

Modélisation de la dynamique des systèmes hydrauliques à surface libre par l’approche des systèmes hybrides

Khaled BOUKHAROUBA, Eric DUVELLA, Laurent BAKO et Stéphane LECOEUICHE

Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France

EMDouai, IA, F-59500 Douai, France

{boukharouba, duviella, bako, lecoeuiche}@ensm-douai.fr

Résumé— La modélisation des systèmes hydrauliques à surface libre sur de larges plages de fonctionnement est un problème encore largement ouvert. Ce sont des systèmes non linéaires et distribués, caractérisés en général par de grandes dimensions physiques ainsi que par des retards purs. En considérant une portion donnée d’un canal d’écoulement, nous nous intéressons spécifiquement à l’influence produite par un flux entrant à une extrémité du canal sur un flux sortant à l’autre extrémité. Dans cet article nous proposons une nouvelle approche de modélisation de cette relation dynamique, basée sur des modèles affines par morceaux. L’estimation du modèle proposé consiste à (i) résoudre un problème de classification de données dont le but est de séparer les données disponibles selon leurs sous-modèles affines respectifs, (ii) déterminer le nombre de sous-modèles nécessaires à l’obtention d’une bonne approximation du système, (iii) estimer les paramètres associés à ces sous-modèles. Enfin, un classifieur multi-classe à base de Support Vector Machines (SVM), à marge souple, est utilisé pour estimer les surfaces de changement de mode. Il permet de trouver une partition polyédrale de l’espace de régression en discriminant toutes les classes simultanément. La méthode proposée est ensuite appliquée avec succès à la modélisation de la galerie Lunax-Save située dans le sud-ouest de la France.

Mots-clés— Modélisation, Systèmes hybrides, Systèmes hydrauliques à surface libre, PWARX, classification de données, SVM.

I. INTRODUCTION

La gestion de la ressource en eau s’annonce très préoccupante pour les années futures en raison du changement climatique. La réponse aux besoins des usagers en période de sécheresse, et la lutte contre les inondations lors des événements pluviaux exceptionnels présenteront alors des défis qu’il sera nécessaire de relever. Ainsi, les techniques de l’automatique utilisées jusqu’à présent [9] devront être améliorées et d’autres développées afin de mieux comprendre et appréhender le comportement des réseaux hydrographiques, de maîtriser leur fonctionnement et d’améliorer leur gestion face à ces situations exceptionnelles. Les réseaux hydrographiques sont des systèmes à grande échelle caractérisés par des dynamiques non linéaires à retard variable. Ils sont principalement composés de systèmes hydrauliques à surface libre tels que les rivières et les canaux. Ceux-ci peuvent être modélisés avec précision par le système d’équations aux dérivées partielles de Saint Venant [5]. Cependant, la résolution de ces équations nécessite des approches numériques basées sur des schémas de discrétisation qui sont difficilement utilisables pour le

développement et la mise en oeuvre de techniques de l’automatique (régulation, supervision, etc.) [2]. Une solution consiste alors à simplifier puis à linéariser les équations de Saint Venant autour d’un point de fonctionnement [4]. Le modèle linéaire obtenu est alors plus facilement exploitable. Cependant, l’inconvénient de cette linéarisation réside dans le caractère seulement local du modèle obtenu. Pour surmonter cette limitation, il est possible en considérant des linéarisations autour de différents points de fonctionnement, de modéliser la dynamique des systèmes hydrauliques par des méthodes de multimodélisation [3]. Les difficultés inhérentes au choix du nombre de sous-modèles et à leur interpolation adéquate constituent les deux principaux inconvénients de ces méthodes. Une autre approche consiste à considérer un modèle à paramètres variables (LPV) [1], [6]. Dans [7], [8], Weyer et al. proposent des techniques d’identification basées sur des modèles de type « boîte-grise », les retards étant supposés connus. Notons que les différentes méthodes décrites jusqu’ici sont toutes basées sur les équations physiques du système ou en tout cas sur une bonne connaissance des systèmes hydrauliques. Mais lorsque cette connaissance *a priori* n’est pas disponible, une alternative serait de recourir à des approches d’identification de type « boîte noire ». Nos précédents travaux [23] ont montré que la dynamique du système hydraulique peut être approché de façon plus ou moins précise avec une structure de modèle commutant avec des commutations arbitraires. Cependant, les sous-modèles obtenus par ce type de modélisation ne sont pas nécessairement interprétables d’un point de vue physique.

Dans cet article nous proposons une nouvelle approche de modélisation de systèmes hydrauliques basée sur des modèles affines par morceaux (PieceWise Affine – PWA en anglais). L’avantage de cette approche par rapport à [23] est qu’elle permet de renforcer la signification physique des sous-modèles en fixant le mécanisme de commutation. Les modèles PWA forment une classe particulière de systèmes hybrides qui possèdent la propriété d’approximateurs universels. Ils sont construits en partitionnant l’espace des régresseurs en un nombre fini de régions polyédrales et en affectant un modèle local affine (que nous appellerons aussi sous-modèle) à chaque région. Il existe dans la littérature plusieurs approches à l’estimation des paramètres représentant les sous-modèles du

modèle PWA. Parmi ces approches nous pouvons distinguer l'approche à base de classification de données [11], [12], [24], la méthode de l'erreur bornée [13], l'approche de la programmation mixte en nombres entiers [16], la méthode bayésienne [14]. D'autres méthodes comme celles développées dans [15], [18], [25], [17], bien que présentées initialement pour l'estimation de systèmes à commutations, peuvent, sous réserve de quelques modifications simples, être appliquées aussi aux modèles PWA. Pour un récent état de l'art sur le sujet, le lecteur intéressé pourra consulter par exemple la référence [19]. Chacune des contributions mentionnées ci-dessus possède des avantages et des inconvénients suivant les hypothèses faites sur le nombre de sous-modèles, les ordres du système, le coût de calcul ou encore suivant les performances réalisables en présence de bruit.

