

Analyse Robuste des Systèmes Dynamiques Non Linéaires : Combinaison des Théories de la Variété Centrale et du Chaos Polynomial

Lyes Nechak¹, Sébastien Berger¹, Evelyne Aubry¹

¹Laboratoire de Modélisation Intelligence Processus Système (MIPS)
EA 2332

12, Rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse, France.

lyes.nechak@uha.fr, sebastien.berger@uha.fr, evelyne.aubry@uha.fr

Résumé— On propose dans ce papier une nouvelle méthodologie pour analyser le comportement dynamique des systèmes non linéaires incertains. Elle consiste en la combinaison de la méthode de la variété centrale avec celle du chaos polynomial. La première est connue pour être un outil puissant pour la réduction des modèles des systèmes dynamiques non linéaires au voisinage du point de bifurcation de Hopf tandis que la seconde constitue un outil efficace pour la propagation de l'incertitude. Ainsi, le couplage des deux méthodes peut être exploité pour surmonter les difficultés occasionnées par la complexité des systèmes dynamiques non linéaires et le coût de la propagation d'incertitude laquelle est souvent réalisée par la méthode prohibitive de Monte Carlo. La praticabilité et l'efficacité de la méthodologie proposée sont étudiées et testées sur un modèle à deux degrés de liberté représentant un système de freinage à tambour, sujet à un état initial incertain.

Mots-clés— Systèmes dynamiques non linéaires, réduction de modèles, variété centrale, propagation d'incertitude, chaos polynomial, analyse robuste

I. INTRODUCTION

La propagation d'incertitude joue un rôle central dans l'analyse et la conception robustes des systèmes dynamiques. Elle englobe un certain nombre de techniques mises en œuvre pour mesurer l'influence de différents types d'incertitudes (paramètres de conception, conditions initiales, entrées) sur les états et les sorties d'un processus ou pour prendre en considération les incertitudes dans la conception de processus et de systèmes de commande. Plusieurs théories traitant de cette thématique existent en littérature telles que l'approche probabiliste [22-23], [4], l'analyse par la logique floue [24] et l'approche par la théorie des intervalles [25].

Dans l'approche probabiliste, la méthode de Monte Carlo (MC) est la plus utilisée. Cette méthode peut déterminer la fonction de densité de probabilité de n'importe quelle variable mais elle est coûteuse puisque elle nécessite beaucoup de tirages pour avoir une précision raisonnable. Le chaos polynomial est introduit en littérature comme un outil probabiliste plus efficace [9]. Il consiste en la possibilité de développer un processus stochastique en série de polynômes orthogonaux, fonctions de variables stochastiques indépendantes. La convergence dans le sens des moindres carrés d'un tel développement a été démontrée pour les processus Gaussiens [2] et a été généralisée à différents type

de distributions par Xiu et Karniadakis [7]. L'analyse moderne utilisant le chaos polynomial a commencé avec les travaux de Ghanem et Spanos dans le domaine de la mécanique des structures dont les paramètres sont incertains [4]. Depuis, beaucoup d'applications sont apparues telles que la résolution des équations aux dérivées partielles et les équations différentielles incertaines [6-7] et [12], la synthèse des observateurs et de lois de commande [10], [15] et [3]. Le chaos polynomial offre un cadre mathématique permettant de séparer les composantes stochastiques d'une réponse aléatoire de ces composantes déterministes. Des techniques intrusives [4], [1] et non intrusives [14] sont employées pour calculer les composantes déterministes appelées modes stochastiques alors que les composantes stochastiques sont concentrées dans la base polynomiale utilisée. Les procédures intrusives sont avérées moins avantageuses pour traiter des systèmes dynamiques stochastiques puisqu'elles nécessitent la modification des modèles contrairement aux techniques non intrusives qui requièrent uniquement des simulations en des points particuliers.

