

Modélisation et identification des systèmes non linéaires stochastiques représentés à l'aide d'un modèle de Volterra à complexité réduite

Imen LAAMIRI , Hassani MESSAOUD

Unité de Recherche d'Automatique Traitement de Signal et Image, ENIM, Rue Ibn El Jazzar 5019 Monastir -Tunisie
Tél : +(216) 73500511 ; Fax : +(216) 73500514 ; Email : imen.laamiri@yahoo.fr ; hassani.messaoud@enim.rnu.tn

Résumé—Les séries de Volterra ont été utilisées pour la modélisation d'une large classe de systèmes non linéaires. Bien que le modèle résultant soit linéaire par rapport à ses paramètres, celui-ci souffre d'une complexité accrue résultante de l'augmentation du nombre de ces paramètres. Pour réduire cette complexité on décrit les noyaux de Volterra par un tenseur qu'on procède à sa décomposition en des matrices en utilisant le modèle PARAFAC dont l'estimation est assurée par la méthode des moindres carrés alternés ALS.

Dans cette communication on propose une extension de la dite méthode ALS pour l'estimation des matrices dans le cas où le système étudié est bruité. La méthode proposée qui s'intitule AELS (Alternating Extended Least square) a été validée et comparée avec l'ALS et les résultats sont significatifs.

Mots-clés : Modèle de Volterra, PARAFAC, complexité, ARELS, Noyau de Volterra

I. INTRODUCTION

Jusqu'alors les séries de Volterra constituent un outil puissant pour la modélisation d'une très large classe de systèmes non linéaires. Le modèle résultant étant linéaire par rapport à ses paramètres, il pourra ainsi bénéficier de certains résultats établis pour l'identification des modèles linéaires. Toutefois, l'éloge précédente afférée à ce modèle est contre carrée par certaines avaries résultantes de la complexité accrue due au nombre de paramètres engagés dans ce modèles. Cette défaillance pénalise son utilisation en pratique essentiellement pour des procédés fortement non linéaires ou un ordre élevé du modèle de Volterra et une forte mémoire sont exigés. Dans le but d'alléger cette complexité on exploite plutôt les modèles de Volterra dits à complexité réduite qui peuvent être élaborés soit en développant les noyaux de Volterra sur des bases de fonctions orthogonales, soit en décrivant ces noyaux par des tenseurs qu'on procède à leurs décomposition en des matrices en appliquant la décomposition tensorielle de type PARAFAC (PARAllel FACTor). L'estimation des composantes de ses matrices est assurée en utilisant la méthode des moindres carrés alternés (ALS). Cependant lorsque le système considéré est bruité, les estimés des composants risquent d'être biaisés. A ce propos on étend la méthode ALS au cas bruité à l'instar de la méthode des moindres carrés étendus développée pour l'estimation des paramètres des modèles ARX. L'algorithme proposé sera dénommé AELS (Alternating Extended Least square). Une fois les matrices estimées, les noyaux de Volterra et par suite le modèle de Volterra seront reconstitués. Dans la section 2, nous abordons le modèle de Volterra d'un système non linéaire d'ordre trois muni de trois noyaux, le noyau linéaire, le noyau quadratique et le noyau cubique. Le modèle de

Volterra à complexité réduite sera obtenu en décrivant le noyau linéaire par un vecteur, le noyau quadratique par une matrice qui sera décomposée en valeurs singulières en utilisant l'SVD et le noyau cubique par un tenseur qui sera décrit par trois matrices issues de la décomposition PARAFAC du tenseur. Ce modèle sera intitulé SVD-PARAFAC-Volterra. Une fois la structure du modèle est établie, nous procédons à l'identification de ses paramètres qui sont les matrices résultantes de la décomposition SVD du noyau quadratique et de la décomposition PARAFAC du tenseur associé au noyau cubique. Cette opération a été accomplie jusqu'à présent pour des systèmes déterministes et en utilisant la méthode des moindres carrés alternés (ALS) [1]. Dans la troisième section de ce travail nous étendons les travaux existants aux cas des processus stochastiques, nous détaillons la méthode des Moindres Carrés Etendus Alternés (AELS) et une version récursive de cet algorithme est proposée. Le modèle à complexité réduite ainsi identifié est validé en simulation sur un système non linéaire stochastique puis comparé avec le modèle résultant de l'estimation par la méthode ALS

II. LE MODÈLE SVD-PARAFAC-VOLTERRA D'ORDRE 3

A. Modèle de Volterra

La relation Entrée/Sortie d'un modèle de Volterra d'ordre 3 discret et invariant dans le temps est donnée par :

$$y(n) = \sum_{p=1}^3 \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{M-1} \dots \sum_{n_p=0}^{M-1} h_p(n_1, \dots, n_p) \prod_{i=1}^p x(n-n_i) + \mathcal{V}(n) \quad (1)$$