L'approche d'identification proposée dans cet article s'appuie sur une classification non supervisée pour grouper les données de régression relatives au même sous-modèle affine. Dans sa phase initiale, l'algorithme procède à la création de N classes singletons avec les N données disponibles. Pour chacune de ces classes singletons, nous commençons par estimer un vecteur de paramètres avec les c vecteurs de régression les plus proches du régresseur concerné (avec c un entier donné). A chaque étape suivante de l'algorithme, les données peuvent migrer selon des règles convenues, d'une classe à une autre, entraînant ainsi une réduction progressive du nombre de classes (et donc du nombre de sous-modèles) par élimination des classes vides ou inconsistantes. Grâce à cette procédure, nous traitons simultanément le problème de la séparation des données par sous-modèle, l'estimation d'un vecteur de paramètres par chaque sous-modèle (à partir des données contenues dans chaque classe) et l'estimation du nombre minimal de sous-modèles (nombre final de classes après convergence). Enfin, un classifieur SVM multi-classe à marge souple, [22] est utilisé pour déterminer les hyperplans définissant les régions associées aux sous-modèles. Le fondement de notre méthode comme celle introduite par [11] est la classification non supervisée (le clustering). Les techniques de classification et la règle spécifique de regroupement de données introduites ici sont originales et présentent une efficacité remarquable comme on peut le voir sur l'application envisagée.

Cet article est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous décrivons les systèmes hydrauliques à surface libre. Puis nous présentons, dans la section 3, la structure des systèmes affines par morceaux, et nous formulons le problème de l'identification pour ces systèmes. Dans la section 4, nous décrivons l'algorithme proposé. Enfin, des résultats expérimentaux sont présentés et discutés dans la section 5.

II. SYSTÈMES HYDRAULIQUES À SURFACE LIBRE

Les réseaux hydrauliques à surface libre sont caractérisés par des dynamiques non linéaires à retard variable. Compte tenu de l'impact que peuvent avoir les événements climatiques et l'activité de l'Homme, ils sont soumis à de larges plages de fonctionnement. Ils sont généralement modélisés par le système d'équations aux dérivées partielles de Saint Venant (1). Ce système d'équations permet de représenter

la dynamique des réseaux hydrographiques de façon fidèle en considérant certaines hypothèses : le débit est unidimensionnel, la pente du canal γ est suffisamment faible pour qu'on puisse faire l'approximation $\sin \gamma \simeq \gamma$, l'accélération verticale est négligeable.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{\partial z}{\partial l} - gS(\gamma - J) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où $Q = Q(l, t)$ est le débit exprimé en $[m^3/s]$, $S = S(l, t)$ est la surface mouillée du système $[m^2]$, t la variable de temps $[s]$, l la variable spatiale mesurée dans la direction et le sens du courant, z la variable spatiale correspondant à la hauteur d'eau, g la gravité $[m/s^2]$, γ la pente du fond et J la pente de frottement.

Le système d'équations de Saint Venant n'a pas de solution analytique et ne peut être résolu que numériquement grâce à l'emploi de schémas de discrétisation tel que le schéma implicite de Preissmann [9]. L'emploi d'approches numériques nécessite une bonne connaissance de la topographie et de la géométrie des systèmes réels, une estimation fine du coefficient de frottement, et des conditions limites notamment aux extrémités du système étudié. Lors de leur utilisation, il faut veiller à ce que le nombre de courant

$$C_r = \frac{dt}{dl} (V + C), \quad (2)$$

soit égal à 1 en réglant les pas de discrétisation en temps dt et en espace dl . En effet, la vitesse moyenne $V = \frac{Q}{S}$ et la célérité C sont directement dépendantes du débit Q . Il est également nécessaire de caler les modèles, c'est-à-dire d'ajuster par exemple la valeur du coefficient de frottement en vue d'améliorer la qualité du modèle obtenu. Finalement, l'utilisation des schémas de discrétisation implique des temps de calcul importants.

Ainsi, l'emploi des équations de Saint Venant pour la modélisation des systèmes hydrauliques à surface libre, bien que fidèle, présente des inconvénients de par les temps de calcul et la connaissance *a priori* du système qu'il est nécessaire d'avoir.

Dans le but d'obtenir des modèles plus simples à mettre en oeuvre, les équations de Saint Venant peuvent être simplifiées en considérant les débits latéraux nuls et les termes d'inertie négligeables comparés aux termes de frottement. L'équation de diffusion ainsi obtenue est exprimée par :

$$\frac{\partial Q(l,t)}{\partial t} + C(Q, z, l) \frac{\partial Q(l,t)}{\partial l} - D(Q, z, l) \frac{\partial^2 Q(l,t)}{\partial l^2} = 0, \quad (3)$$

avec C $[m/s]$ le coefficient de célérité et D $[m^2/s]$ le coefficient de diffusion, tels que :

$$\begin{cases} C(Q, z, l) = \frac{1}{M^2 \frac{\partial J}{\partial Q}} \left[\frac{\partial M}{\partial l} - \frac{\partial (MJ)}{\partial z} \right], \\ D(Q, z, l) = \frac{1}{M \frac{\partial J}{\partial Q}}, \end{cases} \quad (4)$$

où M est la surface du miroir et

$$J = \frac{Q^2 P^{\frac{4}{3}}}{K^2 S^{\frac{10}{3}}} \quad (5)$$

est la pente de frottement. Dans l'expression de J , S désigne la section mouillée, P le périmètre mouillé, K le coefficient de Strickler associé au type de système hydraulique considéré (canal ou rivière). Il existe plusieurs approches empiriques permettant d'exprimer la pente de frottement J , mais la formule de Manning-Strickler (5) est la plus répandue. La pente de frottement J est considérée comme étant égale à la pente du canal γ lorsque le niveau de l'eau est normal selon certaines considérations hydrauliques. La valeur de K est déterminée à partir d'une connaissance physique du système hydraulique ou à partir de méthodes d'identification [10]. Par exemple, ce coefficient est compris entre 50 et 100 pour des canaux en béton.

