

Identification fractionnaire multivariable

Tounsia DJAMAH¹, Said DJENNOUNE¹, Maamar BETTAYEB²

¹Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP),
Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, Algerie.
djamaht_ummto@yahoo.fr, S.djennoune@yahoo.fr

²University of Sharjah, United Arab Emirates
Department of Electrical & Computer Engineering
maamar@sharjah.ac.ae

Résumé— Cet article traite de l'identification des systèmes par des modèles d'ordre fractionnaire multivariables. Une méthode à erreur de sortie, basée sur une technique d'optimisation non linéaire est développée. Elle repose sur un modèle d'état fractionnaire multivariable des fonctions de sensibilité paramétrique, dont la simulation est basée sur l'opérateur d'intégration fractionnaire borné en fréquences. Différentes simulations illustrent les performances de la méthode.

Mots-clés— système d'ordre fractionnaire (non entier), phénomènes de diffusion, identification multivariable, algorithme de Marquardt, fonctions de sensibilité paramétrique.

I. INTRODUCTION

Récemment nous assistons à la modélisation de nombreux phénomènes physiques par des systèmes d'ordre fractionnaire, motivée par l'application de cette classe de systèmes à divers domaines des sciences de l'ingénieur [1], [2], [3]. Ces processus sont caractérisés par les propriétés de mémoire longue et une structure de dimension infinie, qui apparaissent dans les phénomènes de diffusion : thermique [4], [5], acoustique [6], [7], électrochimique [8], [9], électromagnétique [10]...

Dans ce contexte, l'identification de tels systèmes par des modèles entiers s'avère inadaptée et requiert un nombre important de paramètres pénalisant ainsi le modèle obtenu.

Le développement de méthodes d'identification basées sur des modèles non entiers apparaît donc comme une nécessité, mais elles se révèlent nettement plus complexes que dans le cas entier, du fait de l'estimation des ordres fractionnaires au même titre que les paramètres du modèle ; de plus, ces ordres interviennent non linéairement par rapport à la sortie du modèle. Dans la littérature deux approches d'identification sont distinguées :

- La première, à erreur d'équation suppose les ordres de dérivation connus a priori, et seule l'estimation paramétrique est effectuée [5], [8], [11], et récemment, certaines méthodes telle que la méthode de la variable instrumentale a été adaptée pour l'estimation de l'ordre fractionnaire [12].

- La seconde à erreur de sortie, estime les ordres au même titre que les coefficients, et nécessite une technique d'optimisation non linéaire, en l'occurrence, l'algorithme de Marquardt est utilisé dans la littérature [13].

Les paramètres sont estimés soit à partir de la forme modale d'un modèle d'état commensurable, [5], [14], soit à partir de l'approximation entière d'un modèle d'état non entier, basée sur l'opérateur d'intégration fractionnaire borné

en fréquences [8], [15], [16]. Dans ce cas, l'ordre non entier est exprimé en fonction des coefficients récurrents de l'opérateur d'intégration, et l'estimation de l'approximation entière est effectuée de façon conventionnelle pour un modèle à un intégrateur et pour un modèle à deux intégrateurs, mais avec l'ordre du deuxième intégrateur fixé à 0.5 [17]. Cependant, pour un modèle de dimension supérieure, l'expression explicite de l'approximation entière en fonction des paramètres à estimer devient inextricable, et l'inconvénient de ces approches est le calcul des fonctions de sensibilité applicables exclusivement pour la structure du modèle considéré, donc une écriture de ces dernières dans le cas général ne peut pas être déduite.

Une autre méthode à erreur de sortie, basée sur un nouveau modèle des fonctions de sensibilité paramétrique [18], [19], [20], permet d'y remédier au problème des approches précédentes. Le calcul des fonctions de sensibilité est basé sur la simulation d'un modèle d'état fractionnaire multivariable qui permet ainsi d'optimiser le volume de calcul de la méthode. Il présente l'avantage d'être applicable lorsque la dimension du système à identifier varie, et reste valide aussi bien pour le cas entier que dans le cas fractionnaire commensurable et incommensurable.

Toutes ces méthodes d'identification par des modèles fractionnaires ont été développées dans le cas monovarié et pour la majorité, dans le cas commensurable, le cas multivariable n'a pas été abordé dans la littérature, à notre connaissance.