Où $x(n)$ et $y(n)$ représentent l'entrée et la sortie du système respectivement, M est la mémoire du système, $h_p(n_1, \dots, n_p)$ est le noyau de Volterra d'ordre p et $\mathcal{V}(n)$ est un bruit additif donné par:

$$\mathcal{V}(n) = e(n) + d_1 e(n-1) + \dots + d_k e(n-k) \quad (2)$$

Où $e(n)$ est un bruit blanc. Le modèle (1) donne lieu à trois noyaux :

- $h_1(n_1)$: Le noyau de premier ordre ou noyau linéaire qui représente la réponse impulsionnelle du système. Ce noyau est décrit par le vecteur H_1 de dimension M .
- $h_2(n_1, n_2)$: Le noyau quadratique qui peut être décrit par une matrice carré H_2 de dimension M .
- $h_3(n_1, n_2, n_3)$: Le noyau cubique H_3 qui pourra être décrit par un tenseur cubique de dimension M .

Le nombre de paramètres du modèle de Volterra d'ordre 3 et de mémoire M est :

$$C(M, 3) = \sum_{p=1}^3 M^p = M(1 + M + M^2) \quad (3)$$

B. Modèle SVD-PARAFAC-VOLTERRA

La représentation scalaire de la décomposition SVD de la matrice H_2 de rang Q s'écrit :

$$H(n_1, n_2) = \sum_{r=1}^Q u_{n_1 r} v_{n_2 r} ; n_1 = 1, \dots, M; n_2 = 1, \dots, M \quad (4)$$

Où $u_{n_1 q}$ et $v_{n_2 q}$ représentent respectivement l'élément (n_1, q) et l'élément (n_2, q) des matrices U et V qui satisfont :

$$UU^T = W_Q^2 ; \quad VV^T = I_Q$$

Où W_Q est la matrices des valeurs singulières de H_2 et I_Q la matrice identité d'ordre Q .

De même la représentation scalaire de la décomposition PARAFAC du tenseur H_3 de rang R , s'écrit :

$$H_3(n_1, n_2, n_3) = \sum_{r=1}^R a_{n_1 r} b_{n_2 r} c_{n_3 r} ; n_1, n_2, n_3 = 1, \dots, M \quad (5)$$

Où $a_{n_1 r}$ est l'élément (n_1, r) de la matrice A , $b_{n_2 r}$ l'élément (n_2, r) de la matrice B et $c_{n_3 r}$ l'élément (n_3, r) de la matrice C et A , B et C sont des matrices de dimensions $(M \times R)$.

Compte tenu des relations (4) et (5), le modèle (1) s'écrit :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{n_1=1}^M h_1(n_1) x(n - n_1) \\ &+ \sum_{q=1}^Q \left(\sum_{n_1=1}^M u_{n_1 q} x(n - n_1) \right) \left(\sum_{n_2=1}^M v_{n_2 q} x(n - n_2) \right) \\ &+ \sum_{r=1}^R \left(\sum_{n_1=1}^M a_{n_1 r} x(n - n_1) \right) \left(\sum_{n_2=1}^M b_{n_2 r} x(n - n_2) \right) \left(\sum_{n_3=1}^M c_{n_3 r} x(n - n_3) \right) \\ &+ \mathcal{V}(n) \end{aligned} \quad (6)$$

La complexité paramétrique du modèle PARAFAC associé au noyau d'ordre 3 est $3MR$, celle du modèle SVD associé au noyau quadratique est $2MQ$ et celle associée au noyau linéaire est M . Par suite la complexité du modèle SVD-PARAFAC-Volterra d'ordre 3 est :

$$C_{SVD-PARAFAC} = M(1 + 3R + 2Q) \quad (7)$$

Le taux de réduction de la complexité (TRC) est défini par le rapport de la complexité du modèle de Volterra par celle du modèle SVD-PARAFAC-Volterra :

$$TRC = \left(1 - \frac{C_{SVD-PARAFAC}}{C(M, 3)} \right) = \left(1 - \frac{1 + 3R + 2Q}{1 + M + M^2} \right) \quad (8)$$

Pour $Q \ll M$ et $R \ll M$, la complexité du modèle de Volterra est considérablement réduite.