L'équation de l'onde diffusante (3) peut ensuite être linéarisée autour d'un point de fonctionnement Q_e :

$$\frac{\partial q(l, t)}{\partial t} + C_e \frac{\partial q(l, t)}{\partial l} - D_e \frac{\partial^2 q(l, t)}{\partial l^2} = 0, \quad (6)$$

avec $Q = Q_e + q$, où q est la variation du débit autour du débit de linéarisation Q_e , C_e et D_e sont respectivement les coefficients de célérité et de diffusion calculés pour le débit Q_e . A partir de l'équation de l'onde diffusante linéarisée (6), une fonction de transfert reliant le débit amont Q_{up} au débit aval Q_{dns} pour un système hydraulique de longueur L , est obtenue [4] et exprimée par :

$$F(s) = \frac{Q_{dns}(s)}{Q_{up}(s)} = \frac{e^{-\tau s}}{1 + w_1 s + w_2 s^2}. \quad (7)$$

où les coefficients τ , w_1 et w_2 sont calculés à partir des coefficients C_e et D_e [4].

La linéarisation de l'équation de l'onde diffusante conduit à l'obtention d'un modèle physique qui représente fidèlement la dynamique des systèmes hydrauliques autour d'un point de fonctionnement. Cependant, la précision de ce modèle diminue à mesure que le point de fonctionnement du système s'éloigne du point de linéarisation. De plus, cette méthode nécessite aussi une bonne connaissance de la géométrie et de la topographie des systèmes considérés. Certains paramètres, en particulier le coefficient de Strickler K sont difficiles à identifier.

Dans les sections suivantes, nous présentons une méthode générique permettant l'identification de systèmes non linéaires sur de larges plages de fonctionnement sans connaissance *a priori*. Cette méthode permet l'obtention de modèles représentatifs de la dynamique des systèmes tout en préservant une interprétation physique des modèles.

III. MODÉLISATION PAR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES AFFINES PAR MORCEAUX

Un système dynamique, affine par morceaux (PWARX), est un modèle entrée-sortie défini par :

$$y(k) = f(x(k)) + \varepsilon(k) \quad (8)$$

où $\varepsilon(k)$ est l'erreur de prédiction, supposée être une séquence indépendante et identiquement distribuée de moyenne nulle et $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur régresseur, défini par

$$x(k) = [y(k-1), \dots, y(k-n_a), u(k)^\top, \dots, u(k-n_b)^\top]^\top \quad (9)$$

où $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}$ sont respectivement l'entrée et la sortie mesurée du système à l'instant $k \in \mathbb{Z}$, n_a et n_b sont ses ordres.

Dans (8), f est une fonction affine par morceaux de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \theta_1^\top \bar{x} & \text{si } x \in \mathfrak{R}_1 \\ \vdots \\ \theta_s^\top \bar{x} & \text{si } x \in \mathfrak{R}_s, \end{cases} \quad (10)$$

où $\bar{x} = [x^\top \ 1]^\top$ est le vecteur de régression étendu et $\{\theta_i\}_{i=1}^s$ sont les vecteurs paramètres qui définissent les sous-modèles.

Les régions $\{\mathfrak{R}_i\}_{i=1}^s$ forment une partition complète du domaine régresseur $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^n$, avec $n = n_a + mn_b$, chaque région \mathfrak{R}_i est un polyèdre convexe décrit par :

$$\mathfrak{R}_i = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : H_i \bar{x} \leq \mathbf{0}\}, \quad (11)$$

où H_i est une matrice de dimensions appropriées et $\mathbf{0}$ est le vecteur nul.

Etant donné les mesures entrée-sortie $(u(k), y(k))$, $k = 1, \dots, N$ générées par un système réel, la modélisation par les systèmes dynamiques affines par morceaux consiste à estimer à la fois le nombre s de sous-modèles, les vecteurs de paramètres $\{\theta_i\}_{i=1}^s$, et les matrices $\{H_i\}_{i=1}^s$ définissant les régions $\{\mathfrak{R}_i\}_{i=1}^s$.

IV. L'ALGORITHME DE MODÉLISATION

Dans cette section, l'identification des systèmes dynamiques affines par morceaux est réalisée en deux étapes. Dans la première étape, un nouvel algorithme traite simultanément le problème de la séparation des données par sous-modèle, l'estimation d'un vecteur de paramètres pour chaque sous-modèle et l'estimation du nombre minimal de sous-modèles. Dans la deuxième étape, un classifieur SVM multiclasse, à marge souple, est utilisé pour estimer la loi décrivant l'état discret. Ceci consiste à trouver une partition polyédrale complète de l'espace régresseur en discriminant toutes les régions simultanément.

A. Classification de données et estimation de paramètres

Cette étape traite la séparation des données par sous-modèle et l'identification des paramètres de chaque sous-modèle. La séparation (le clustering) des données en s classes (sous-modèles) disjointes est proprement indissociable de la phase d'estimation des vecteurs paramètres $\{\theta_i\}_{i=1}^s$. En effet la connaissance des paramètres θ_i décrivant chaque sous-modèle du système permettrait de partitionner immédiatement l'ensemble des données.