L'analyse des systèmes dynamiques incertains en utilisant les méthodes de Monte Carlo ou celles du chaos polynomial non intrusif, exige donc des simulations déterministes. Ces simulations sont basées sur des procédures d'intégrations numériques très coûteuses et par fois non pratiques lorsqu'il s'agit de systèmes non linéaires à grand nombre de degrés de liberté. La théorie de la réduction de modèles propose des solutions qui consistent en des méthodologies permettant d'approximer des modèles complexes par d'autres plus simples en gardant les mêmes comportements dynamiques et les plus importantes propriétés des modèles originaux. La méthode de troncation à base de réalisation équilibrée [16-17], la méthode de décomposition propre orthogonale [18] et la méthode des perturbations singulières [19] sont des exemples bien connus. La méthode de la variété centrale est une autre procédure introduite en littérature comme étant un outil efficace permettant de simplifier des modèles complexes au voisinage du point de bifurcation de Hopf [20], [5], [11-12].

L'originalité de ce papier réside dans la nouvelle méthodologie proposée pour réaliser une analyse robuste plus simple des systèmes dynamiques incertains. Le principe de cette méthodologie est de combiner la méthode de la variété

centrale avec celle du chaos polynomial. L'idée principale est de pouvoir propager l'incertitude sur le modèle réduit obtenu avec la méthode de la variété centrale au lieu du modèle original, en utilisant le chaos polynomial qui est moins couteux qu'un procédé de Monte Carlo. L'objectif de ce papier est d'illustrer la praticabilité de la méthode proposée à travers son application à un système physique, non linéaire, frottant et incertain. Les principes de la méthode de la variété centrale sont rappelés dans la section II tandis que la section III est consacrée à la présentation du chaos polynomial. La combinaison des deux méthodes est examinée, dans la section IV, sur un modèle à deux degrés de liberté décrivant un système de freinage à tambour. Des conclusions et des perspectives sont données pour finir.

II. VARIETE CENTRALE

Considérons un système non linéaire, représenté sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mu) \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre de contrôle et f un champ de vecteur continûment différentiable. Pour plus de simplicité, le temps sera omis dans les équations.

Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système (1).

Seules des non linéarités polynomiales sont considérées dans ce papier. Ceci n'est pas restrictif dans la mesure où toute fonction non linéaire peut être approximée par une fonction polynomiale en utilisant un développement en séries de Taylor.

La méthode de la variété centrale exploite le fait qu'au voisinage de l'équilibre et du point de bifurcation de Hopf, les caractéristiques essentielles d'un système dynamique non linéaire sont gouvernées par sa variété centrale engendrée par la dynamique des pôles imaginaires purs [11].

Le système (1) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(x, \mu) \quad (2)$$

où $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, F est un vecteur de fonctions non linéaires polynomiales.

Au point de bifurcation de Hopf μ_0 , le système (2) peut être mis sous une forme canonique (3) par une transformation linéaire de base définie par :

$$x = T \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Où, $T = [T_1, \dots, T_{n_c}, T_{n_c+1}, \dots, T_n]$ avec T_1, \dots, T_{n_c} et T_{n_c+1}, \dots, T_n respectivement les vecteurs propres associés aux n_c valeurs propres $(\lambda_{i(i=1, \dots, n_c)})$ imaginaires pures de $A(\mu_0)$ et aux $(n - n_c)$ valeurs propres $(\lambda_{i(i=n_c+1, \dots, n)})$ de $A(\mu_0)$, ayant des parties réelles négatives.

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c(\mu_0)y + F_c(y, z, \mu_0) \\ \dot{z} = A_s(\mu_0)z + F_s(y, z, \mu_0) \end{cases} \quad (3)$$

où $y \in \mathbb{R}^{n_c}$, $z \in \mathbb{R}^{n_s}$ tel que $n_c + n_s = n$,

$$A_c = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n_c} \end{bmatrix}, A_s = \begin{bmatrix} \lambda_{n_c+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} F_c(y, z, \mu_0) \\ F_s(y, z, \mu_0) \end{bmatrix} = T^{-1}F\left(T \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \mu_0\right)$$

sachant que $F_c(y, z, \mu_0), F_s(y, z, \mu_0)$ sont des vecteurs de fonctions polynomiales d'ordre supérieur à un vérifiant : $F_c(0, 0, \mu_0) = 0$, $F_s(0, 0, \mu_0) = 0$. De plus les matrices jacobiniennes $D_{(y,z)}F_c(0, 0, \mu_0)$ et $D_{(y,z)}F_s(0, 0, \mu_0)$ sont nulles.