III. ESTIMATION DES COMPOSANTES DES MATRICES

Définissons les quantités suivantes :

$$\omega_q^U(n) = \sum_{n_2=0}^{M-1} v_{n_2 q} x(n - n_2) ; \quad \omega_q^V(n) = \sum_{n_1=0}^{M-1} u_{n_1 q} x(n - n_1) \quad (9)$$

$$\delta_r^A(n) = \sum_{n_2=0}^{M-1} b_{n_2 r} x(n - n_2) \sum_{n_3=0}^M c_{n_3 r} x(n - n_3) \quad (10)$$

$$\delta_r^B(n) = \sum_{n_1=0}^{M-1} a_{n_1 r} x(n - n_1) \sum_{n_3=0}^M c_{n_3 r} x(n - n_3) \quad (11)$$

$$\delta_r^C(n) = \sum_{n_1=0}^{M-1} a_{n_1 r} x(n - n_1) \sum_{n_2=0}^{M-1} b_{n_2 r} x(n - n_2) \quad (12)$$

Le modèle SVD-PARAFAC-Volterra peut s'écrire de 3 manières:

- Première écriture de la sortie du modèle :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{n_1=0}^{M-1} \left(h_1(n_1) + \sum_{q=1}^Q u_{n_1 q} \omega_q^U(n) + \sum_{r=1}^R a_{n_1 r} \delta_r^A(n) \right) x(n - n_1) \\ &+ \mathcal{V}(n) \end{aligned}$$

En remplaçant $\mathcal{V}(n)$ par son expression de la relation (2), la relation (6) s'écrit:

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Omega_U(n) \otimes x(n) \\ \Delta_A(n) \\ e(n-1) \\ \vdots \\ e(n-k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_1 \\ \text{vec}(U) \\ \text{vec}(A) \\ d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} + e(n) \quad (13)$$

Où \otimes désigne le produit de Kronecker et,

$$\Omega_U(n) = [\omega_1^U(n) \quad \omega_2^U(n) \quad \dots \quad \omega_Q^U(n)]^T \quad (14)$$

$$\Delta_A(n) = [\delta_1^A(n) \quad \delta_2^A(n) \quad \dots \quad \delta_R^A(n)]^T \quad (15)$$

$$x(n) = [x(n-1) \quad x(n-2) \quad \dots \quad x(n-M)]^T \quad (16)$$

$$H_1 = [h_1(1) \quad h_1(2) \quad \dots \quad h_1(M)] \quad (17)$$

$\text{vec}(X)$ est le vecteur de dimension $m \times n$ obtenu à partir de la matrice X de dimension $(m \times n)$:

$$\text{vec}(X) = \begin{bmatrix} X(:, 1) \\ \vdots \\ X(:, n) \end{bmatrix}$$

Où $X(:, j)$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice X . La relation (13)

peut s'écrire :

$$\varphi_1^T(n) \theta_1 + e(n) \quad (18)$$

où $\theta_1 \in \mathbb{R}^{M(1+Q+R)+k}$ est le vecteur de paramètres à estimer

$$\theta_1 = \left[H_1^T \quad \text{vec}(U)^T \quad \text{vec}(A)^T \quad d_1 \quad \dots \quad d_k \right]^T \quad (19)$$

et $\varphi_1(n) \in \mathbb{R}^{M(1+Q+R)+k}$ est le vecteur d'observations

$$\varphi_1(n) = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Omega_U(n)^T & \Delta_A(n)^T \end{bmatrix} \otimes x(n) \right) \\ e(n-1) \\ \vdots \\ e(n-k) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Comme $e(n-i)$ n'est pas mesurable, nous l'approchons par l'erreur de prédiction $\varepsilon(n-i) = y(n-i) - \hat{y}(n-i)$, et par suite le vecteur $\varphi_1(n)$ sera substitué par $\tilde{\varphi}_1(n)$

$$\varepsilon(n) = y(n) - \tilde{\varphi}_1(n)^T \hat{\theta}_1(n-1) \quad (21)$$

$$\hat{\theta}_1(n) = \left[\hat{H}_1^T \quad \left(\text{vec}(\hat{U}) \right)^T \quad \left(\text{vec}(\hat{A}) \right)^T \quad \hat{d}_1 \quad \dots \quad \hat{d}_k \right]^T \quad (22)$$

$$\tilde{\varphi}_1(n) = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Omega_U(n)^T & \Delta_A(n)^T \end{bmatrix} \otimes x(n) \right) \\ \varepsilon(n-1) \\ \vdots \\ \varepsilon(n-k) \end{bmatrix} \quad (23)$$

▪ *Deuxième écriture de la sortie du modèle :*

$$y(n) = y_L(n) + \sum_{n_2=1}^M \left(\sum_{q=1}^Q \mathbf{v}_{n_2 q} \omega_q^V(n) + \sum_{r=1}^R \mathbf{b}_{n_2 r} \delta_r^B(n) \right) x(n-n_2) + \mathcal{V}(n)$$

$$= y_L(n) + \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Omega_V(n) \\ \Delta_B(n) \end{bmatrix} \otimes x(n) \right) \\ e(n-1) \\ \vdots \\ e(n-k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \text{vec}(V) \\ \text{vec}(B) \\ d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} + e(n) \quad (24)$$

$$= y_L(n) + \varphi_2^T(n) \theta_2 + e(n) \quad (25)$$

Où :

$$y_L(n) = \sum_{n_1=1}^M h_1(n_1) x(n-n_1) \quad (26)$$

$$\Omega_V(n) = \left[\omega_1^V(n) \quad \omega_2^V(n) \quad \dots \quad \omega_Q^V(n) \right]^T \quad (27)$$

$$\Delta_B(n) = \left[\delta_1^B(n) \quad \delta_2^B(n) \quad \dots \quad \delta_R^B(n) \right]^T \quad (28)$$