Le nombre de sous-modèles étant inconnu, l'idée est alors de poser (au début) $\bar{s} = N$, soit un sous-modèle pour chaque donnée, et de diminuer le nombre initial de sous-modèles jusqu'à ce que la solution devienne la plus adéquate.

Pour atteindre notre but, nous considérons les données $X(i) = [x(i)^\top, y(i)]^\top$; $i = 1, \dots, N$, chaque donnée est obtenue par la concaténation du vecteur régresseur et de la sortie mesurée. Ces données sont alors partitionnées en

N classes singletons $C = \{C_1, \dots, C_N\}$, $C_i = \{X(i)\}$. A ces N classes, on associe les vecteurs paramètres $\Theta^{(0)} = [\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_N^{(0)}]$. Le calcul de $\theta_i^{(0)}$ est effectué en considérant la donnée $X(i)$ de la classe C_i et ses c plus proches voisins (c -ppv) et en utilisant la technique des moindres carrés sur ces $c + 1$ données. Avant de continuer la présentation de notre approche, nous donnons un bref rappel sur les moindres carrés.

Rappel sur les moindres carrés :

Soient L données $X(k) = [x(k)^\top, y(k)]^\top$, $k = 1, \dots, L$ générées par un système affine, où $x(k)$ et $y(k)$ sont respectivement le vecteur regressueur et la sortie du système à l'instant k . Le vecteur paramètre θ , définissant ce système affine, peut être donné par la formule suivante :

$$\theta = (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top Y. \quad (12)$$

$$\text{où } \Phi = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^\top$$

$$\text{et } Y = [y(1), y(2), \dots, y(L)]^\top.$$

Pour diminuer le nombre de classes, il faudra trouver une règle de décision efficace pour réaffecter les données initialement partitionnées en N classes. Les données vont migrer vers les classes les plus représentatives. Les classes les moins représentatives deviennent vides et sont alors éliminées permettant ainsi que le nombre de classes ou de sous-modèles diminue.

Nous exploitons le fait que, dans les systèmes affines par morceaux, les données sont localement linéaires. La réaffectation de chaque donnée $X(i)$, $i = 1, \dots, N$ peut donc être basée sur les informations fournies par ses plus proches voisins. Ainsi, la donnée $X(i)$ peut migrer vers l'une des classes qui contient ses plus proches voisins suivant une règle de décision.

Soit $\Gamma_c(X(i))$ l'ensemble des c -plus proches voisins de $X(i)$ et $X(j) \in \Gamma_c(X(i))$ un de ces plus proches voisins appartenant à la classe C_q , $q \in \{1, \dots, \bar{s}\}$. Nous introduisons la mesure

$$\phi_j^i = \exp\left(-\alpha_q (d_j^i)^2 - \beta_q (y(i) - \theta_q^\top x(i))^2\right), \quad (13)$$

pour caractériser l'information fournie par $X(j)$ sur l'appartenance de $X(i)$ à la classe C_q .

où $d_j^i = \left[(X(i) - X(j))^\top (X(i) - X(j))\right]^{\frac{1}{2}}$ est la distance Euclidienne entre $X(i)$ et son voisin $X(j)$ et θ_q est le vecteur paramètre associé à la classe C_q . Les paramètres α_q et β_q , $q \in \{1, \dots, \bar{s}\}$ sont strictement positifs, et sont calculés par :

$$\begin{aligned} \alpha_q &= 1/d_q^2 \\ \beta_q &= 1/e_q^2 \end{aligned} \quad (14)$$

où e_q est l'erreur moyenne entre la sortie mesurée et la sortie du sous-modèle et d_q est la distance moyenne entre les données appartenant à la classe C_q .

Ainsi, nous introduisons la probabilité que $X(i)$ soit dans la classe C_q comme :

$$P(X(i) \in C_q) = \frac{\sum_{j/X(j) \in \{\Gamma_c(X(i)) \cap C_q\}} \phi_j^i}{\sum_{j=1}^c \phi_j^i}, \quad q \in \{1, \dots, \bar{s}\}. \quad (15)$$

On peut noter que $\sum_{q=1}^{\bar{s}} P(X(i) \in C_q) = 1$ et $0 \leq P(X(i) \in C_q) \leq 1$. La probabilité $P(X(i) \in C_q)$ vaut 1 si tous les éléments de $\Gamma_c(X(i))$ appartiennent à la classe C_q et elle vaut 0 si aucun élément de $\Gamma_c(X(i))$ n'appartient à C_q .

La décision se fait par l'affectation de $X(i)$ à la classe C_{ret} , $ret \in \{1, \dots, \bar{s}\}$ qui maximise la probabilité P . Dans ce cas, l'affectation de $X(i)$ s'effectue par :

$$C_{ret} = C_{ret} \cup \{X(i)\} \quad \text{tq } ret = \arg \max_{q=1, \dots, \bar{s}} (P(X(i) \in C_q)). \quad (16)$$

En tenant compte de ce qui précède, nous exposons notre algorithme dans la table I. Les données sont réaffectées après chaque itération. Après un nombre fini d'itérations les données cessent de migrer d'une classe à une autre. Les paramètres α_q et β_q , $q \in \{1, \dots, \bar{s}\}$ sont adaptés après chaque itération afin de tenir compte de l'évolution des classes. Le paramètre c , le nombre des plus proches voisins, est le paramètre de réglage de notre l'algorithme. Les simulations montrent que plus c est petit, plus le nombre de classes (ou sous-modèles) est grand. Ainsi, le choix de c dépend de la précision souhaitée sur le modèle estimé.

