

Influence de la paramétrisation de Youla-Kučera sur le volume des ensembles invariants

Anamaria LUCA¹, Pedro RODRIGUEZ-AYERBE¹, Didier DUMUR¹

¹Département d'Automatique
SUPELEC Sciences des Systèmes (E3S), EA 4454
3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France.
anamaria.luca@supelec.fr; pedro.rodriguez@supelec.fr; didier.dumur@supelec.fr

Résumé— Cet article propose une nouvelle technique permettant de déterminer les ensembles ellipsoïdaux positifs invariants minimal et maximal pour des systèmes linéaires à temps discret soumis à des perturbations et contraintes physiques. Pour la loi de commande considérée, l'état du système est estimé à l'aide d'un observateur et la robustesse est garantie grâce à la synthèse d'un paramètre de Youla. L'analyse proposée montre que l'impact positif du paramètre de Youla sur la fonction de sensibilité peut être transposé en termes de diminution du volume de l'ensemble ellipsoïdal minimal ou de l'augmentation du volume de l'ensemble maximal. L'ensemble minimal permet de mesurer l'influence des perturbations et incertitudes sur l'évolution du système et l'ensemble maximal permet de mesurer la région de l'espace dans laquelle les contraintes sont satisfaites. Une application à la commande en position d'un moteur alternatif asynchrone illustre l'influence du paramètre de Youla sur les volumes des ensembles invariants.

Mots-clés— Contraintes, ellipsoïdes, invariance, inégalités linéaires matricielles (LMI), robustesse, S - procédure.

I. INTRODUCTION

L'utilisation des ensembles invariants pour la synthèse de lois de commande robustes a connu un développement significatif au cours des dernières années. Ainsi, pour les systèmes sous contraintes, de nombreuses techniques utilisant les ensembles invariants ont été proposées : [8] a considéré la commande prédictive sous contraintes pour des systèmes incertains décrits sous forme polytopique ou ayant une incertitude structurée dans la boucle ; [11] a également travaillé avec la commande prédictive sous contraintes et des incertitudes polyédrales mais en utilisant l'invariance périodique ; [2] a traité des systèmes soumis à des perturbations bornées. Dans cet article, nous considérons des systèmes linéaires discrets soumis à des perturbations bornées. Notons en effet que les incertitudes de modèle peuvent se représenter de façon équivalente par une perturbation appropriée. De plus, l'état est supposé non accessible de sorte qu'un observateur doit être impérativement inclus avec le correcteur. Ce type de correcteur peut être ensuite robustifié, généralement hors-ligne, avec un paramètre de Youla (ou paramètre Q), comme illustré par plusieurs auteurs ([9], [10], [15]). Le paramètre de Youla permet de robustifier le correcteur vis-à-vis des incertitudes ou des perturbations sans modifier le comportement entrée-sortie. La synthèse de ce paramètre est réalisée en utilisant des techniques qui améliorent la fonction de sensibilité de la boucle fermée vis-à-vis des incertitudes considérées. Cet article propose une analyse du paramètre Q au moyen des techniques ensemblistes.

Un *ensemble positif invariant* peut être brièvement défini comme un sous-ensemble de l'espace d'état ayant la propriété que, s'il contient l'état du système à un instant donné, alors il le contiendra également lors de son évolution future (voir l'Annexe). L'état entrant dans cet ensemble n'en sortira donc jamais. Un ensemble est *invariant* si l'inclusion de l'état à un instant

donné implique l'inclusion dans le futur et dans le passé [1].

L'existence d'un ensemble invariant est une étape importante dans la solution de nombreux problèmes de synthèse, en particulier s'il faut considérer la satisfaction des contraintes. Une autre catégorie de problèmes traités au moyen d'ensembles invariants est celle des systèmes incertains ou perturbés, pour cette classe la notion d'*invariance positive robuste* est utilisée [1]. Dans ce sens, l'objectif est ici de déterminer les ensembles positifs invariants robustes pour des systèmes soumis à des contraintes et affectés par des perturbations bornées.

Par ailleurs, la théorie des ensembles invariants fournit un cadre théorique approprié pour traiter le problème de stabilité. L'existence d'un ensemble invariant (ellipsoïdal ou polytopique) est équivalente à l'existence d'une fonction de Lyapunov et par conséquent est équivalente à un test de stabilité [13]. En présence de bruit ou d'incertitudes, la notion de stabilité entrée-état (input to state stability - ISS) est utilisée car il n'est pas possible de garantir que l'origine est asymptotiquement stable ([5], Annexe).