Au voisinage du point de bifurcation de Hopf, le système (2) peut être exprimé par la dynamique augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c(\tilde{\mu})y + F_c(y, z, \tilde{\mu}) \\ \dot{z} = A_s(\mu)z + F_s(y, z, \tilde{\mu}) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

où $\tilde{\mu} = \mu_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$

Théorème 1 : Il existe une variété centrale locale de la forme :

$$W_{loc}^c = \{(y, \tilde{\mu}, z) / z = h(y, \tilde{\mu}), \|y\| < \delta, \|\tilde{\mu}\| < \delta'\} \quad (5)$$

avec $h(0, 0) = 0, D_{(y, \tilde{\mu})}h(0, 0) = 0$

et dans laquelle le système (4) peut être exprimé par la dynamique réduite suivante :

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c(\tilde{\mu})y + F_c(y, h(y, \tilde{\mu}), \tilde{\mu}) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Si la fonction h est polynomiale avec un degré fixé au préalable (sans constante et sans termes linéaires pour qu'elle vérifie les conditions du théorème précédent) alors elle est solution de l'équation suivante :

$$\dot{z} = D_{(y, \tilde{\mu})} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\tilde{\mu}} \end{bmatrix}$$

Autrement dit, la fonction polynomiale h est solutions de l'équation algébrique (7) donnée ci-après.

$$\begin{aligned} & \left(D_{(y, \tilde{\mu})} h \right) \cdot \left(A_c(\tilde{\mu}) \cdot y + F_c(y, h(y, \tilde{\mu}), \tilde{\mu}) \right) = \\ & A_s(\tilde{\mu}) h(y, \tilde{\mu}) + F_s(y, h(y, \tilde{\mu}), \tilde{\mu}) \end{aligned} \quad (7)$$

III. CHAOS POLYNOMIAL

Soit (Ω, β, \bar{P}) un espace probabilisé où Ω désigne l'univers des résultats correspondant à l'événement aléatoire ω , β est une sigma-algèbre sur Ω et $\bar{P}: (\Omega, \beta) \rightarrow [0, 1]$, la mesure de la probabilité de l'occurrence de l'événement ω .

L'espace probabilisé est discrétisé en le caractérisant par un ensemble fini de variables aléatoires indépendantes $\{\xi_i\}_{(i=1, \dots, d)}$.

Une variable aléatoire $x(\omega)$ du second ordre (de variance finie) peut être développée en série de fonctions polynomiales orthogonales de la façon suivantes :

$$x(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{x}_j \phi_j(\xi(\omega)) \quad (8)$$

où \bar{x}_j sont appelés modes stochastiques et représentent les coordonnées de la variable aléatoire $x(\omega)$ dans la base du chaos formée par les polynômes ϕ_j satisfaisant la relation d'orthogonalité suivante :

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) W(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \langle \phi_i^2 \rangle & i = j \end{cases} \quad (9)$$

où $W(\xi)$ représente la densité jointe associée au vecteur ξ et $\langle \cdot \rangle$ désigne le produit interne.

En pratique le développement (8) est tronqué à un ordre P qui dépend du degré maximal r fixé pour les polynômes et de la dimension stochastique d qui représente en fait le nombre de paramètres incertains intervenant dans le problème traité. D'où :

$$x(\omega) \approx \sum_{j=0}^P \bar{x}_j \phi_j(\xi(\omega)) \quad (10)$$

avec
$$P = \frac{(d+r)!}{d!r!} - 1$$

Le calcul du développement tronqué (10) se ramène au problème de détermination des modes stochastiques \bar{x}_j . Deux approches de calcul sont possibles dans cette perspective. L'approche non intrusive inclut certaines techniques utilisant des simulations du système stochastique étudié en des points particuliers. Son principal avantage est de ne pas nécessiter de modifications du modèle contrairement à l'approche intrusive. Celle-ci opère des techniques de projection de Galerkin sur le modèle à partir duquel un système d'équations déterministes couplées est généré. Cette opération est pénible dès lors qu'on traite des systèmes non linéaires à grand nombre de degrés de liberté. Dans ce papier, seules les techniques non intrusives sont considérées. Pour les illustrer considérons le cas où le système (1) est incertain et que l'incertitude provient de la condition initiale $x_1(0)$ qui suit une loi de distribution

uniforme. Les polynômes de Legendre sont les plus appropriés à traiter ce type de distribution [7]. Comme les conditions initiales sont incertaines, les variables d'état $x_i(t)$ du système (1) deviennent elles aussi aléatoires $x_i(t, \xi)$ et peuvent alors être développées en séries des polynômes de Legendre $L_j(\xi)$ orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$. ξ est la nouvelle variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[-1, 1]$.