B. Estimation des régions

Après l'étape de la classification des données et l'identification des vecteurs paramètres, vient l'étape de l'estimation des régions. Ce problème consiste à trouver les frontières qui délimitent chaque région dans la partition complète $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^s$ du domaine de régression \mathcal{R} . Le problème revient à séparer les s régions par des séparateurs linéaires (hyperplans). On cherche donc à retrouver les paramètres $\{H_i\}_{i=1}^s$ des polyèdres convexes définissant les régions de chaque sous-modèle. Cette démarche générale de classification conduit à deux types d'approche permettant de trouver des hyperplans séparateurs entre s classes.

La première approche procède en recherchant un hyperplan séparateur pour chaque paire $(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j)$. Cela revient à trouver w_{ij} et b_{ij} tels que :

$$\begin{cases} w_{ij}^\top x(k) > b_{ij} & \forall x(k) \in \mathcal{R}_i \\ w_{ij}^\top x(k) < b_{ij} & \forall x(k) \in \mathcal{R}_j \end{cases} \quad (17)$$

Le problème de la construction du meilleur séparateur linéaire peut être posé comme un problème d'optimisation quadratique convexe sous contraintes linéaires. Les séparateurs linéaires les plus utilisés en pratique sont les Machines à Support Vecteurs (SVM) qui sont connues par leurs performances de généralisation.

Le principe est de trouver l'hyperplan qui minimise la somme des erreurs associées aux mauvaises classifications tout en maximisant la marge de séparation entre les régions

Algorithme

Étape 1 Initialisation :

- Fixer c , $\bar{s} = N$, $r = 0$.
- Poser $C_i = \{X(i)\}$, $\alpha_i = \alpha$, et $\beta_i = \beta$, $i = 1, \dots, \bar{s}$.
- Calculer les paramètres $\Theta^{(0)} = [\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_{\bar{s}}^{(0)}]$.

Étape 2 Réaffectation des données :

Pour $i = 1, \dots, N$

- Pour tous les c -ppv $X(j) \in \Gamma_c(X(i))$, $j = 1, \dots, c$, calculer ϕ_i^j , Eq. (13).
- Calculer les probabilités $P(X(i) \in C_q)$, $q \in \{1, \dots, \bar{s}\}$, Eq. (15).
- Decider sur l'affectation de $X(i)$, Eq. (16).

Fin pour.

- \bar{s} = nombre de classes non vides.
- Adaptation des paramètres :
 - Adapter $\Theta^{(r)}$ en utilisant les moindres carrés sur les données de chaque classe non vide.
 - Adapter les paramètres α_q et β_q , $q \in \{1, \dots, \bar{s}\}$, Eq. (14).

Étape 3 Test de convergence :

Si $\|\Theta^{(r+1)} - \Theta^{(r)}\| \leq \eta$, $s = \bar{s}$, terminer l'algorithme. Si non mettre $r = r + 1$ et retourner à l'étape 2.

TABLE I
L'ALGORITHME D'IDENTIFICATION

\mathfrak{R}_i et \mathfrak{R}_j . On obtient, dans ce cas, le problème d'optimisation suivant [21] :

$$\begin{cases} \min_{w_{ij}, b_{ij}, \xi_k^{ij}} \left(\frac{1}{2} \|w_{ij}^T\|^2 + \delta \sum \xi_k^{ij} \right) \\ \text{s.c.} \quad z_k \begin{bmatrix} w_{ij}^T & b_{ij} \end{bmatrix} \bar{x}(k) \geq 1 - \xi_k^{ij} \\ \xi_k^{ij} \geq 0 \quad \forall x(k) \in \mathfrak{R}_i \cup \mathfrak{R}_j \end{cases} \quad (18)$$

où $z_k = 1$ si $x(k) \in \mathfrak{R}_i$ et $z_k = -1$ si $x(k) \in \mathfrak{R}_j$, ξ_k^{ij} sont les erreurs de relâchement et δ est un paramètre de régularisation.

Le nombre de lignes de la matrice H_i (Eq. 11) définissant la région \mathfrak{R}_i est égale au nombre de séparateurs linéaires délimitant cette région. Une de ces lignes serait par exemple $[-w_{ij}^T \quad -b_{ij}]$. Cette approche binaire nécessite alors la résolution de $s(s-1)/2$ problèmes de séparation linéaire de deux classes. En plus, les régions estimées dans ce cas peuvent ne pas constituer une partition complète puisque elle ne traite pas toutes les données simultanément.

La seconde approche permet de séparer les régions $\{\mathfrak{R}_i\}_{i=1}^s$ en considérant simultanément l'ensemble des classes et en recherchant directement un hyperplan séparateur linéaire par morceaux. Cette approche nécessite la résolution d'un seul problème d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires. [22] propose un classifieur SVM multi-classe, à marge souple dont le problème d'optimisation à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \min_{w_i, b_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{i-1} \|w_i - w_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \|w_i\|^2 \right. \\ \quad \left. + \delta \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{i-1} e^T \xi_{ij} \right) \\ \text{s.c.} \quad A_i (w_i - w_j) - e (b_i - b_j) \geq e - \xi_{ij} \\ \quad \xi_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, s \quad i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

où $A_i, i \in \{1, \dots, s\}$ est une matrice dont les lignes représentent des données de la région \mathfrak{R}_i , $i \in \{1, \dots, s\}$, e est un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. ξ_{ij} sont les erreurs de relâchement.

Dans ce cas, la matrice H_i (Eq. 11) définissant la région \mathfrak{R}_i sera constituée de $(s-1)$ lignes qui sont $[\ w_j - w_i \quad b_j - b_i \]_{j=1, j \neq i}^s$.