θ_2 et $\varphi_2(n)$ sont respectivement le vecteur de paramètres et le vecteur d'observations de dimension $M(Q+R)+k$.

$$\theta_2 = \left[\text{vec}(U)^T \quad \text{vec}(B)^T \quad d_1 \quad \dots \quad d_k \right]^T \quad (29)$$

$$\varphi_2(n) = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Omega_V(n)^T & \Delta_B(n)^T \end{bmatrix} \otimes x(n) \right) \\ e(n-1) \\ \vdots \\ e(n-k) \end{bmatrix} \quad (30)$$

La sortie estimée du modèle SVD-PARAFAC-Volterra d'ordre 3 est :

$$\hat{y}(n) = y_L(n) + \tilde{\varphi}_2(n)^T \hat{\theta}_2(n-1) \quad (31)$$

Avec :

$$\hat{\theta}_2(n) = \left[\text{vec}(\hat{V})^T \quad \text{vec}(\hat{B})^T \quad \hat{d}_1 \quad \dots \quad \hat{d}_k \right]^T \quad (32)$$

$$\tilde{\varphi}_2(n) = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Omega_V(n)^T & \Delta_B(n)^T \end{bmatrix} \otimes x(n) \right) \\ \varepsilon(n-1) \\ \vdots \\ \varepsilon(n-k) \end{bmatrix} \quad (33)$$

▪ *Troisième écriture de la sortie du modèle :*

$$y(n) = y_L(n) + y_Q(n) + \sum_{n_3=1}^M \left(\sum_{r=1}^R \mathbf{c}_{n_3 r} \delta_r^C(n) \right) x(n-n_3) + \mathcal{V}(n)$$

$$= y_L(n) + y_Q(n) + \begin{bmatrix} \Delta_C(n) \otimes x(n) \\ e(n-1) \\ \vdots \\ e(n-k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \text{vec}(C) \\ d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} + e(n) \quad (34)$$

$$= y_L(n) + y_Q(n) + \varphi_3^T(n) \theta_3 + e(n) \quad (35)$$

Où :

$$y_Q(n) = \sum_{q=1}^Q \omega_q^V(n) \omega_q^U(n) \quad (36)$$

$$\Delta_C(n) = \left[\delta_1^C(n) \quad \delta_2^C(n) \quad \dots \quad \delta_R^C(n) \right]^T \quad (37)$$

θ_3 et $\varphi_3(n)$ sont respectivement le vecteur de paramètres et le vecteur d'observations de dimension $MR+k$.

$$\theta_3 = \left[\text{vec}(C)^T \quad d_1 \quad \dots \quad d_k \right]^T \quad (38)$$

$$\varphi_3(n) = \left[\left(\Delta_C(n) \otimes x(n) \right)^T \quad e(n-1) \quad \dots \quad e(n-k) \right]^T \quad (39)$$

La sortie estimée du modèle SVD-PARAFAC-Volterra d'ordre 3 est :

$$\hat{y}(n) = y_L(n) + y_Q(n) + \tilde{\varphi}_3(n)^T \hat{\theta}_3(n-1) \quad (40)$$

$$\hat{\theta}_3(n) = \left[\text{vec}(\hat{C})^T \quad \hat{d}_1 \quad \dots \quad \hat{d}_k \right]^T \quad (41)$$

$$\tilde{\varphi}_3(n) = \begin{bmatrix} \Delta_c(n) \otimes x(n) \\ \varepsilon(n-1) \\ \vdots \\ \varepsilon(n-k) \end{bmatrix} \quad (42)$$

L'identification du modèle SVD-PARAFAC-Volterra d'ordre 3 par la méthode des moindres carrés étendus alternés implique comme préalable l'existence de trois relations linéaires par rapport aux paramètres, ces dernières sont données par (18), (25) et (35).

$\tilde{\varphi}_1(n)$, $\tilde{\varphi}_2(n)$ et $\tilde{\varphi}_3(n)$ sont les vecteurs des observations, θ_1 , θ_2 et θ_3 sont les vecteurs des paramètres à estimer.

Nous pouvons donc penser de manière intuitive que si nous augmentons le nombre d'observations le problème se ramènera à la résolution de trois systèmes d'équations linéaires.