Les ensembles invariants les plus utilisés pour approximer les ensembles invariants réels sont de type ellipsoïdal, car ils peuvent être aisément associés à des outils puissants tels que l'équation de Lyapunov ou les inégalités linéaires matricielles (Linear Matrix Inequalities - LMI - [14], [2]). Cet article envisage donc de définir les ellipsoïdes invariants maximaux et minimaux pour des systèmes linéaires à temps discret, soumis à des contraintes et perturbations, dont l'état est estimé via un observateur et dont la fonction de sensibilité est modifiée par un paramètre de Youla. A partir des concepts précédents, ces ellipsoïdes garantissent que l'état reste à l'intérieur dès lors qu'il y arrive, que les contraintes sont satisfaites et que l'*input to state stability* est assurée. L'ellipsoïde positif invariant maximal correspond à la plus grande région ellipsoïdale de l'espace pour laquelle les contraintes sont satisfaites malgré l'influence des incertitudes et perturbations considérées. L'ellipsoïde positif invariant minimal est le plus petit ellipsoïde tel que le système étant à l'équilibre et en présence de bruit et de contraintes, l'état ne traverse pas ces frontières. Le volume de ces ellipsoïdes est corrélé à l'influence des perturbations sur l'évolution du système en régulation en considérant des contraintes sur l'entrée ; ainsi un ensemble minimal de faible volume ou un ensemble maximal de volume important (par rapport à l'ellipsoïde sans perturbations) correspond à un système commandé peu sensible aux perturbations considérées. L'apport proposé ici consiste avant tout en la manière de calculer les ensembles ellipsoïdaux invariants maximal et minimal pour le type de système considéré et en l'analyse de l'influence du paramètre de Youla sur leur volume.

L'article est organisé comme suit. Des notations et préliminaires nécessaires à la compréhension sont rappelés dans la section 2. La section 3 présente les principaux résultats liés à la description de la technique utilisée pour trouver les ellipsoïdes invariants maximal et minimal pour des systèmes linéaires à temps discret avec observateur, paramètre de Youla, contraintes sur la commande et bruit d'état et de mesure. Ces résultats sont exprimés en termes de LMI, très populaires dans la littérature spécialisée puisqu'elles impliquent des outils numériques efficaces pour leur manipulation. Les résultats obtenus en simulation en section 4 illustrent l'influence de la paramétrisation de Youla sur le volume des ellipsoïdes. Des remarques finales et conclusions sont données en section 5. Enfin, les définitions et les théorèmes les plus appropriés utilisés ici sont présentés en annexe.

II. FORMULATION DU PROBLÈME

Soit le système linéaire à temps discret :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_\omega \omega(k), \\ y(k) &= Cx(k) + B_v v(k). \end{aligned} \quad (1)$$

L'observateur mis en oeuvre pour reconstruire l'état a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k). \end{aligned} \quad (2)$$

Nous considérons qu'un paramètre Q a été préalablement synthétisé [15], afin d'améliorer la robustesse d'un correcteur initial associé à l'observateur :

$$\begin{aligned} x_Q(k+1) &= A_Q x_Q(k) + B_Q \tilde{y}(k), \\ \tilde{u}(k) &= C_Q x_Q(k) + D_Q \tilde{y}(k), \\ \tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}(k). \end{aligned} \quad (3)$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ la commande, $y \in \mathbb{R}^p$ la sortie, $\omega \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ le bruit d'état, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ le bruit de mesure, $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ l'état estimé, $x_Q \in \mathbb{R}^{n_q}$ l'état du paramètre de Youla, $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$ la sortie de Q , $\tilde{y} \in \mathbb{R}^p$ l'entrée de Q , $L \in \mathbb{R}^{n_x \times p}$ est le gain de l'observateur et $A_Q \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$, $B_Q \in \mathbb{R}^{n_q \times p}$, $C_Q \in \mathbb{R}^{m \times n_q}$, $D_Q \in \mathbb{R}^{m \times p}$ constituent la représentation d'état du paramètre de Youla. La Fig. 1 illustre l'architecture proposée avec le correcteur, l'observateur et le paramètre de Youla.

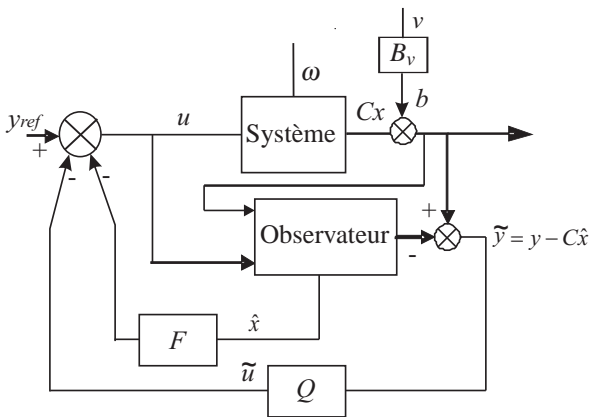


Fig. 1. Correcteur dans l'espace d'état avec le paramètre de Youla.