Dans cette deuxième approche les régions estimées constituent une partition complète.

V. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

La procédure d'identification proposée est employée pour modéliser la dynamique d'un système hydraulique à surface libre sur une large plage de fonctionnement sans connaissance *a priori* de sa géométrie et de ses caractéristiques. Le système hydraulique considéré est la galerie Lunax-Save située dans le sud-ouest de la France. Elle est de section circulaire, rentre dans la classe des systèmes dynamiques SISO et a une plage de fonctionnement allant de $q_{min} = 0.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ à $q_{max} = 5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Le problème consiste à modéliser l'écoulement de l'eau entre les deux extrémités du canal. Par conséquent, l'entrée et la sortie du système sont définies respectivement comme le débit volumique d'eau en amont $u(t)$ et le débit volumique d'eau en aval $y(t)$, exprimés tous en $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$ (voir Figure 1). Les systèmes hydrauliques sont caractérisés par des dynamiques à retards variables. Bien que certains retards aient été introduits au cours de l'étape de génération de données, nous allons négliger cet aspect dans la procédure de modélisation.

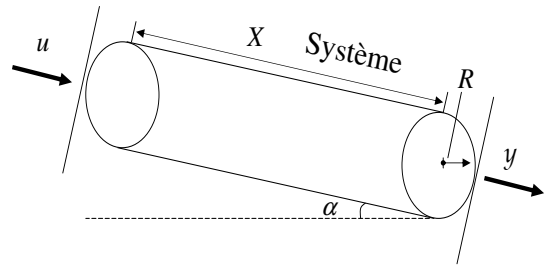


Fig. 1. Caractéristiques géométriques de la galerie.

En raison de la grande dimension de ces systèmes, et de la difficulté à implanter des réseaux de capteurs sur le terrain, les données réelles sont parfois difficiles à collecter. Par conséquent, il est de pratique courante de recourir à des logiciels reproduisant la dynamique des systèmes hydrauliques à surface libre. Le logiciel employé pour générer les données est le logiciel SIC développé par le CEMAGREF de Montpellier. Ainsi, un ensemble de 800 données entrée-sortie a été obtenu. En considérant le système comme un système dynamique affine par morceaux (PWARX), on a obtenu les résultats suivants :

Identification de deux modes :

En appliquant notre méthode sur les données récoltées en choisissant $c = 150$, $n_a = 2$ et $n_b = 2$, un modèle PWA de deux modes a été identifié ($s = 2$). Sur la figure 2, on présente la sortie réelle du système et la sortie reconstruite à partir du modèle. La séquence des modes estimés est également tracée. A partir de la forme de la réponse $y(k)$ et de la séquence des modes estimés, on peut constater que le mode 1 correspond au débit volumique d'eau en aval $0.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} < y(k) < 1.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ et le mode 2 correspond à $1.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \leq y(k) < 5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

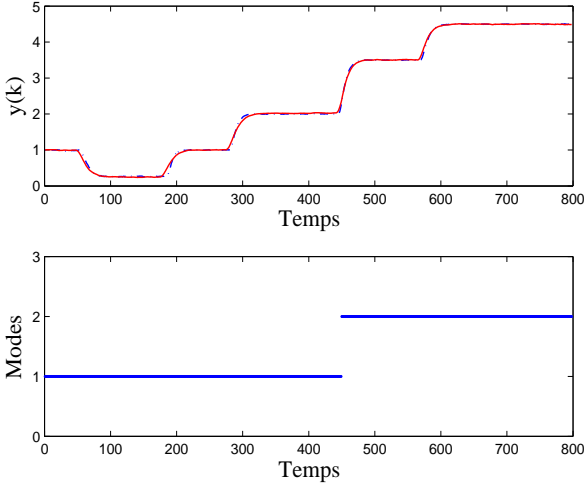


Fig. 2. (Haut) La sortie réelle du système (en continu) et la sortie reconstruite à partir du modèle (en pointillé). (Bas) La séquence des modes estimés.

Les vecteurs paramètres identifiés et les hyperplans estimés sont donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= [1.5963 \quad -0.6266 \quad -0.0151 \quad 0.0459 \quad -0.0003], \\ \hat{\theta}_2 &= [1.3656 \quad -0.4273 \quad 0.0208 \quad 0.0401 \quad 0.0035], \\ \hat{H}_1 &= [-\hat{h}_1], \quad \hat{H}_2 = [\hat{h}_1], \\ \hat{h}_1 &= [-7.948 \quad -7.073 \quad 2.801 \quad -3.924 \quad 38.946]. \end{aligned}$$

Nous utilisons le critère [19] :

$$\text{SSE} = \frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2$$

qui représente la moyenne des erreurs quadratiques pour mesurer la similarité entre la sortie mesurée sur le système et la sortie reconstruite à partir du modèle. Ainsi, dans ce cas, on trouve $\text{SSE} = 0.002$. Comme on peut le constater aussi sur la figure (2), cela prouve que la sortie réelle et celle reconstruite sont presque identiques. On présente dans le paragraphe suivant une identification de trois modes de fonctionnement.