$$x_i(t, \xi) \approx \sum_{j=0}^P \bar{x}_{i,j}(t) L_j(\xi), \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

A. Technique de projections spectrale

La technique de projection spectrale utilise le produit interne entre les variables d'état $x_i(t, \xi)$ et les polynômes $L_j(\xi)$ puis exploite la propriété d'orthogonalité de ces derniers pour exprimer les modes stochastiques $\bar{x}_{i,j}(t)$ comme suit :

$$\bar{x}_{i,j}(t) = \frac{1}{\langle L_j^2(\xi) \rangle} \int_{-1}^1 x_i(t, \xi) L_j(\xi) W(\xi) d\xi \quad (12)$$

Des techniques numériques sont utilisées pour approximer l'intégrale (12) telle que la méthode de Monte Carlo. Dans ce papier la technique de collocation de Gauss est utilisée [14]. Le calcul devient naturellement fastidieux lorsque le nombre d'incertitude est important.

B. Technique de régression

La méthode de régression consiste à calculer les modes stochastiques de telle sorte à minimiser le critère des moindres carrés suivant :

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^q \left[x_i(t, \xi^{(k)}) - \sum_{j=0}^P \bar{x}_{i,j}(t) \phi_j(\xi^{(k)}) \right]^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

sachant que q est le nombre de points de simulation tel que $P+1 < q$. Les points de simulation considérés dans ce papier sont les zéros d'un polynôme de Legendre d'un ordre suffisamment élevé.

C. Caractéristique statistique

Une fois les modes stochastiques obtenus, ils sont exploités pour déterminer les statistiques du comportement dynamiques du système incertain étudié. Les moments d'ordre un et deux (valeur moyenne et variance) sont donnés par :

$$\begin{cases} x_i^{mean}(t) = \bar{x}_{i,0}(t) \\ \sigma_i^2(t) = \sum_{j=0}^P (\bar{x}_{i,j}(t))^2 \langle L_j^2(\xi) \rangle - (\bar{x}_{i,0}(t))^2 \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (14)$$

IV. APPLICATION

L'objectif est de montrer que la combinaison de la méthode de la variété centrale avec celle du chaos polynomial peut

être un outil efficace pour simplifier des problèmes de propagation d'incertitude. Dans ce but, le problème d'estimation des statistiques à court terme (valeur moyenne et écart type) d'un système dynamique non linéaire sujet à un état initial incertain est considéré. Ce système est un modèle à deux degrés de liberté décrivant un mécanisme de freinage à tambour (Fig.1). Après une brève description du système, la méthode de la variété centrale est appliquée pour obtenir un modèle réduit du second ordre sur lequel les techniques non intrusives sont appliquées pour déterminer les statistiques du modèle original.

A. Description du système

Le modèle représenté dans Fig.1 se compose d'une masse tenue contre une bande mobile ; le contact entre la masse et la bande est modélisé par deux plaques soutenues par deux raideurs cubiques différentes. Pour plus de simplicité, les surfaces de la masse et de bande sont supposées toujours en contact, voir pour plus de détail l'étude d' Hultén [13] et celle de Sinou [21].

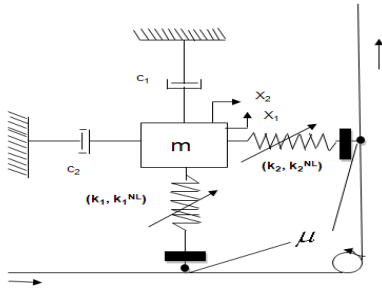


Fig.1 Système mécanique de freinage à tambour

La représentation du système dans l'espace d'état peut être obtenue sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A(\mu)x(t) + f_{NL}(x(t), \mu) \quad (15)$$

où $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ sachant que $x_1(t) = X_1(t)$, $x_2(t) = \dot{X}_1(t)$, $x_3(t) = X_2(t)$ et $x_4(t) = \dot{X}_2(t)$