Dans le cas d'un système bruité nous exécutons N mesures d'observations, nous pouvons écrire d'après les équations (18), (25) et (35) les trois formes matricielles suivantes :

$$Y_N = \phi_{1N} \theta_1 + E_{1N} = \phi_{2N} \theta_2 + E_{2N} = \phi_{3N} \theta_3 + E_{3N} \quad (43)$$

Avec :

$$Y_N = [y(\tau) \quad y(\tau+1) \quad \dots \quad y(\tau+N-1)]^T \quad (44)$$

$$E_{iN} = [\varepsilon_i(\tau) \quad \varepsilon_i(\tau+1) \quad \dots \quad \varepsilon_i(\tau+N-1)]^T; \quad (45)$$

$i = 1, 2, 3$

Où :

$$\varepsilon_1(n) = y(n) - \tilde{\varphi}_1^T(n) \hat{\theta}_1(n-1) \quad (46)$$

$$\varepsilon_2(n) = y(n) - y_L(n) - \tilde{\varphi}_2^T(n) \hat{\theta}_2(n-1) \quad (47)$$

$$\varepsilon_3(n) = y(n) - y_L(n) - y_Q(n) - \tilde{\varphi}_3^T(n) \hat{\theta}_3(n-1) \quad (48)$$

$$\phi_{iN} = [\tilde{\varphi}_i(\tau) \quad \tilde{\varphi}_i(\tau+1) \quad \dots \quad \tilde{\varphi}_i(\tau+N-1)]^T; \quad (49)$$

$i = 1, 2, 3$

Où $\tilde{\varphi}_1(n)$, $\tilde{\varphi}_2(n)$ et $\tilde{\varphi}_3(n)$ sont donnés par (23), (30) et (42).

La méthode des moindres carrés étendus alternés consiste à estimer les vecteurs de paramètres θ_1 , θ_2 et θ_3 qui minimisent les critères J_1 , J_2 et J_3 :

$$J_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E_{iN}^T E_{iN} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon_i^2(k); i = 1, 2, 3 \quad (50)$$

Les vecteurs de paramètres θ_1 , θ_2 et θ_3 qui minimisent dans le sens des moindres carrés étendus et d'une manière alternée (AELS) respectivement les critères J_1 , J_2 et J_3 , peuvent être identifiés en utilisant respectivement les pseudo-inverses des matrices d'observations ϕ_{1N} , ϕ_{2N} et ϕ_{3N} :

$$\hat{\theta}_1 = [\phi_{1N}^T \phi_{1N}]^{-1} \phi_{1N}^T Y_N; \hat{\theta}_2 = [\phi_{2N}^T \phi_{2N}]^{-1} \phi_{2N}^T Y_N \quad (51)$$

$$\hat{\theta}_3 = [\phi_{3N}^T \phi_{3N}]^{-1} \phi_{3N}^T Y_N \quad (52)$$

Les relations (51) et (52) garantissent une meilleure estimation au sens des moindres carrés étendus alternés des vecteurs des paramètres θ_1 , θ_2 et θ_3 . Donc en résumé, les relations (43) permettent la mise en œuvre de l'algorithme AELS et la mise à jour du noyau linéaire \hat{H}_1 , ainsi que les matrices estimées \hat{U} , \hat{V} , \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} éléments des décomposition SVD et PARAFAC du noyau quadratique et du noyau cubique.

Algorithme ARELS (Alternating Recursive Extended Least Squares)

▪ *Initialisation*

* $\theta_i(0)$, $i = 1, 2, 3$

▪ *Mise à jour des composantes du modèle SVD-PARAFAC-Volterra d'ordre 3*

* $x(n) = [x(n-1) \quad x(n-2) \quad \dots \quad x(n-M)]^T$

* $\left\{ \begin{array}{l} \text{Calcul de } \omega_q^u(n) \text{ et } \delta_r^A(n); q=1, \dots, Q; \\ r=1, \dots, R \text{ selon les relations (9)-(12)} \\ \text{Construction de } \Omega_u(n) \text{ et } \Delta_A(n) \text{ selon les relations (14)-(15)} \\ \varepsilon_1(n) = y(n) - \tilde{\varphi}_1^T(n) \hat{\theta}_1(n-1) \\ P_1(n) = P_1(n-1) - \frac{P_1(n-1) \tilde{\varphi}_1(n) \tilde{\varphi}_1^T(n) P_1(n-1)}{1 + \tilde{\varphi}_1^T(n) P_1(n-1) \tilde{\varphi}_1(n)} \\ \hat{\theta}_1(n) = \hat{\theta}_1(n-1) + P_1(n) \tilde{\varphi}_1(n) \varepsilon_1(n) \end{array} \right.$