La loi de commande supposée connue est donnée par :

$$u(k) = -F\hat{x}(k) - \tilde{u}(k). \quad (4)$$

On considère également des bornes sur la norme Euclidienne de la commande u :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}. \quad (5)$$

Le vecteur de bruit regroupant les bruits d'état et de mesure $n = [\omega^T v^T]^T$ est supposé borné :

$$\|n\|_2 \leq 1. \quad (6)$$

Remarque 1 : Les contraintes sur l'entrée sont des contraintes dures représentant classiquement des limitations physiques au niveau du processus qui ne peuvent pas être relaxées.

- Pour le système avec observateur, il convient d'introduire la représentation d'état augmentée suivante :

$$x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o n(k), \quad (7)$$

$$\text{où : } A_o = \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} B_\omega & 0 \\ B_\omega & -LB_v \end{bmatrix},$$

$$x_o(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix} \text{ et } \varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k) \text{ est l'erreur d'estimation.}$$

La commande u est donnée par :

$$u(k) = -F\hat{x}(k) = F_o x_o(k), \quad (8)$$

où :

$$F_o = \begin{bmatrix} -F & F \end{bmatrix}.$$

- Si la paramétrisation de Youla est introduite, la représentation d'état augmentée devient :

$$x_y(k+1) = A_y x_y(k) + B_y n(k), \quad (9)$$

où

$$A_y = \begin{bmatrix} A - BF & BF - BD_Q C & -BC_Q \\ 0 & A - LC & 0 \\ 0 & B_Q C & A_Q \end{bmatrix},$$

$$B_y = \begin{bmatrix} B_\omega & -BD_Q B_v \\ B_\omega & -LB_v \\ 0 & B_Q B_v \end{bmatrix}, x_y(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \varepsilon(k) \\ x_Q(k) \end{bmatrix}.$$

La commande a alors la forme :

$$u(k) = -F_x \cdot x_y(k) - F_n \cdot n(k), \quad (10)$$

$$\text{avec } F_x = \begin{bmatrix} F & -F + D_Q C & C_Q \end{bmatrix}, F_n = \begin{bmatrix} 0 & D_Q B_v \end{bmatrix}.$$

III. RÉSULTATS PRINCIPAUX

Comme mentionné précédemment, l'objectif est de trouver l'ensemble invariant ellipsoïdal minimal (ou maximal) qui assure l'invariance robuste. Le problème est résolu en recherchant une matrice symétrique définie positive P pour l'ensemble minimal (ou $G = P^{-1}$ pour l'ensemble maximal), qui définit l'ellipsoïde invariant $E = \{x_* \mid x_*^T P x_* \leq 1\}$ (ou $E = \{x_* \mid x_*^T G^{-1} x_* \leq 1\}$) tel que le volume de l'intersection avec l'espace d'état soit réduit au minimum (ou la projection sur l'espace d'état est maximisée), en présence de contraintes sur la commande et de bruit. L'intersection (projection) de E avec (sur) le sous-espace de x est donnée par $E_x = \{x \mid x^T T P T^T x \leq 1\}$ (ou $E_x = \{x \mid x^T (T G T^T)^{-1} x \leq 1\}$), où $x = T x_*$ est la fonction d'intersection (projection) retenue selon la signification de x_* , qui peut être soit x_o soit x_y . La Fig. 2 représente ces notions de projection

et d'intersection considérées. Pour la projection, on recherche l'ellipsoïde ayant la plus grande projection sur x , cet ellipsoïde se situe à l'intérieur de la plus grande région pour laquelle les contraintes et l'invariance sont satisfaites. Pour l'intersection, on recherche l'ellipsoïde ayant la plus petite intersection avec x , dans ce cas l'ellipsoïde est situé à l'extérieur de la plus petite région pour laquelle l'invariance et les contraintes sont satisfaites.

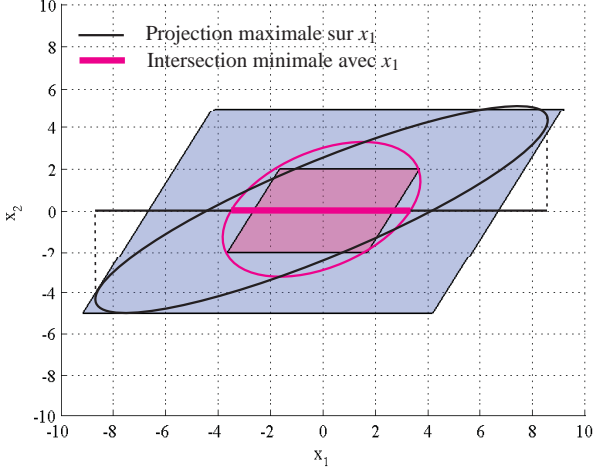


Fig. 2. Projection et intersection d'un ellipsoïde sur un sous-espace de x .

