e = \mathbb{F} - Z_2 \mathbb{H}, H_2 = [ 0 \quad \tilde{\mathbb{F}} - Z_2 \tilde{\mathbb{H}} ] \quad (25)$$

$$p = \begin{bmatrix} p_\varepsilon \\ p_w \end{bmatrix}, \hat{e}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ p_\varepsilon \\ q_w \end{bmatrix} \quad (26)$$

Considérons le système (19-20) comme une inclusion différentielle linéaire de norme bornée , ce dernier peut être réécrit comme suit :

$$\dot{\hat{e}}(t) = A_e \varepsilon(t) + \begin{bmatrix} B_e & H_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ p \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{e}(t) = \begin{bmatrix} C_e \\ E_1 \end{bmatrix} \varepsilon(t) + \begin{bmatrix} D_e & H_2 \\ E_2 & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ p \end{bmatrix}$$

Nous pouvons introduire le système auxiliaire suivant (voir [11])

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}(t) = A_e \varepsilon(t) + \begin{bmatrix} \gamma^{-1} B_e & H_1 S^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ p \end{pmatrix} \\ \hat{e}(t) = \begin{bmatrix} C_e \\ S^{\frac{1}{2}} E_1 \end{bmatrix} \varepsilon(t) + \begin{bmatrix} \gamma^{-1} D_e & H_2 S^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma^{-1} S^{\frac{1}{2}} E_2 & S^{\frac{1}{2}} E_3 S^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ p \end{bmatrix} \end{cases} \quad (27)$$

$$\text{où } S = \begin{bmatrix} S_\varepsilon & 0 \\ 0 & S_w \end{bmatrix}.$$

En utilisant le lemme borné réel (voir [1], [9], [11]), le système (27) est exponentiellement convergent pour  $w(t) \neq 0$  c-à-d  $\|e(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$  s'il existe deux matrices  $X, S$ , symétriques et définies positives  $X, S$ , et un scalaire  $\gamma$  tels que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} A_e^T X + X A_e + C_e^T C_e + E_1^T S E_1 \\ \gamma^{-1} B_e^T X + \gamma^{-1} D_e^T C_e + \gamma^{-1} E_2^T S E_1 \\ S^{-\frac{1}{2}} H_1^T + S^{-\frac{1}{2}} H_2^T C_e + S^{-\frac{1}{2}} E_3^T S E_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1} X B_e + \gamma^{-1} C_e^T D_e + \gamma^{-1} E_1^T S E_2 \\ \gamma^{-2} D_e^T D_e + \gamma^{-2} E_2^T S E_2 \\ S^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-1} H_2^T D_e + \gamma^{-1} S^{-\frac{1}{2}} E_3^T S E_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} X H_1 S^{-\frac{1}{2}} + C_e^T H_2 S^{-\frac{1}{2}} + E_1^T S E_3 S^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma^{-1} D_e^T H_2 S^{-\frac{1}{2}} + \gamma^{-1} S^{-\frac{1}{2}} E_2 S E_3 S^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma^{-1} H_2^T H_2 S^{-\frac{1}{2}} + S^{-\frac{1}{2}} + S^{-\frac{1}{2}} E_3^T S E_3 S^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

En multipliant cette inégalité à gauche et à droite par

$$b \text{diag}(I, \gamma I, S^{\frac{1}{2}})$$

et après l'application du complément de Schur nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} A_e^T X + X A_e & X B_e & X H_1 & C_e^T & E_1^T S \\ B_e^T X & -\gamma^2 I & 0 & D_e^T & E_2^T S \\ H_1^T X & 0 & -S & H_2^T & E_3 S \\ C_e & D_e & H_2 & -I & 0 \\ S E_1 & S E_2 & S E_3 & 0 & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

En substituant les matrices  $A_e, B_e, H_1, C_e, E_1, D_e, H_2, E_2, E_3$  par leurs valeurs, et en faisant le changement de variable  $Y_1 = Z_1^T X$ , nous obtenons l'inégalité matricielle LMI (21) Cela prouve le Théorème 1.

#### IV. EXEMPLE NUMÉRIQUE

Considérons le système singulier bilinéaire (1) avec les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} 3 \sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que l'Hypothèse 1 est vérifié.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi nous avons} \\ \Phi &= [0 \quad 0 \quad 1], \bar{E} = [E \quad 0_{3 \times 6}], \\ \bar{A} &= [A_0 \quad A_1 \quad A_2], \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'observateur d'ordre réduit est obtenu pour  $q = 1$ , soit  $R_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . En utilisant les résultats de cet article les gains de l'observateur sont :

$$\begin{aligned} N0 &= 1.2927 \times 10^{13}, N1 = 0.1371, N2 = -0.099, \\ J0 &= 10^{12} [-7.7 \ 8.17 \ -0.475], \\ J1 &= [-0.75 \ 1.186 \ -0.586], H = [0.584 \ -0.0486] \\ J2 &= [0.221 \ 1.8054 \ -0.0516], P = 10^{-14} \begin{bmatrix} 0.007 \\ 0.011 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \\ Q &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.11 \end{bmatrix}, G0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -0.324 & 0.324 & 0.2432 \end{bmatrix}, \\ G1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.11 \end{bmatrix}, G2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les figures 2 et 3 montrent la performance de l'observateur présenté dans cet article avec les conditions initiales