C'est dans ce cadre que s'inscrit la contribution de notre papier. Elle consiste à adapter la méthode d'identification fractionnaire à erreur de sortie, développée précédemment dans le cas monovarié [18], [19], [20] au cas multivariable.

La simulation des fonctions de sensibilité paramétrique est réalisée par un modèle d'état fractionnaire multivariable, basée sur l'opérateur d'intégration non entier borné en fréquences. Pour réduire le nombre de paramètres à estimer, une forme canonique observable : la forme canonique de Guidorzi est utilisée [21], [22], [23], [24].

Cette communication est organisée suivant le plan suivant :

- Après avoir décrit la forme canonique de Guidorzi ainsi que ses propriétés structurelles, la méthode d'identification paramétrique des systèmes fractionnaires dans le cas multivariable est développée en détail.
- Des simulations numériques permettent de tester l'efficacité de la méthode dans un contexte sans bruit et en présence de bruit.

- Finalement, nous terminons par une conclusion, et des perspectives de recherche sont présentées.

II. STRUCTURE CANONIQUE DE GUIDORZI DES SYSTÈMES MULTIVARIABLES

Soit le système fractionnaire multivariable, commensurable suivant (1)

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (1)$$

avec n_u , le nombre d'entrées, n_y , le nombre de sorties et n , le nombre d'états; les matrices A, B, C sont de dimension appropriées. Nous supposons le système complètement observable, décrit par le modèle d'état (1) présentant la forme canonique de Guidorzi. Sa structure est définie par un ensemble d'indices structuraux $\nu_i, i = 1 \dots n_y$, qui sont invariants à un changement de coordonnées. Le système est subdivisé en n_y sous systèmes, chacun de dimension ν_i , observable à partir de l'une des sorties [23], [26], [27].

Les matrices A, B, C ont les formes particulières suivantes :

$$A = \{A_{ij}\} \text{ avec } i, j = 1, 2 \dots n_y$$

Les matrices A_{ii} de dimension $(\nu_i \times \nu_i)$ montrent la forme compagne suivante :

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & & I_{\nu_i-1} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ a_{ii,1} & a_{ii,2} & \dots & a_{ii,\nu_i} & \end{bmatrix} \\ A_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 \\ a_{ij,1} & \dots & a_{ij,\nu_{ij}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,n_u} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n_u} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Pour la matrice C , les 1 se trouvent aux colonnes 1, $\nu_1+1, \dots, (\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{n_y-1}) + 1$. Les indices ν_{ij} sont définis tels que :

- $\nu_{ij} = \nu_i$ pour $i = j$
- $\nu_{ij} = \min(\nu_i + 1, \nu_j)$ pour $i > j$
- $\nu_{ij} = \min(\nu_i, \nu_j)$ pour $i < j$

Le système original a été décomposé en n_y sous systèmes et le $j^{\text{ème}}$ sous système de la représentation (A, B, C) est complètement observable à partir de la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur sortie y , [28], [29].

L'identification paramétrique du système fractionnaire multivariable (1) consiste à identifier les éléments des matrices du modèle, ainsi que l'ordre fractionnaire α ; le

nombre de paramètres à estimer dans le cas de la forme de Guidorzi est : $n_p + 1 = n(n_u + n_y) + 1 = 21$, dans le cas d'un système avec $n_u = n_y = 2$ et $n = 5$; alors que pour le même système sous une forme quelconque, $n_p + 1 = n^2 + n(n_u + n_y) + 1 = 46$. Donc le nombre de paramètres est considérablement réduit avec la forme de Guidorzi, qui sera utilisée par la suite pour l'identification fractionnaire multivariable.

III. IDENTIFICATION FRACTIONNAIRE MULTIVARIABLE

Considérons le système (3) fractionnaire multivariable d'ordre commensurable suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (3)$$

Nous supposons le système complètement observable et commandable, et les matrices (A, B, C) du système exhibent la forme canonique de Guidorzi.