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes permettant l'analyse en termes d'ellipsoïdes invariants minimaux et maximaux robustes.

Théorème 1 : Soit le système linéaire à temps discret (1) :

1. Supposons qu'un observateur soit utilisé pour estimer l'état, alors le système s'écrit sous la forme (7) et la loi de commande est donnée par (8). La minimisation de E_x sujet à la contrainte d'entrée (5) et à la présence du bruit n ($n^T n \leq 1$) est réalisée en résolvant la minimisation suivante (correspondant à un problème de programmation semi-définie SDP) :

$$\min_P -\log \det(TPT^T) \quad (11)$$

sujet à :

$$\begin{bmatrix} A_o^T P A_o - P + \alpha P & A_o^T P B_o \\ B_o^T P A_o & -\alpha I + B_o^T P B_o \end{bmatrix} \prec 0 \quad (12)$$

et

$$\begin{bmatrix} P & F_o^T \\ F_o & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (13)$$

2. Si la paramétrisation de Youla est prise en considération, le système s'écrit sous la forme (9) et la loi de commande est donnée par (10). Dans ce cas la minimisation de E_x sujet à la contrainte d'entrée (5) et à la présence du bruit n ($n^T n \leq 1$) est réalisée en résolvant :

$$\min_P -\log \det(TPT^T) \quad (14)$$

sujet à :

$$\begin{bmatrix} A_y^T P A_y - P + \alpha P & A_y^T P B_y \\ B_y^T P A_y & -\alpha I + B_y^T P B_y \end{bmatrix} \prec 0 \quad (15)$$

et

$$\begin{bmatrix} P & F_x^T & 0 \\ F_x & u_{max}^2 I & F_n \\ 0 & F_n^T & I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (16)$$

Preuve 1 : Pour détailler comment ont été obtenues les LMI ((12), (15)) qui nous assurent l'invariance en présence de bruit (et donc aussi l'ISS), nous nous servirons de la fonction de Lyapunov $V = x^T P x$, $P = P^T \succ 0$.

Pour l'invariance nous avons la condition $V(k+1) - V(k) < 0$. Ceci nous mène à :

$$\begin{bmatrix} x_* \\ n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_*^T P A_* - P & A_*^T P B_* \\ B_*^T P A_* & B_*^T P B_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ n \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

où A_* peut être A_o ou A_y et B_* peut être B_o ou B_y , selon le problème considéré. La condition ci-dessus indique que la fonction quadratique de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ est strictement décroissante sur chaque trajectoire possible du système.

Par ailleurs, les relations $x_*^T P x_* \geq 1$ et $n^T n \leq 1$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x_* \\ n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ n \end{bmatrix} \geq 0. \quad (18)$$

La S-procédure permet alors d'affirmer ([6]) que l'inégalité (18) implique (17) s'il existe $\alpha \geq 0$ tel que :

$$-\begin{bmatrix} A_*^T P A_* - P & A_*^T P B_* \\ B_*^T P A_* & B_*^T P B_* \end{bmatrix} \succ \alpha \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Notons que l'inégalité matricielle est en fait la LMI (12) (ou (15)).

La LMI qui nous assure que les contraintes sur la commande pour le système (7) sont satisfaites est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \|F_o x_o\|_2^2 = \|F_o P^{-1/2} P^{1/2} x_o\|_2^2 \leq \\ &\leq \|F_o P^{-1/2}\|_2^2 \|P^{1/2} x_o\|_2^2 = \\ &= \lambda_{max}(F_o P^{-1/2} P^{-1/2} F_o^T) (x_o^T P^{1/2} P^{1/2} x_o) \leq \\ &\leq \lambda_{max}(F_o P^{-1} F_o^T) \end{aligned}$$

où λ_{max} est la valeur propre maximale.

A partir de cette relation, en utilisant le théorème de Schur, on voit que l'inégalité $\|u\|_2 \leq u_{max}$ est satisfaite si la LMI (13) est faisable.

Quand la paramétrisation de Youla est introduite, il vient :

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \|F_x x_y + F_n n\|_2^2 \leq \|F_x x_y\|_2^2 + \|F_n n\|_2^2 \leq \\ &\leq \|F_x P^{-1/2}\|_2^2 \|P^{1/2} x_y\|_2^2 + \|F_n\|_2^2 \|n\|_2^2 = \\ &= \lambda_{max}(F_x P^{-1} F_x^T) (x_y^T P x_y) + \lambda_{max}(F_n F_n^T) (n^T n) \leq \\ &\leq \lambda_{max}(F_x P^{-1} F_x^T) + \lambda_{max}(F_n F_n^T). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème du Schur on obtient que $\|u\|_2 \leq u_{max}$ si la LMI suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} P & F_x^T \\ F_x & u_{max}^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ F_n \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 0 \\ F_n \end{bmatrix}^T \succeq 0.$$

Enfin, si l'on utilise de nouveau le théorème de Schur, on obtient la LMI (16).