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -\eta_1\omega_1 & \mu\omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu\omega_1^2 & 0 & -\omega_2^2 & -\eta_2\omega_2 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$f_{NL}(x(t), \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varphi_1^{NL}x_1^3(t) + \mu\varphi_2^{NL}x_3^3(t) \\ 0 \\ -\mu\varphi_1^{NL}x_1^3(t) - \varphi_2^{NL}x_3^3(t) \end{bmatrix}$$

où $\eta_i = c_i / \sqrt{mk_i}$ sont les coefficients d'amortissement relatifs, $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$ les pulsations propres du système et $\varphi_i^{NL} = k_i^{NL}/m$ avec $i = 1, 2$. Pour l'application, les valeurs numériques des paramètres physiques sont données par :

$$\omega_1 = 2\pi \times 100 \text{ rad/s}, \omega_2 = 2\pi \times 75 \text{ rad/s}, \eta_1 = \eta_2 = 0.02, \varphi_1^{NL} = \omega_1^2 \text{ et } \varphi_2^{NL} = 0.$$

B. Application de la méthode de la variété centrale

Comme mentionné dans la section 2, la méthode de la variété centrale donne un formalisme puissant permettant de réduire un système dynamique non linéaire près de l'équilibre dans un voisinage de bifurcation de Hopf. S'agissant du système (15), il est facile de remarquer que l'origine est son point équilibre. De plus, il peut être montré, par une étude paramétrique, que $\mu_0 = 0.289368$ est un point de bifurcation de Hopf pour ce même système. En ce point, l'approximation linéaire de (15) possède une paire de valeurs propres imaginaires et une autre paire de valeurs complexes aux parties réelles négatives. Pour calculer le système d'ordre réduit, l'ordre de la variété centrale est fixé à trois. La fonction h , polynôme du troisième degré, est calculée en résolvant l'équation (7) correspondant au degré fixé et au système (15). Après avoir substituer les variables stables par leur expression dans la variété centrale, un modèle du second ordre est obtenu pour $\tilde{\mu} = (1 + \varepsilon)\mu_0$ avec $\varepsilon = 10^{-4}$. Le comportement dynamique du système (15) correspondant à l'état initial $x(0) = [10^{-4} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ est illustré dans figure 2 et est comparé à celui du modèle d'ordre réduit obtenu.

Il peut être observé que le modèle d'ordre réduit présente bien le même comportement dynamique que le système original. En effet, le modèle d'ordre réduit présente comme le système original une dynamique oscillante qui s'illustre en un cycle limite. Un léger écart sur les amplitudes d'oscillation est observé. Ce même écart peut être éventuellement réduit en augmentant l'ordre de la variété centrale i.e l'ordre du polynôme h .

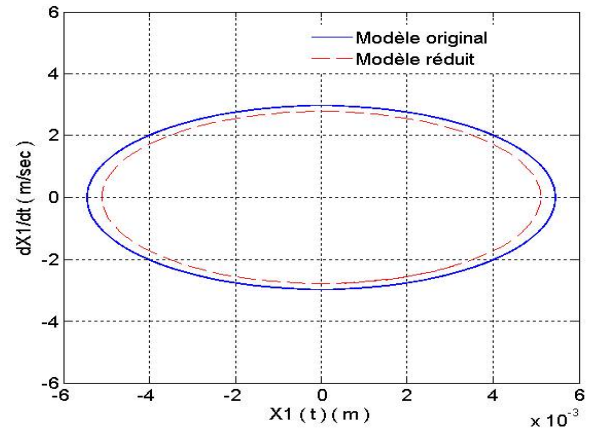


Fig.2 Trajectoire de phase au voisinage de la bifurcation de Hopf

C. Propagation de l'incertitude

Le modèle d'ordre réduit combiné avec les techniques non intrusives, va être exploité pour obtenir les statistiques dynamiques à court terme du système original (15). L'analyse des statistiques dynamiques à long terme est un problème plus compliqué dû aux limites du chaos polynomial qui l'empêche de traiter ce type de statistiques. Ce point n'est donc pas considéré dans ce papier.

Considérons le cas où l'incertitude provient du déplacement initial $x_1(0)$ qui suit une loi de distribution uniforme sur l'intervalle $[10^{-4} \ 3.10^{-4}]$.