En ce qui nous concerne, nous supposons la structure du modèle connue à priori, donc les indices structuraux définis et nous développons la méthode d'identification paramétrique pour un système fractionnaire multivariable, à deux entrées ($n_u = 2$), deux sorties ($n_y = 2$) et cinq états ($n = 5$) tel que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ D^\alpha x_3 \\ D^\alpha x_4 \\ D^\alpha x_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ a_{11.1} & a_{11.2} & a_{11.3} & | & a_{12.1} & a_{12.2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ a_{21.1} & a_{21.2} & a_{21.3} & | & a_{22.1} & a_{22.2} \end{bmatrix} x(t) \\ &+ \begin{bmatrix} b_{1.1} & b_{1.2} \\ b_{2.1} & b_{2.2} \\ b_{3.1} & b_{3.2} \\ b_{4.1} & b_{4.2} \\ b_{5.1} & b_{5.2} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} d_{1.1} & d_{1.2} \\ d_{2.1} & d_{2.2} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (4)$$

A partir des matrices A et C les indices structuraux sont déduits : $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 2$.

L'objectif de l'identification paramétrique est d'estimer les éléments des matrices A, B, D du modèle d'état et l'ordre fractionnaire α , commun à toutes les variables d'état.

Les éléments de la matrice A à estimer correspondent aux éléments des sous systèmes sur les lignes aux positions ν_i de A soit $(n_y \times n)$ éléments; pour la matrice B , $(n \times n_u)$ éléments, enfin pour la matrice D le nombre d'éléments à estimer est de $(n_y \times n_u)$.

Le vecteur θ de paramètres à estimer contient donc $(n_p + 1) = n \times (n_y + n_u) + n_u \times n_y + 1$ éléments.

$$\begin{aligned} \theta = [\tilde{\theta} \alpha] &= [a_{\nu_1,1} \dots a_{\nu_1,n} \dots a_{\nu_{n_y},1} \dots a_{\nu_{n_y},n} \\ &b_{1,1} \dots b_{1,n_u} \dots b_{n,1} \dots b_{n,n_u} \\ &d_{1,1} \dots d_{1,n_u} \dots d_{n_y,1} \dots d_{n_y,n_u} \quad \alpha] \end{aligned}$$

Pour l'exemple considéré, le vecteur θ contient donc $(n_p + 1) = 25$ éléments.

Dans ce cas multivariable, le nombre de paramètres à estimer est important, la méthode étant itérative, basée sur la simulation du modèle des fonctions de sensibilité paramétrique, nécessite un volume de calcul important.

Afin de tester l'efficacité de l'algorithme développé ci dessus, des simulations numériques sont réalisées sur un système multivariable fractionnaire, dans le cas sans bruit et en présence de bruit, dans le prochain paragraphe .

IV. EXEMPLE DE SIMULATION

Le système considéré est un système fractionnaire, à 2 entrée, 2 sorties, et 5 variables d'états, l'excitation est une séquence binaire pseudo-aléatoire de dimension $k = 1000$, et de période d'échantillonnage $T_e = 0.01s$; l'identification est réalisée dans un contexte sans bruit, puis en présence de bruit.

La Table I illustre les résultats de simulation pour les deux cas.

TABLE I
RÉSULTATS DE SIMULATION, CAS SANS BRUIT ET BRUITÉ

Paramètres	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$
Valeurs exactes	-2	-3	-3	-2	-1
Valeurs estimées sans Bruit	-1.95	-3.03	-2.94	-1.95	-1.14
Valeurs estimées avec SNR=26dB	-1.17	-2.38	-1.60	-0.74	-3.13

Paramètres	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$
Valeurs exactes	-1	-2	-1	-1	-2
Valeurs estimées sans Bruit	-0.86	-1.96	-0.73	-0.86	-2.27
Valeurs estimées avec SNR=26dB	-1.53	-1.24	-1.96	-1.25	-0.87

Paramètres	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$b_{1,4}$	$b_{1,5}$
Valeurs exactes	1	0	1	0	1
Valeurs estimées sans bruit	0.50	0.50	0.51	0.51	0.43
Valeurs estimées avec SNR=26dB	0.43	0.43	0.32	0.32	1.85

Paramètres	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{2,3}$	$b_{2,4}$	$b_{2,5}$
Valeurs exactes	0	1	0	1	1
Valeurs estimées sans bruit	0.43	0.50	0.50	0.99	0.99
Valeurs estimées avec SNR=26dB	1.85	0.23	0.23	1.91	1.92

Paramètres	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	Critère
Val. exactes	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	/
Val. estimées sans bruit	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	2.16e-11
Val. estimées SNR=26dB	0.48	0.38	0.64	0.38	0.57	1.98

A. Cas sans bruit

Les paramètres du modèle estimé donnés en table I sont très proches des valeurs respectives exactes, et les ordres fractionnaires du système sont retrouvés, néanmoins les éléments de la matrice B sont biaisés.