Remarque 2 : L'ellipsoïde minimal est, pour un système linéaire globalement stable, l'ensemble 0-reachable (ou 0-accessible) [1]. Les ensembles accessibles sont utiles pour décrire les effets d'une perturbation bornée sur un système, ainsi

plus l'ensemble minimal est petit, plus l'effet de la perturbation est faible.

Théorème 2 : Pour l'ellipsoïde invariant maximal, les résultats sont les suivants :

1. Pour le système (7) avec la loi de commande (8), la maximisation de E_x sujet à la contrainte sur la commande (5) et à la présence du bruit n ($n^T n \leq 1$) est réalisée en résolvant le problème SDP :

$$\max_G \log \det(TGT^T) \quad (19)$$

sujet à :

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & GA_o^T \\ 0 & \alpha I & 0 & B_o^T \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 \\ A_o G & B_o & 0 & G \end{bmatrix} \succ 0 \quad (20)$$

et

$$\begin{bmatrix} G & GF_o^T \\ F_o G & u_{max}^2 I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (21)$$

2. Pour le système sous la forme (9) avec la loi de commande correspondante (10), la maximisation de E_x sujet à la contrainte sur la commande (5) et à la présence du bruit n ($n^T n \leq 1$) est réalisée par :

$$\max_G \log \det(TGT^T) \quad (22)$$

sujet à :

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & GA_y^T \\ 0 & \alpha I & 0 & B_y^T \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 \\ A_y G & B_y & 0 & G \end{bmatrix} \succ 0 \quad (23)$$

et

$$\begin{bmatrix} G & GF_x^T & 0 \\ F_x G & u_{max}^2 I & F_n \\ 0 & F_n^T & I \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (24)$$

Preuve 2 : Pour obtenir (20) ou (23) nous pouvons écrire la LMI (12) ou (15) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ PA_* & PB_* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ PA_* & PB_* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -\alpha I \end{bmatrix} \prec 0.$$

En appliquant le théorème de Schur nous avons :

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & A_*^T P \\ 0 & \alpha I & 0 & B_*^T P \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 \\ PA_* & PB_* & 0 & P \end{bmatrix} \succ 0. \quad (25)$$

En pré-et post-multipliant cette inégalité par $\text{diag}(G, I, G, G)$ on obtient la LMI (20) respectivement (23).

De l'inégalité (13) nous dérivons par congruence avec $\text{diag}(G, I)$ la LMI (21), par la même opération avec $\text{diag}(G, I, I)$ nous obtenons la LMI (24) de la LMI (16).

Remarque 3 : Le volume d'un ellipsoïde est inversement proportionnel au produit des valeurs propres, c'est-à-dire le déterminant [4]. Par conséquent, pour trouver l'ellipsoïde minimal il convient de résoudre le problème $\min \det(P^{-1})$ et pour trouver l'ellipsoïde maximal le problème à résoudre est $\max \det(P^{-1})$. Cependant, les outils de MatLab utilisés dans ce cas sont conçus pour trouver le minimum d'un problème

convexe. Les problèmes précédents sont alors rendus convexes grâce à la fonction "logarithme", soit à résoudre en utilisant MatLab pour trouver l'ellipsoïde minimal et maximal les problèmes $\min -\log \det(P)$, $\min -\log \det(G)$ respectivement [13].

Remarque 4 : La raison pour laquelle on minimise (maximise) l'intersection (projection) et non le volume de l'ellipsoïde complet (pour le système avec observateur ou avec observateur et Youla) vient uniquement du fait que seul l'état $x(k)$ du système initial nous intéresse.

Remarque 5 : Le bruit ou les perturbations ont une influence directe sur la taille des ellipsoïdes trouvés. Plus le bruit considéré est important, plus le volume de l'ellipsoïde minimal est grand, et plus l'ellipsoïde maximal est petit.

Remarque 6 : La présence de α fait que nos inégalités deviennent des BMI (inégalités bilinéaires matricielles) mais comme α est un scalaire alors un α_{optim} peut être trouvé en exécutant une simple boucle récursive. Le solveur PENBMI [7] sous MatLab peut être utilisé pour éviter cette boucle.

Remarque 7 : Les inégalités (13), (16), (21) et (24) représentent des contraintes LMI suffisantes afin de satisfaire les contraintes spécifiées sur les variables manipulées. Puisque les perturbations influencent le volume des ellipsoïdes minimal et maximal, en présence d'une loi de commande fixe, un ensemble invariant n'existera pas si la valeur de u_{max} n'est pas suffisamment grande.