* $\left\{ \begin{array}{l} \text{Calcul de } y_L(n), \omega_q^v(n) \text{ et } \delta_r^B(n); \\ q=1, \dots, Q; r=1, \dots, R \\ \text{Construction de } \Omega_v(n) \text{ et } \Delta_B(n) \\ \varepsilon_2(n) = y(n) - y_L(n) - \tilde{\varphi}_2^T(n) \hat{\theta}_2(n-1) \\ P_2(n) = P_2(n-1) - \frac{P_2(n-1) \tilde{\varphi}_2(n) \tilde{\varphi}_2^T(n) P_2(n-1)}{1 + \tilde{\varphi}_2^T(n) P_2(n-1) \tilde{\varphi}_2(n)} \\ \hat{\theta}_2(n) = \hat{\theta}_2(n-1) + P_2(n) \tilde{\varphi}_2(n) \varepsilon_2(n) \end{array} \right.$

$$\begin{cases}
\text{Calcul de } y_Q(n) \text{ et } \delta_r^c(n); \\
q = 1, \dots, Q; r = 1, \dots, R \\
\text{Construction de } \Delta_c(n) \\
* \begin{cases}
\varepsilon_3(n) = y(n) - y_L(n) - y_Q(n) - \tilde{\varphi}_3^T(n) \hat{\theta}_3(n-1) \\
P_3(n) = P_3(n-1) - \frac{P_3(n-1) \tilde{\varphi}_3(n) \tilde{\varphi}_3^T(n) P_3(n-1)}{1 + \tilde{\varphi}_3^T(n) P_3(n-1) \tilde{\varphi}_3(n)} \\
\hat{\theta}_3(n) = \hat{\theta}_3(n-1) + P_3(n) \tilde{\varphi}_3(n) \varepsilon_3(n)
\end{cases}
\end{cases}$$

▪ Reconstruction des noyaux du modèle de Volterra

* Noyau linéaire \hat{H}_1

$$\hat{H}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(1) & \hat{\theta}_1(2) & \dots & \hat{\theta}_1(M) \end{bmatrix}^T$$

* Noyau quadratique \hat{H}_2

$$\hat{H}_2(n_1, n_2) = \sum_{q=1}^Q \hat{u}_{n_1 q} \hat{v}_{n_2 q}; \quad n_1, n_2 = 1, \dots, M$$

$$\hat{U} = \text{unvec} \left(\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(M+1) & \hat{\theta}_1(M+2) & \dots & \hat{\theta}_1(M(1+Q)) \end{bmatrix}^T \right)$$

$$\hat{V} = \text{unvec} \left(\begin{bmatrix} \hat{\theta}_2(1) & \dots & \hat{\theta}_2(M*Q) \end{bmatrix}^T \right)$$

unvec est l'opération inverse de *vec* ; elle permet de construire la matrice X à partir du vecteur $\text{vec}(X)$.

* Noyau cubique \hat{H}_3

$$\hat{H}_3(n_1, n_2, n_3) = \sum_{r=1}^R \hat{a}_{n_1 r} \hat{b}_{n_2 r} \hat{c}_{n_3 r}; \quad n_1, n_2, n_3 = 1, \dots, M$$

Avec :

$$\hat{A} = \text{unvec} \left(\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(M(1+Q)+1) & \dots & \hat{\theta}_1(M(1+Q+R)) \end{bmatrix}^T \right)$$

$$\hat{B} = \text{unvec} \left(\begin{bmatrix} \hat{\theta}_2(M*Q+1) & \dots & \hat{\theta}_2(M(R+Q)) \end{bmatrix}^T \right)$$

$$\hat{C} = \text{unvec} \left(\begin{bmatrix} \hat{\theta}_3(1) & \dots & \hat{\theta}_3(M*R) \end{bmatrix}^T \right)$$

▪ Retour à l'étape 2 jusqu'à convergence de l'algorithme

IV. EXEMPLE DE SIMULATION

Considérons le système non linéaire décrit par l'équation récurrente suivante :

$$\begin{aligned}
y(n) = & 0.5 y(n-1) + 0.3 y(n-1) x^2(n-1) + 0.2 x(n-1) \\
& + 0.05 y^2(n-1) + 0.6 x^2(n-1) + \mathcal{V}(n)
\end{aligned}$$

Où $x(n)$ est l'entrée du système choisie comme une séquence gaussienne de moyenne 0.2 et de variance 0.5, $y(n)$ sa sortie et $\mathcal{V}(n)$ une séquence de bruit blanc filtré donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(n) = & e(n) + 0.5 e(n-1) - 0.3 e(n-2) + 0.8 e(n-3) \\
& - 0.1 e(n-4)
\end{aligned}$$

Où $e(n)$ est une séquence de bruit blanc gaussien de variance 0.5. Le modèle de la perturbation est linéaire de type MA et d'ordre $k = 4$. Le nombre de mesures entrées/sorties utilisés pour l'identification est $N = 5000$.