Remarquons tout d'abord la sensibilité importante du comportement dynamique du système (15) par rapport aux petites variations des conditions initiales. Ce fait est illustré dans la figure 3 où les trajectoires de phase correspondant à trois conditions initiales différentes sont relevées.

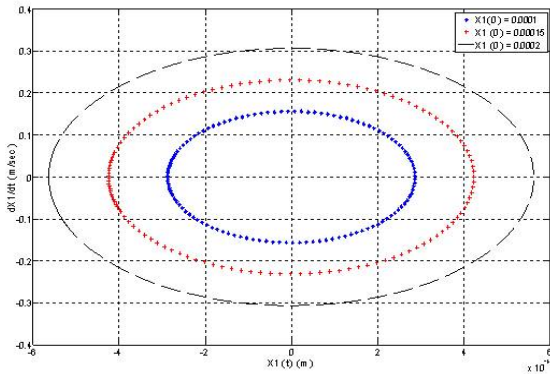


Fig.3. Trajectoires de phase pour différentes conditions initiales

Les techniques non intrusives (la régression ainsi que la projection spectrale non intrusive utilisant la collocation de Gauss) et la méthode de MC sont appliquées au modèle réduit. L'ordre du développement en polynômes de Legendre est fixé à cinq. L'influence de l'ordre du développement n'est pas traitée dans ce papier. En effet, rappelons que l'objectif de l'application est de montrer la praticabilité de la combinaison variété centrale et chaos polynomial dans le contexte de l'analyse robuste des systèmes dynamiques.

La valeur moyenne et l'écart type du déplacement $x_1(t)$ et de la vitesse correspondante sont estimés et comparés aux résultats obtenus par la méthode de MC appliquée au modèle original en utilisant 1000 échantillons. Les trajectoires de phase moyennes du système (15) estimées par les différentes méthodes sont représentées dans la figure 4. Les écarts types obtenus par ces mêmes méthodes sont illustrés dans la figure 5.

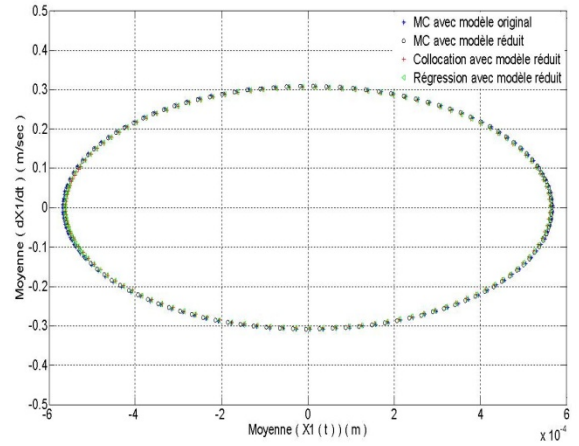


Fig.4. Trajectoire moyenne de phase

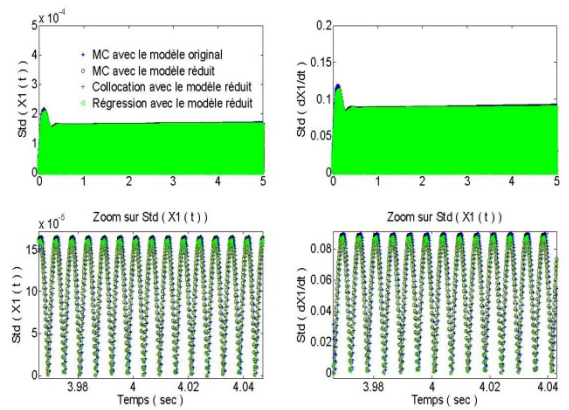


Fig.5. Ecart type instantané du déplacement et de la vitesse

En observant les figures 4 et 5, il peut être remarqué que les statistiques (les valeurs moyennes et les écarts types instantanés) du déplacement $x_1(t)$ et de la vitesse $x_2(t)$ obtenus en propageant l'incertitude dans le modèle réduit via les différentes méthodes (la projection spectrale utilisant la collocation de Gauss, la régression et la méthode de MC) approximativement convenablement les statistiques du système original, obtenues par la méthode de MC.