IV. EXEMPLE

Dans cette section, nous présentons un exemple qui illustre l'influence du paramètre de Youla sur le volume des ellipsoïdes. Les solveurs PENBMI et SEDUMI [16] (dans l'environnement MatLab) ont été utilisés pour calculer la solution de notre problème. Avec cet exemple, nous nous proposons de contrôler la position d'un moteur à induction. Pour ce moteur, le modèle entre le couple et la position est donné dans [12] sous la forme :

$$H_0 = \frac{\theta(s)}{\tau_{ref}(s)} = \frac{1}{s(f + Js)}$$

où s est la variable de Laplace.

Pour $f = 0,01Nm(rad/s)^{-1}$, $J = 0,007Kgm^2$ et la période d'échantillonnage $1,0724 ms$ nous avons :

$$H = \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{\theta(k)}{\tau_{ref}(k)} = \frac{10^{-4}(0,821q^{-1} + 0,8206q^{-2})}{(1 - q^{-1})(1 - 0,998q^{-1})}.$$

Pour annuler les erreurs en régime permanent vis-à-vis d'une perturbation en échelon, une action intégrale est ajoutée :

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k).$$

Le système obtenu se met sous la forme :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\Delta u(k) + B_\omega \omega(k), \\ y(k) &= Cx(k) + B_\nu v(k), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1,9980 & -0,9980 & 0,0156 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0156 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= [0,0053 \quad 0,0053 \quad 0], B_\nu = 0,001, \\ F &= [9,4739 \quad -8,7277 \quad 0,9417]. \end{aligned}$$

Un observateur a été calculé de façon à placer ses pôles à $[0,8 \ 0,81 \ 0,82]$. Le gain correspondant est : $L = [58,9993 \ 49,1245 \ 41,6667]^T$. Le retour d'état a été obtenu avec une méthode MPC (model predictive control) afin d'avoir un comportement entrée/sortie souhaité (40ms pour le temps de réponse et 5% pour le dépassement). L'observateur a été calculé afin d'avoir une dynamique plus rapide que la boucle fermée.

En utilisant les techniques décrites dans [12], nous pouvons synthétiser un paramètre de Youla permettant d'améliorer la robustesse vis-à-vis d'incertitudes additives non structurées :

$$A_Q = \begin{bmatrix} 1,343 & -0,3723 & -0,120 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1250 & 0 \end{bmatrix}, B_Q = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_Q = [-7,1015 \ 2,5361 \ -0,3145], D_Q = 41,9289.$$

La Figure 3 montre la fonction de sensibilité vis-à-vis de cette incertitude additive non structurée. Le tracé en pointillé correspond au système avec observateur (7) et le tracé en trait continu correspond au système avec observateur et paramètre de Youla (9). La norme H_∞ étant plus petite avec le paramètre de Youla, la robustesse vis-à-vis de ce type d'incertitude a été améliorée.

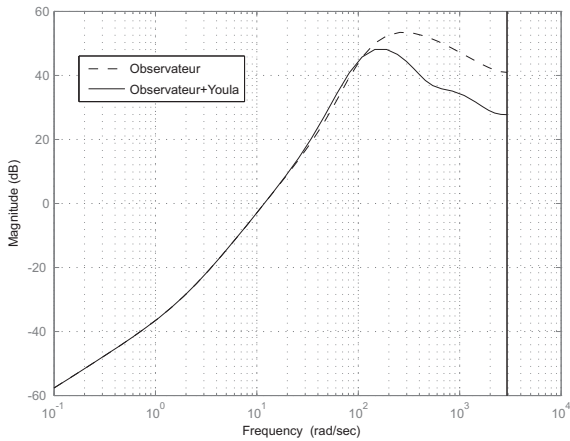


Fig. 3. Fonction de sensibilité.

Comme le paramètre de Youla considéré dans cet exemple a été synthétisé pour diminuer l'influence d'une incertitude additive, ce qui peut être considéré comme une perturbation à la sortie du système, on prend par la suite $B_\omega = [0 \ 0 \ 0]^T$.

On impose la contrainte sur la commande $u_{max} = 15V$.

Pour le système sans paramètre Q (7), le α optimal pour lequel nous obtenons la plus petite intersection avec le sous-espace x est $\alpha_{opt} = 0,0407$, pour cette valeur de α le volume de l'intersection ellipsoïdale minimale est $V_{PO} = 1,22 \cdot 10^{-3}$. Pour la projection maximale nous obtenons $\alpha_{opt} = 0,003491$ et le volume associé est $V_{GO} = 5,8411 \cdot 10^7$. En introduisant le paramètre de Youla les résultats sont remarquables. En effet, nous obtenons $\alpha_{opt} = 0,02935$ pour l'intersection minimale ce qui donne $V_{PY} = 1,6290 \cdot 10^{-4}$ comme volume minimal de l'intersection, et $\alpha_{opt} = 0,000301$ pour la projection maximale avec un volume $V_{GY} = 7,0351 \cdot 10^8$.