Ce système est modélisé par un modèle SVD-PARAFAC-Volterra d'ordre 3 de mémoire 10, le nombre de facteurs choisi pour la décomposition SVD est $Q = 1$ et celui choisi pour la décomposition PARAFAC est $R = 1$. Le nombre de paramètres à estimer est de $C_{\text{SVD-PARAFAC}} = M(1 + 3R + 2Q) = 10(1 + 3 + 2) = 60$. Le nombre de paramètres du modèle de Volterra standard d'ordre 3 est de $C(10, 3) = M(1 + M + M^2) = 10(1 + 10 + 100) = 1110$,

ainsi le taux de réduction de la complexité en pourcentage (TRC) en passant du modèle de Volterra standard d'ordre 3 au modèle SVD-PARAFAC-Volterra d'ordre 3 est égale à 94.59%.

L'identification des composantes du modèle sélectionné est accomplie par l'algorithme ARLS [2] en premier lieu puis et par l'algorithme ARELS proposé. Les deux méthodes permettent à chaque itération de mettre à jour le vecteur H_1 contenant les coefficients du noyau linéaire, les matrices U et V résultantes de la décomposition SVD de la matrice associée au noyau quadratique et les matrices A , B et C issues de la décomposition PARAFAC du tenseur associé au noyau cubique de Volterra. Les cinq matrices et le vecteur précédemment identifiés permettent de reconstruire le noyau linéaire, le noyau quadratique et le noyau cubique de Volterra du système simulé. Les performances des méthodes d'identification proposées sont évaluées en utilisant l'Erreur Quadratique Moyenne Normalisée (EQMN) entre la sortie du système simulé $y(n)$ et celle du modèle SVD-PARAFAC-Volterra $\hat{y}(n)$, définie comme suit :

$$\text{EQMN} = \frac{\sum_{n=1}^N (y(n) - \hat{y}(n))^2}{\sum_{n=1}^N (y(n))^2}$$

Nous procédons à l'identification des composantes du modèle SVD-PARAFAC-Volterra du système donné. Nous commençons par l'utilisation de l'algorithme ARLS (Moindres Carré Récursifs Alternés). L'évolution de l'erreur quadratique moyenne normalisée en fonction du nombre d'itérations pour un rapport signal sur bruit de 20dB est donnée par la figure 1.

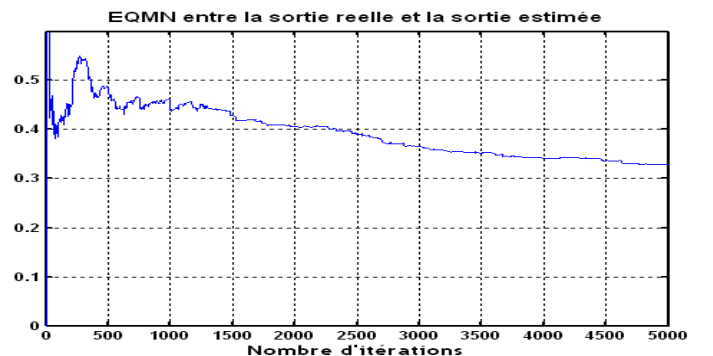


Fig. 1: Evolution de l'EQMN pour RSB = 20 dB

La sortie reconstituée à l'aide du modèle SVD-PARAFAC-Volterra dont les composantes sont estimées par l'ARLS à la convergence diffère largement du signal réel comme en témoigne la figure 2 avec une erreur quadratique moyenne normalisée de $32.8 \cdot 10^{-2}$.

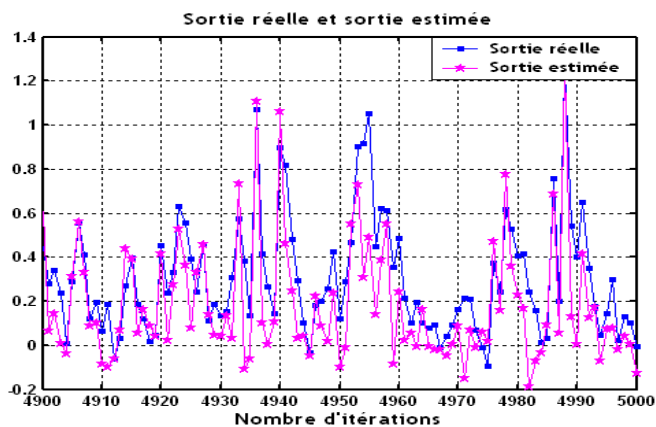


Fig. 2 : Evolution de la sortie réelle et de la sortie estimée

L'estimation des composantes du modèle SVD-PARAFAC-Volterra par la méthode des moindres carrés récursifs alternés (ARLS) est biaisée. Pour des systèmes non linéaires stochastiques, l'exploitation de la méthode des moindres carrés étendus alternés (AELS) pour l'identification des composantes du modèle SVD-PARAFAC-Volterra devient nécessaire. La figure 3 montre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne normalisée du système simulé par l'algorithme ARELS en fonction du nombre d'itérations pour un rapport signal sur bruit de 20dB.