Le développement en polynômes de chaos peut être vu comme étant un modèle plus simple pouvant approximer un système dynamique incertain plus complexe. En effet, la réponse d'un système dynamique incertain peut être reconstruite une fois les modes stochastiques sont calculés. Cette opération ne nécessite que l'évaluation des polynômes. Aucune simulation du système n'est nécessaire. Dans le contexte de l'application développée jusqu'ici, les réponses du système original (15) correspondant à quelques conditions initiales sont reconstruites à partir du développement en polynômes de Legendre d'ordre 5 dont les modes sont calculés en utilisant le modèle d'ordre réduit. Les trajectoires de phase correspondant à $x_1(0) = 2.10^{-4}$ et à $x_1(0) = 3.10^{-4}$ sont relevées respectivement dans les figures 6 et 7.

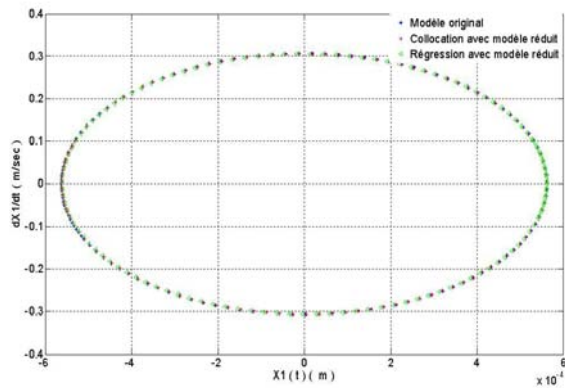


Fig.6. Trajectoires de phase correspondant à $x_1(0) = 2.10^{-4}$

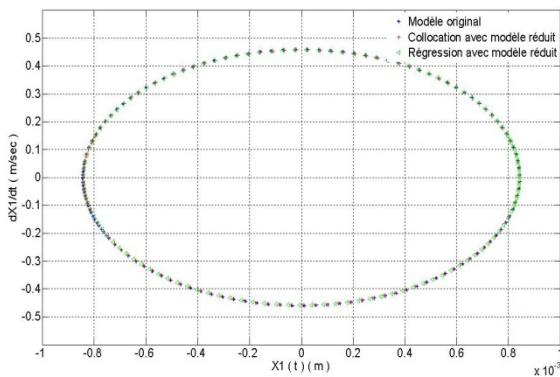


Fig.7. Trajectoires de phase correspondant à $x_1(0) = 3.10^{-4}$

V. CONCLUSION

Une nouvelle méthodologie pour traiter le problème de la propagation des incertitudes dans les systèmes dynamiques non linéaires stochastiques est proposée dans cet article. La méthode consiste en la combinaison de la théorie de la variété centrale avec celle du chaos polynomial. L'applicabilité tout comme l'efficacité de la méthode proposée, ont été vérifiées sur un système de freinage à tambour caractérisé par des conditions initiale incertaines. La méthode de la variété centrale est tout d'abord appliquée. Une variété centrale d'ordre trois est calculée puis un modèle du second ordre est généré à partir du modèle original du système de freinage. La méthode de Monte Carlo ainsi que deux techniques non intrusives (projection spectrale et régression) du chaos polynomial sont ensuite appliquées au modèle d'ordre réduit pour quantifier les statistiques à court terme du modèle original. La détermination des statistiques dynamiques à long terme est un problème plus compliqué. En effet, le chaos polynomial présente des insuffisances pour traiter des statistiques dynamiques à long terme dû à un phénomène de perte d'énergie. Celle-ci est concentrée dans les modes d'ordres les plus élevés ce qui rend l'utilisation du développement non pratique. D'autres outils, tels que les ondelettes, peuvent être considérés dans la perspective d'analyser les statistiques à long terme. Des recherches s'inscrivant dans ce contexte sont en cours de réalisation.

Sébastien Berger remercie l'agence nationale française de recherches pour son aide financière inscrite dans le cadre du programme ANR-07-JCJC-0059-01-CSD2.