La Figure 4 illustre l'intersection minimale avec le sous-espace x pour le système avec observateur (7) (ellipsoïde noir) et pour le système avec observateur et paramètre Q (9) (ellipsoïde clair).

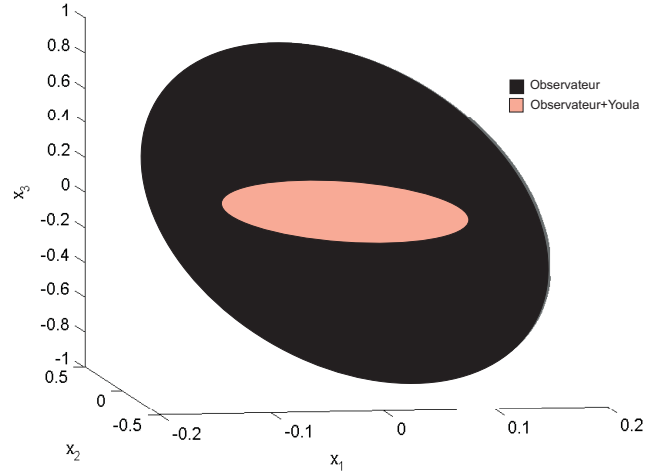


Fig. 4. Intersection minimale.

De même la Figure 5 donne la projection maximale sur le sous-espace x pour le système sous la forme (7) sans paramètre Q (ellipsoïde noir) et pour le système sous la forme (9) avec paramètre Q (ellipsoïde clair).

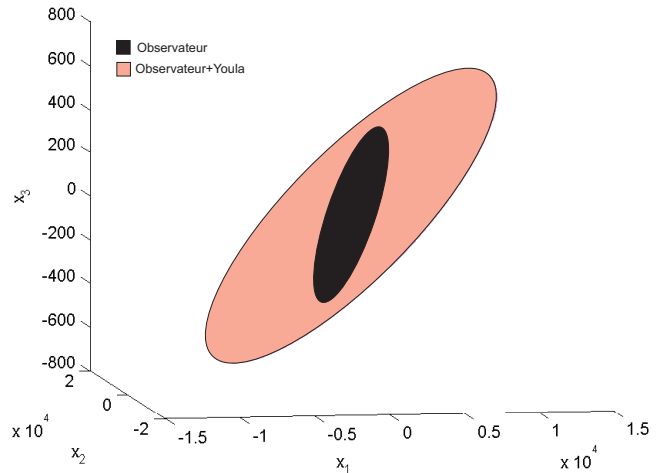


Fig. 5. Projection maximale.

On constate effectivement que le paramètre Q a diminué le volume de l'ellipsoïde minimal et a augmenté celui de l'ellipsoïde maximal. En augmentant l'espace de l'état le volume de l'ellipsoïde maximal obtenu sera plus grand (ou minimum égal) que celui de l'ellipsoïde obtenu pour le système non augmenté. De même, le volume de l'ellipsoïde minimal obtenu pour le système augmenté sera plus petit (ou maximum égal) que celui de l'ellipsoïde obtenu pour le système non augmenté.

V. CONCLUSION

Cet article présente une démarche pratique permettant d'élaborer les ellipsoïdes positifs invariants robustes maximal et minimal lorsqu'un paramètre de Youla est utilisé pour robustifier un correcteur incluant une partie observateur. Ces ensembles sont obtenus en utilisant des techniques LMI. Compte tenu de la présence du bruit et des contraintes sur la commande, l'approche proposée est un outil puissant d'analyse en perspec-

tive de la synthèse. La recherche de l'ellipsoïde maximal fournit la plus grande région ellipsoïdale de l'espace d'état pour laquelle les contraintes sont satisfaites tout en garantissant la stabilité ISS. L'ellipsoïde minimal nous assure que la trajectoire de l'état sera toujours dans l'ensemble pour un bruit n ($n^T n \leq 1$), que les contraintes seront satisfaites, avec stabilité ISS garantie. Enfin nous avons montré que le paramètre de Youla donne un ensemble invariant positif robuste minimal (maximal) *plus petit (plus grand)*, ce qui signifie que les perturbations ont moins d'influence sur le système asservi. Tous ces outils développés ici pour l'analyse seront utilisés comme perspective pour synthétiser un paramètre de Youla afin de robustifier un correcteur tenant compte de contraintes sur le processus.