La Figure 1 des erreurs de prédiction des différentes sorties montre qu'elles sont nulles (de l'ordre de 10^{-7}) et donc, les courbes de réponses temporelles du système estimé coïncident parfaitement avec les données temporelles.

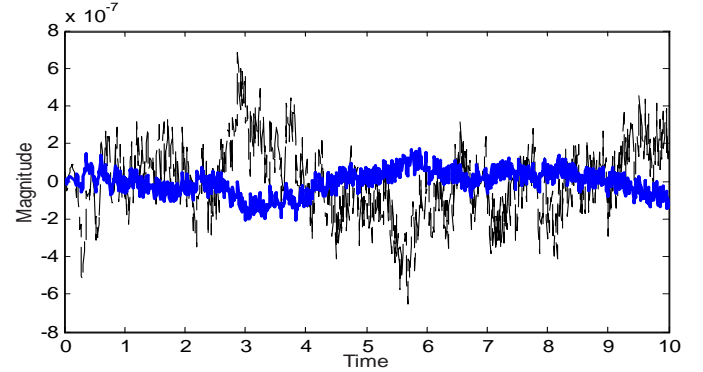


Fig. 1. erreurs de prédiction, dans le cas sans bruit.

Pour les courbes fréquentielles du modèle estimé (Figure 2), nous remarquons qu'elles se superposent respectivement avec celles du système mesuré la bande de validité de l'opérateur d'intégration borné en fréquences [10^{-5} 10^5], mais qu'il y a un léger décalage pour les courbes respectives reliant la sortie 1 à l'entrée 2. et les courbes reliant la sortie 2 à l'entrée 1, donc le couplage est mal identifié.

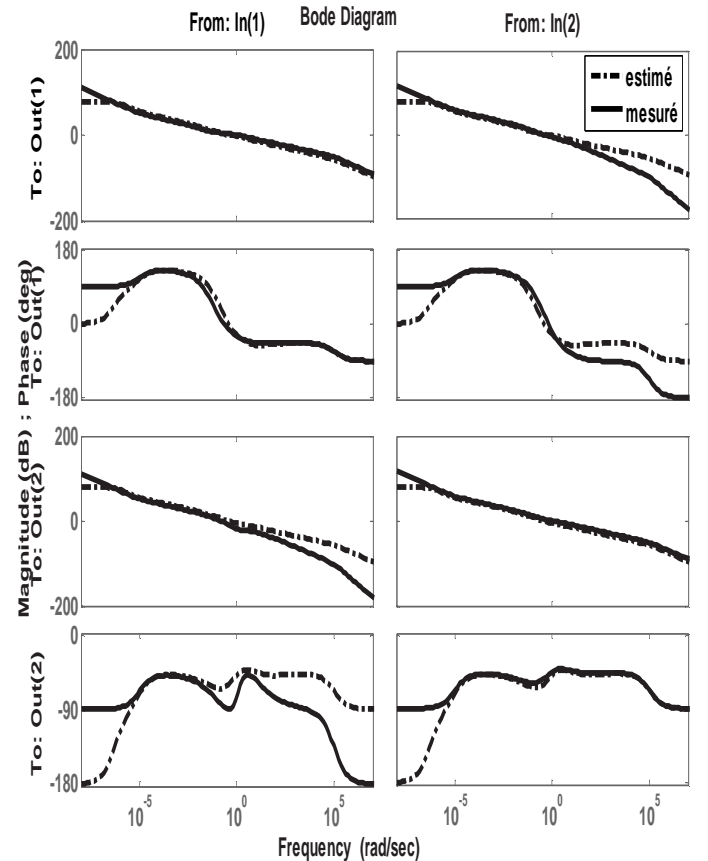


Fig. 2. Réponses fréquentielles, cas sans bruit.

B. Cas bruité avec $SNR = 26$ dB

Dans un contexte bruité, les erreurs de prédiction des différentes sorties (Figure 3) sont de l'ordre de 0.15 et les résultats des paramètres estimés sont biaisés, malgré que les réponses temporelles en Figure 5 montrent une bonne adéquation avec les données.