suivantes :  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\zeta(0) = -5$

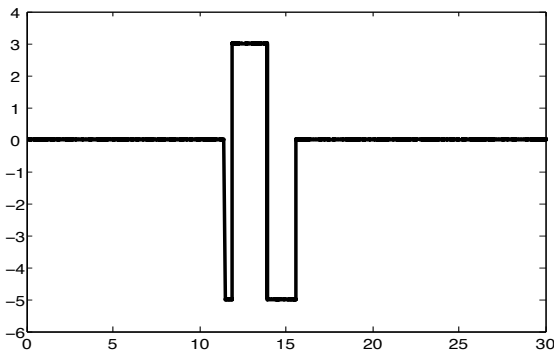


Fig. 1. La perturbation

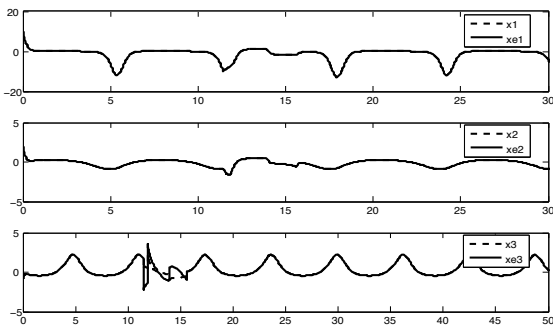


Fig. 2. Les états et leurs estimés

## V. CONCLUSION

Dans cet article nous avons proposé une nouvelle méthode de synthèse d'un observateur  $H_\infty$  pour une classe de systèmes singuliers bilinéaires. L'approche proposée unifie la synthèse d'observateurs d'ordre réduit, d'ordre plein et d'ordre minimal. La méthode est fondée sur le

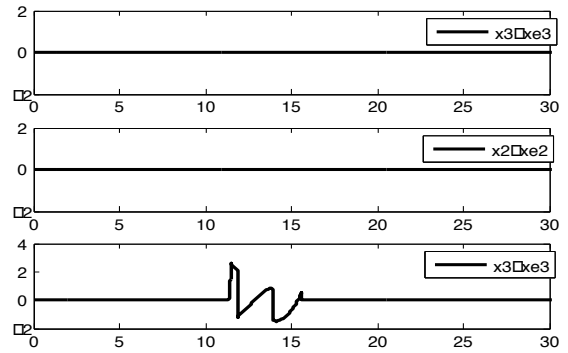


Fig. 3. Les erreurs d'estimation

paramétrage des résolution des contraintes sous forme d'équations de Sylvester et du lemme borné réel. La solution finale est obtenue sous une formulation LMI.

## RÉFÉRENCES

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron and V. Balakrishnan, "Linear matrix inequality in systems and control theory". Philadelphia, PA : SIAM. 1994
- [2] M. Boutayeb, M. Darouach, H. Rafaralahy, "Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communication" IEEE Trans.Circuits and Systems I., vol.49, pp.345-349, 2002.
- [3] S.L. Campbell , "Singular systems of differential equations", Vol.I and vol.II : Pitman, 1980, 1982.
- [4] L. Dai, "Singular control systems", New York : Springer-Verlag, 1989.
- [5] M. Darouach and M. Zasadzinski, "Data reconciliation in generalized linear dynamic systems ", AICHE journal, vol.37, Issue 2, pp.193-201, 1991.
- [6] M. Darouach, M. Zasadzinski, O.A. Bassong, and S. Nowakowski, "Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems ". International Journal of Systems Science. , vol 46, no 10, pp. 2015-2028, 1995.
- [7] M. Darouach, M. Zasadzinski and M. Hayar, "Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs", IEEE Trans.Autom.Contr , vol 41, n0 7, pp 1068-1072, 1996.
- [8] M. Darouach and L. Boutat-Baddas, "Observers for a class of nonlinear singular systems ", IEEE Trans.Automat.Contr., vol.53, pp. 2627-2633, 2008.
- [9] M. Fu, C. E. de Souza and L. Xie, "  $H_\infty$  estimation for uncertain systems". Internatinal Journal of Robust and Nonlinear Control, 2, 87-105, 1992.
- [10] D.J. Luenberger, "Nonlinear descriptor systems". Journal of Economics Dynamics and Control, vol 1, pp.219-242, 1979.
- [11] H. Li and M. Fu, "A linear matrix inequality approach to robust  $H_\infty$  filtering". IEEE Transactions on Signal Processing, 45, 2338-2350,1997.
- [12] H. Souley Ali, M. Zasadzinski, H. Rafaralahy and M. Darouach, " Robust  $H_\infty$  reduced order filtering for bilinear systems" Automatica, vol.42, pp.405-415, 2006.