RÉFÉRENCES

- [1] F. Blanchini and S. Miani, *Set-Theoretic Methods in Control, Systems & Control* : Foundations & Applications, Birkhauser –Boston, Basel–Berlin 2007
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia 1994
- [3] S. Boyd, *Linear matrix inequalities and the S-procedure*, Course EE363, Lecture 15, Hiver 2008-09, Stanford
- [4] S. Boyd, et L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2003
- [5] P.J. Goulart, E.C. Kerrigan and J.M. Maciejowski, *Optimization over state feedback policies for robust control with constraints*, Automatica, Vol. 42, 523-533 2005
- [6] U.T. Jonsson, *A Lecture on the S-Procedure*, Division of Optimisation and Systems Theory Royal Institute of Technology, Stockholm, Suède 2001
- [7] M. Koèvara and S. Stingl, *PENBMI user's guide*, Penopt GbR, version 2.1, 2006, disponible sur www.penopt.com
- [8] M.V. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari, *Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities*, Automatica, Vol. 32, No. 10, pp 1361-1379, 1996
- [9] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter and A. O. T. Chang, *Stable generalised predictive control : an algorithm with guaranteed stability*, IEEE proceedings. Part D. Control theory and applications, Vol. 139(4), 349-362 1992
- [10] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter and J. Schuurmans, *Efficient robust predictive control*, Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California, pp.4283-4287, Juin 1999
- [11] B. Kouvaritakis, Y. Il Lee, *Constrained robust model predictive control based on periodic invariance*, Automatica, Vol. 42, pp.2175-2181, 2006
- [12] P. Rodriguez, D. Dumur, *Generalized Predictive Control Robustification Under Frequency and Time-Domain Constraints*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 13(4), 577-587.
- [13] J.A. Rossiter, *Model-Based Predictive Control, A Practical Approach*, CRC Press, 2003
- [14] C. Sherer and S. Weiland, *Linear Matrix Inequalities in Control*, Delf Center for Systems and Control & Eindhoven University of Technology, Pays-Bas 2004
- [15] C. Stoica, P. Rodriguez Ayerbe and D. Dumur, *Off-line Robustification of Model Predictive Control for Uncertain Multivariable Systems*, 17th IFAC World Congress on Automatic Control, pp. 7832-7837, Seoul Korea, July 2008
- [16] J. F. Sturm et le Laboratoire d'Optimisation Avancée de l'Université McMaster, *SeDuMi version 1.1R3*, Canada, Octobre 2006

VI. ANNEXE

Soit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ l'état du système, $v(t) \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^q$ une entrée externe et \mathcal{V} un ensemble compact, Δ l'opérateur dérivé dans un contexte de temps continu ou l'opérateur retard dans un contexte de temps discret. Considérons les deux définitions suivantes :

Définition 1 : Ensemble positif invariant.

L'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ est dit positif invariant pour un système sous la forme :

$$\Delta x(t) = f(x(t))$$

si pour tout $x(0) \in \mathcal{S}$ la solution $x(t) \in \mathcal{S}$ pour $t > 0$. Si $x(0) \in \mathcal{S}$ implique $x(k) \in \mathcal{S}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors \mathcal{S} est dit invariant [1].

Définition 2 : Ensemble robuste positif invariant.

L'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ est dit robuste positif invariant pour le système :

$$\Delta x(t) = f(x(t), v(t)),$$

si pour tout $x(0) \in \mathcal{S}$ et tout $v(t) \in \mathcal{V}$ la solution est telle que $x(t) \in \mathcal{S}$ pour $t > 0$ [1].

Définition 3 : Stabilité entrée-état (Input to state stability-ISS).

La stabilité ISS implique que l'origine est un point asymptotiquement stable pour le système nominal $x(k+1) = f(x(k), v=0)$ avec la région d'attraction $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, et que toutes les trajectoires de l'état sont bornées pour toutes les séquences de perturbation bornées. De plus, chaque trajectoire $\Phi(x, k, v(\cdot)) \rightarrow 0$ si $v(k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, où $v(\cdot)$ représente le bruit [5].

Définition 4 : LMI.

Une inégalité matricielle linéaire, ou LMI, est une inégalité matricielle de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum x_i F_i \succ 0,$$

où x_1, x_2, \dots, x_n sont les variables, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont données, et $F(x) \succ 0$ signifie que le terme $F(x)$ est défini positif [8].

Théorème 3 : Théorème de Schur.

Les inégalités quadratiques convexes sont converties sous forme LMI en utilisant le théorème de Schur : soit $Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T$, et $S(x)$ ayant une dépendance affine en x , alors la LMI :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \succ 0$$

est équivalente aux inégalités matricielles :

$$R(x) \succ 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \succ 0$$

ou de façon équivalente :

$$Q(x) \succ 0, R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1} S(x) \succ 0 \text{ [8].}$$

S procédure.

Soit $F_0 = F_0^T, F_1 = F_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pour tout z tel que $z^T F_1 z \geq 0$, l'expression $z^T F_0 z > 0$ est vérifiée s'il existe un $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ tel que $F_0 - \alpha F_1 \succ 0$ [3].