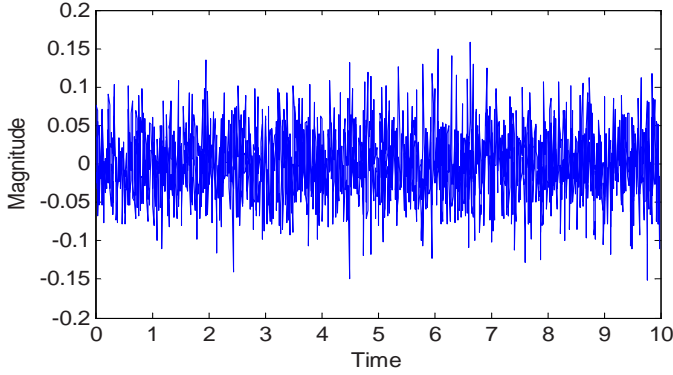


Fig. 3. Erreurs de prédiction des sorties, cas bruité.

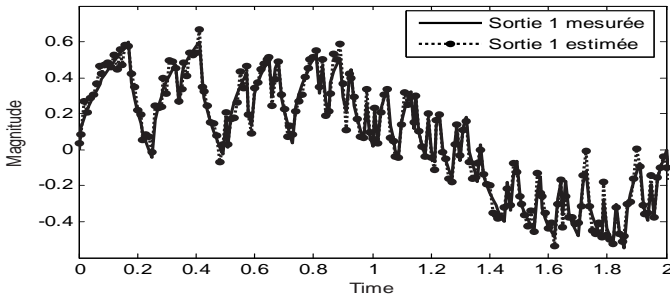


Fig. 4. Sortie 1 de la simulation, cas bruité.

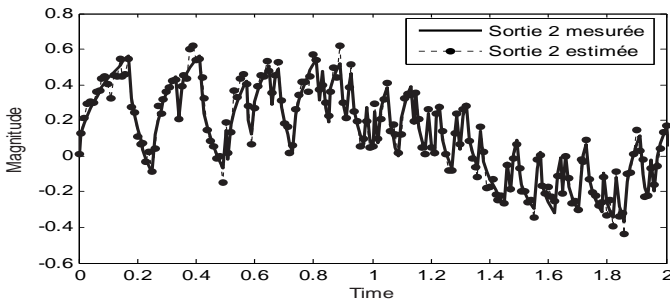


Fig. 5. Sortie 2 de la simulation, cas bruité.

Pour les courbes fréquentielles respectives (Figure 6), le décalage constaté précédemment existe sur une plus large gamme de fréquences.

Ces différentes simulations montrent que l'algorithme à erreur de sortie développé pour le cas multivariable, donne des résultats satisfaisants en l'absence de bruit, mais identifie mal le couplage des entrées/ sorties croisées. Néanmoins, la méthode nécessite un temps de calcul important, et dans un contexte bruité, l'estimation est biaisée.

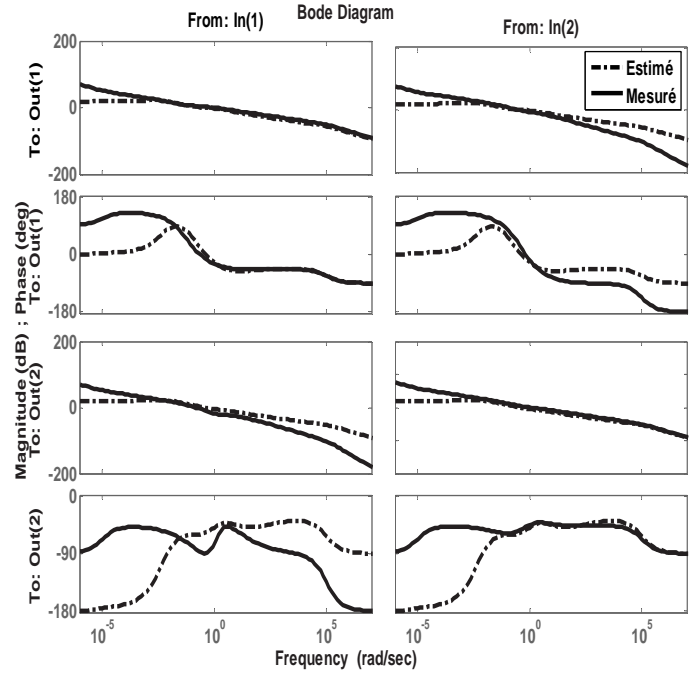


Fig. 6. Réponses fréquentielles, cas bruité

V. CONCLUSION

Une méthode d'identification à erreur de sortie d'un modèle d'état fractionnaire multivariable est présentée dans cet article. Elle permet l'estimation des paramètres ainsi que l'ordre non entier du système. L'algorithme de Marquardt connu pour assurer une estimation non biaisée est utilisé; cependant, le point névralgique de cet algorithme est le calcul des fonctions de sensibilité paramétriques, nécessaire pour la procédure de minimisation du critère. La simulation de ces dernières est réalisée grâce à un modèle d'état fractionnaire multivariable basé sur l'opérateur d'intégration fractionnaire borné en fréquences.