REFERENCES

- [1] Babuska.R., Tempone. G., Zouraris. E. Galerkin finite element approximation of stochastic elliptic partial differential equation. *SIAM Journal of Scientific Computing*. Vol.24, n° 2, pp. 619-644, 2004.
- [2] Cameron. H., Martin. W. Orthogonal development of nonlinear functional in series of Fourier-Hermite functional. *Ann. Math.* Vol. 48, 385-392, 1947.
- [3] Hover. F., Michael. S., Triantafillou. S. *Application of Polynomial Chaos in Stability and Control*. Automatica. Vol. 42, n° 5, pp. 789-795, 2006.
- [4] Ghanem. R., Spanos. G. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer Verlag, 1991.
- [5] Nayfeh. A. H., Balachandran. B. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons.
- [6] Xiu. D., Karniadakis. G. E. Modeling Uncertainty in Flow Simulations Via Generalized Polynomial Chaos. *Journal of Computational Physics*, Vol. 187, n° 1, pp. 137-167, 2003.
- [7] Xiu. D., Karniadakis. G. E. Modeling Uncertainty in Steady State Diffusion Problems via Generalized Polynomial Chaos. *Compt. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 191, n° 43, pp. 4927-4948, 2002.
- [8] Williams. M. Polynomial Chaos Functions and Stochastic Differential Equations. *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 33, n° 7, pp. 774-785, 2006.
- [9] Wiener. N. The Homogeneous Chaos. *American Journal of Mathematics*, Vol 60, n° 4, pp. 897-936, 1938.
- [10] Smith. A. H., Monti. A., Ponci. F. Indirect Measurements Via a Polynomial Chaos Observer, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* Vol. 56, n° 3, pp. 743-752, 2007.
- [11] Sinou. J. J., Jezequel. L. Methods to Reduce Non-Linear Mechanical Systems for Instability Computation, *Arch. Comput. Meth. Engng.* Vol. 11, n°3, pp. 257-334, 2004.
- [12] Knoblock. H. W. Construction of Center Manifolds, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 70, n° 7, pp. 215-233, 1990.
- [13] Hultèn. J. Drum Break Squeal- A Self Exciting Mechanism With Constant Friction, In SAE Truck and Bus Meeting, Detroit, Mi, USA SAE paper 932965, 1995.
- [14] Crestaux. T., Le Maitre. O., Martinez. J. M. Polynomial Chaos Expansion for Sensitivity Analysis, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 94, n° 7, pp. 1161-1172, 2009.
- [15] Nagy. Z. K., Braz. R. D. Distributional Uncertainty Analysis Using Power Series and Polynomial Chaos Expansions, *Journal of Process Control*, Vol. 17, n°3, pp. 229-240, 2006.
- [16] Moore. C. B. Component Analysis in Linear System: Controllability and Observability and Model Reduction, *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol. 26, n°1, pp. 17-32, 1981.
- [17] Sherpen. J. M. A. Balancing for Non-linear Systems, *Systems and Control Letters*. Vol. 21, n°2, pp. 143-153, 1993.
- [18] Rowley. C. W. Model Reduction for Fluids. Using Balanced Proper Orthogonal Decomposition. *Int. J. Of Bifurcation and Chaos, Princeton University, USA*. Vol. 15, n°3, pp. 997-1013, 2005.
- [19] Kokotovic. P. V., Sanutti. P. Singular Perturbation Method for Reducing the Model Order in Optimal Control Design, *IEEE Trans. On Auto. Contro.* Vol. 13, n°4, pp. 377-384, 1968.
- [20] Carr. J. *Application of Center Manifold*. Springer Verlag, 1981.
- [21] Sinou. J. J., Jezequel. L. Mode Coupling Instability in Friction-Induced Vibrations and its dependency on System Parameters Including Damping. *European Journal of Mechanics A/Solid*, Vol.26, n°1, pp. 106-122, 2007.
- [22] Fishman. G. S. Monte Carlo, *Concepts, Algorithms and Applications*. Springer verlag, 1996.
- [23] Kaminski. M. Stochastic Perturbation Approach to Engineering Structure Vibration by the Finite difference Method, *Journal of sound and Vibration*, Vol.251, n°4, pp. 651-670, 2002.
- [24] Noor. A. K., Starnes. J. H. Analysis of Stiffened Composite Panels, Special Symposium Honouring the 70th birthdays of Professor Charlie Bert and Jack Vinson, Vol. 51, n° 2, pp. 139-158, 2002.
- [25] Moore. R., Lodwick. W. Interval Analysis and Fuzzy Set Theory, *Fuzzy Set and Systems*, Vol. 135, n° 1, pp. 5-9, 2003