Identification de trois modes :

En choisissant $c = 120$, $n_a = 2$ et $n_b = 2$, et en appliquant notre algorithme sur le même ensemble de données que ci-dessus, un modèle de trois modes est identifié ($s = 3$). La

sortie réelle du système superposée à la sortie reconstruite à partir du modèle ainsi que la séquence des modes estimés sont présentées sur la figure 3. Dans ce cas on a trouvé $\text{SSE} = 0.0012$. On peut constater que la précision du modèle estimé semble augmenter avec le nombre de sous-modèles car il y a une réduction du SSE de 40% par rapport au cas ($s = 2$). Le mode 1 correspond au débit volumique d'eau en aval $0.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} < y(k) < 1.3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, le mode 2 correspond à $1.3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \leq y(k) < 3.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ et mode 3 correspond à $3.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \leq y(k) < 5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Les vecteurs paramètres identifiés et les hyperplans estimés sont donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= [1.5351 \quad -0.5632 \quad -0.0223 \quad 0.0516 \quad -0.0007], \\ \hat{\theta}_2 &= [1.6102 \quad -0.6473 \quad 0.0043 \quad 0.0328 \quad -0.0001], \\ \hat{\theta}_3 &= [0.5234 \quad 0.3328 \quad -0.0002 \quad 0.0162 \quad 0.5750], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= [-\hat{h}_1], \quad \hat{H}_2 = [\hat{h}_1^T \quad -\hat{h}_2^T]^T, \quad \hat{H}_3 = [\hat{h}_2], \\ \hat{h}_1 &= [-10.225 \quad -12.544 \quad -5.921 \quad -2.844 \quad 44.475], \\ \hat{h}_2 &= [-9.290 \quad -9.062 \quad -9.253 \quad -4.724 \quad 130.084]. \end{aligned}$$

Validation du modèle estimé :

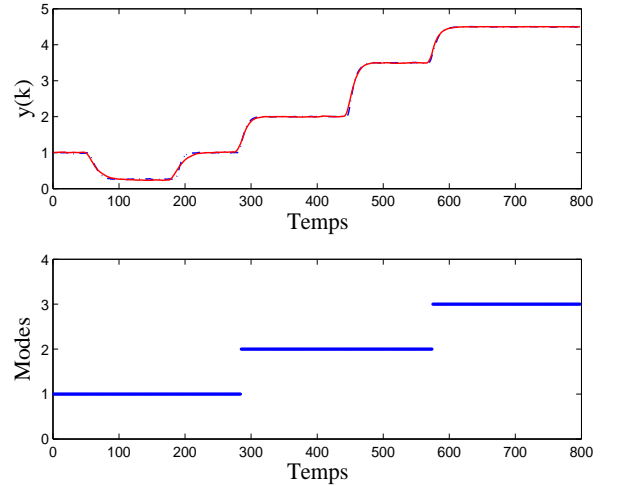


Fig. 3. (Haut) La sortie réelle du système (en continu) et la sortie reconstruite à partir du modèle (en pointillé). (Bas) La séquence des modes estimés.

La validation de l'approche proposée est faite sur un ensemble de 750 données entré-sortie générées par une séquence d'entrée d'excitation différente de celle utilisée pour l'identification. La validation consiste à reconstruire la sortie pour ce nouvel ensemble de données en utilisant les modèles estimés précédemment. Pour cela, on utilise les paramètres identifiés dans le cas de ($s = 3$). Ainsi le résultat trouvé est présenté sur la figure 4 où la sortie réelle est superposée à la sortie reconstruite. On trouve dans ce cas $\text{SSE} = 0.0092$.

Afin de montrer l'efficacité de l'approche d'identification proposée, elle est comparée à l'approche de modélisation basée sur les équations physiques des systèmes hydrauliques à surface libre. Le modèle de la galerie est obtenue

par linéarisation de l'équation de l'onde diffusante (voir équation 6) autour du débit $Q_e = 1 \text{ m}^3/\text{s}$. La fonction de transfert obtenue est donnée ci-dessous :

$$F(s) = \frac{e^{-248s}}{1 + 239s + 16250s^2}. \quad (20)$$

La sortie reconstruite par cette méthode est superposée aux deux autres sorties (figure 4). La moyenne des erreurs quadratiques trouvée est $\text{SSE} = 0.0160$. Par comparaison des deux SSE, on peut constater que le modèle identifié par notre méthode (qui est une méthode de type « boîte noire ») est plus précis que celui identifié par la méthode de la linéarisation de l'équation de l'onde diffusante.

Nous rappelons aussi que dans notre démarche de modélisation de systèmes hydrauliques, les retards naturels du système n'ont pas été pris en compte. Malgré cette approximation, les sorties reconstruites à partir des modèles estimés sont très proches des sorties réelles et cela, pour différentes séquences d'entrée d'excitation. Les résultats présentés sont satisfaisants et ainsi démontrent les potentialités expérimentales de notre méthode.

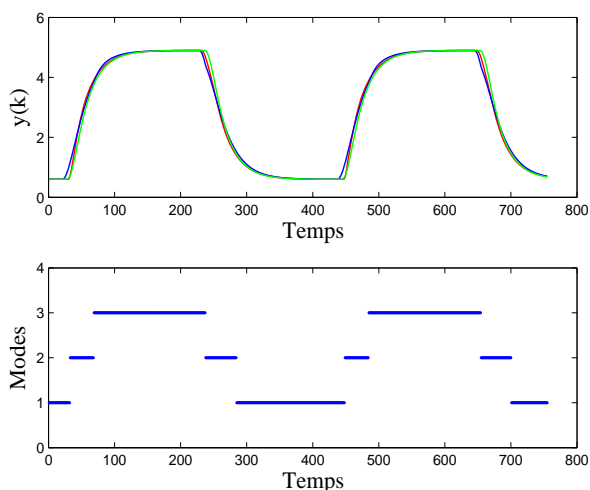


Fig. 4. (Haut) La sortie réelle du système (en rouge), la sortie reconstruite à partir des PWA modèles (en bleu) et la sortie reconstruite à partir de la linéarisation de l'équation de l'onde diffusante (en vert). (Bas) La séquence des modes estimés.