La sortie reconstituée à l'aide du modèle SVD-PARAFAC-Volterra à la convergence diffère peu du signal réel comme en témoigne la figure 4 avec une erreur quadratique moyenne normalisée de $5.46 \cdot 10^{-2}$.

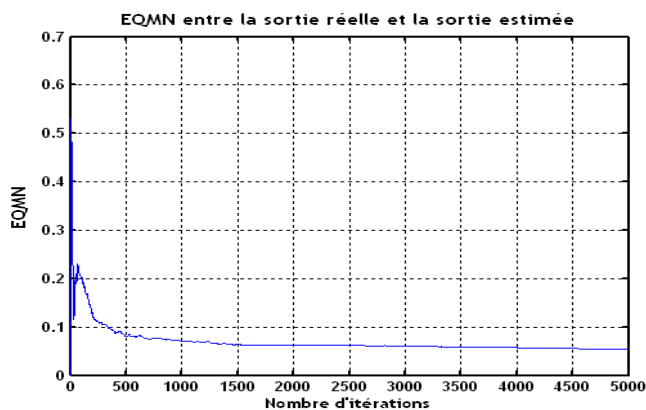


Fig. 3: Evolution de l'EQMN pour RSB = 20 dB

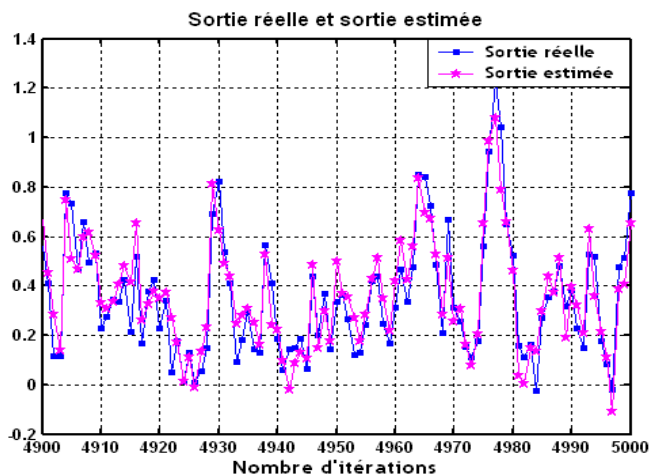


Fig. 4 : Evolution de la sortie réelle et de la sortie estimée

IV. CONCLUSION

Le travail présenté dans ce papier a porté sur la modélisation et l'identification des systèmes non linéaires stochastiques représentés à l'aide d'un modèle de Volterra dont la complexité est réduite par décomposition tensorielle. Pour un modèle de Volterra d'ordre 3 on a procédé à la décomposition en valeurs singulières (SVD) du noyau quadratique et à la décomposition tensorielle PARAFAC du noyau cubique et le modèle résultant est intitulé SVD-PARAFAC-Volterra cubique. Pour identifier les paramètres d'un tel modèle, on a procédé à l'adaptation de la méthode des moindres carrés alternés (ALS) aux cas stochastiques et on a proposé à cet insu la méthode des moindres carrés récursifs étendus alternés. Le modèle SVD-PARAFAC-Volterra estimé a été validé en simulation sur un processus non linéaire stochastique et les performances en terme d'erreur quadratique moyenne normalisée et de taux de réduction de complexité sont très satisfaisantes.

REFERENCES

- [1]. A. KHOUAJA. "Modélisation et Identification de Systèmes Non-Linéaires à l'aide de Modèles de Volterra à Complexité Réduite", Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Mars 2005.
- [2]. A. KHOUAJA et G. FAVIER. Identification of PARAFAC-Volterra cubic models using an alternating recursive least-squares algorithm. Dans Proceedings of 12th European Signal Processing Conference EUSIPCO, Vienna, Austria, Septembre 2004.
- [3]. A.KHOUAJA, A. Y. KIBANGOU, et G. FAVIER. "Third-order Volterra kernels complexity reduction using PARAFAC". IEEE International Symposium on Control, Communications and Signal Processing — ISCCSP'2004, pages 857–860, Hammamet, Tunisie, Mars 2004
- [4]. A. Y. KIBANGOU. "Modèles de Volterra à complexité réduite : estimation paramétrique et application à l'égalisation des canaux de communication". Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Janvier 2005.