VI. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons introduit une nouvelle approche de modélisation des systèmes dynamiques affines par morceaux. Cette approche traite simultanément le problème de la classification de données, l'estimation des paramètres définissant chaque sous-modèle et l'estimation du nombre de sous-modèles. L'estimation de la loi de l'état discret est effectuée via un classifieur SVM multi-classe, à marge souple. Notre méthode ne nécessite pas la connaissance a priori du nombre de sous-modèles. A part les ordres du système, un seul paramètre qui est le nombre des plus proches voisins c doit être fourni. Etant donné c , notre méthode trouve les modèles affines par morceaux qui correspondent le mieux aux mesures entrée-sortie données. L'application sur la galerie Lunax-Save montre la performance de l'approche proposée.

RÉFÉRENCES

- [1] Y. Bolea, V. Puig, J. Blesa, M. Gomez and J. Rodellar, 'An LPV Model for Canal Control', 10th IEEE MMAR, vol 1, pp : 659-664, Miedzyzdroje, Poland, 2004, ISBN 83-88764-09-8.
- [2] V. T. Chow, D. R. Maidment and L. W. Mays, 'Applied Hydrology', McGraw-Hill, New York, Paris, 1988.
- [3] E. Duviella, L. Bako and P. Charbonnaud, 'Gaussian and boolean weighted models to represent variable dynamics of open channel systems', CDC'07, New Orleans (USA), 2007.
- [4] X. Litrico and D. Georges, 'Robust Continuous-Time and Discrete-Time Flow Control of a Dam-River System. (I) Modelling.', Applied Mathematical Modelling, vol 23, pp : 809-827, 1999.
- [5] P.-O. Malaterre and J.-P. Baume, 'Modeling and Regulation of Irrigation Canals : Existing Applications and Ongoing Researches', IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, vol 4, pp : 3850-3855, 1998.
- [6] V. Puig, J. Quevedo, T. Escobet, P. Charbonnaud and E. Duviella, 'Identification and Control of an Open-Flow Canal Using LPV Models', CDC-ECC'05, pp : 1893-1898, Seville, Spain, 2005.
- [7] E. Weyer, 'System identification of an open water channel', Control Engineering Practice, vol 75, pp : 1289-1299, 2001.
- [8] K. Euren and E. Weyer, 'System identification of open water channels with undershot and overshoot gates', Control Engineering Practice, In press, 2006.
- [9] X. Zhuan and X. Xia, 'Models and control methodologies in open water flow dynamics : A survey', IEEE Africon 07, 2007, pages 1-7.
- [10] S. K. Ooi, M. Krutzen and E. Weyer. On physical and data driven modelling of irrigation channels. Control Engineering Practice, vol. 13, pp. 461-471, 2003.
- [11] G. Ferrari-Trecate, M. Muselli, D. Liberati, and M. Morari, 'A clustering technique for the identification of piecewise affine systems,' Automatica, vol. 39(2), pp. 205 - 217, 2003.
- [12] H. Nakada, K. Takaba, and T. Katayama, 'Identification of piecewise affine systems based on statistical clustering technique,' Automatica, vol. 41, pp. 905-913, 2005.
- [13] A. Bemporad, A. Garulli, S. Paoletti, and A. Vicino, 'A bounded-error approach to piecewise affine system identification,' IEEE Trans Autom Control, vol. 50(10), pp. 1567-1580, 2005.
- [14] A. Juloski, S. Wieland, and A. Heemels WPMH, 'Bayesian approach to identification of hybrid systems,' IEEE Trans Autom Control 2005, vol. 50(10), pp. 1520 - 1533, 2005.
- [15] R. Vidal, S. Soatto, Y. Ma, and S. Sastry, 'An algebraic geometric approach to the identification of a class of linear hybrid systems.,' in 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003.
- [16] J. Roll, A. Bemporad, and L. Ljung, 'Identification of piecewise affine systems via mixed-integer programming,' Automatica, vol. 40(1), pp. 37-50, 2004.
- [17] J. Ragot, G. Mourot, and D. Maquin, 'Parameter estimation of switching piecewise linear systems,' in the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003.
- [18] F. Lauer and G. Bloch, 'Switched and piecewise nonlinear hybrid system identification,' in 11th International Conference on Hybrid Systems : Computation and Control, 2008.
- [19] S. Paoletti, A. Juloski, G. Ferrari-Trecate, and R. Vidal, 'Identification of hybrid systems : a tutorial,' European Journal of Control, vol. 513(2-3), pp. 242 - 260, 2007.
- [20] G. Ferrari-Trecate and M. Muselli, 'Single-linkage clustering for optimal classification in piecewise affine regression.,' in FAC Conference on the Analysis and Design of Hybrid Systems., 2003.
- [21] V. Vapnik, 'The nature of stational learning theory,' in New York : Springer-Verlag, 1995.
- [22] E. Bredensteiner and K. Bennett, 'Multicategory classification by support vector machines,' Computational Optimization and Applications, vol. 12, pp. 53-79, 1999.
- [23] L. Bako and K. Boukharouba and D. Duviella and S. Lecoeuche, 'Switched affine models for describing nonlinear systems.,' in IFAC Conference on the Analysis and Design of Hybrid Systems., Zaragoza, Spain, 2009.
- [24] K. Boukharouba and L. Bako and S. Lecoeuche, 'Identification of Piecewise Affine systems based on Dempster-Shafer theory.,' in IFAC Symposium on System Identification, Saint Malo, France, 2009.
- [25] F. Lauer and R. Vidal and G. Bloch, 'A product-of-errors framework for linear hybrid identification problem.,' in IFAC Symposium on System Identification, Saint Malo, France, 2009.