Cette étude nous a permis de tester la validité de la méthode d'identification à erreur de sortie dans le cas multivariable fractionnaire, et les différentes simulations effectuées montrent l'efficacité de la méthode en l'absence de bruit. Cependant, elle nécessite un temps de calcul et une capacité mémoire importante, du fait de son aspect itératif et du nombre important de paramètres à estimer, et montre un biais d'estimation dans un contexte bruité.

L'identification des systèmes multivariables comporte deux étapes principales à savoir l'identification structurelle et l'identification paramétrique. La première, basée sur les propriétés structurelles du modèle et sur sa matrice d'observabilité permet de déterminer les indices structuraux du système multivariable, dans notre cas, nous avons considéré la forme de canonique de Guidorzi, en supposant la structure du système connue a priori. Cependant, pour le cas multivariable fractionnaire, le problème de la matrice d'observabilité, ainsi que les propriétés structurelles du système sont toujours d'actualité, il serait donc intéressant d'explorer ces axes de recherche en vue de définir une méthode d'identification structurelle pour le cas multivariable fractionnaire.

RÉFÉRENCES

- [1] Oldham K. B., et Spanier J. *The fractional calculus*. Academic Press, New York and London. 1974
- [2] Oustaloup A. *La Dérivation non entière : Théorie, synthèse et application*. Editions Hermès, Paris, 1995.
- [3] Samko S.G., Kilbas A.A. et O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [4] Battaglia, J.L., Le Lay L., Batsale J.C., Oustaloup A. et Cois O. Heat flow estimate through inverted not integer identification models. In *Int. J. of Thermal Science*. Vol. 39, n° 3, pp 374-389, 2000.
- [5] Cois O. Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : Application en thermique. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux, France, 2002.
- [6] Matignon D. Représentations en variables d'état de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire. Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, France, 1994.
- [7] Fellah Z.E.A., Berger S., Lauriks S. et Depollier C. Verification of kramerskonig relationship in porous materials having a rigid frame. *Journal of sound and vibration*. Vol. 270, pp 865-885, 2004.
- [8] Lin J. Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 2001.
- [9] Sabatier J., Aoun M., Oustaloup A., Gregoire G., Ragot F. et Roy P. Estimation of lead acid battery state of charge with a novel fractional model. In *proc IFAC workshop on fractional differentiation and its applications*. pp 362-67, Porto, Portugal. 2006.
- [10] Ferdi Y., Herbeuval J.P., Charef A. et Boucheham B. R wave detection using fractional digital differentiation. *ITBM-RBM*. Vol. 24, pp 273-280, 2003.
- [11] Le lay L. Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier. Thèse de doctorat Université de Bordeaux I, France, 1998
- [12] Victor S., Malti R., Oustaloup A. Instrumental variable method with optimal fractional differentiation order for continuous-time system identification. In *15th IFAC symposium on system identification*. Saint-Malo, France, 2009.
- [13] Malti R., Aoun M., Sabatier J. et Oustaloup A. Tutorial on system identification using fractional differentiation models. In *14th IFAC symposium on system identification*. New Castle, Australia, 2006.
- [14] Aoun M. *Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières*. Phd Thesis, Université de Bordeaux I, 2005.
- [15] Benchellal A., Poinot T. et Trigeassou J. C. Approximation and identification of fractional systems. In *International Design Engineering Technical Conferences (ASME, IDETC)*. Long Beach, California, USA, September 2005.
- [16] Poinot T. et Trigeassou J.C. A method for modelling and simulation of fractional systems. *Signal Processing*. Vol. 83, pp 2319-2333, 2003.
- [17] Benchellal A., Poinot T. et Trigeassou J. C. Approximation and identification of diffusive interfaces by fractional systems. In *Signal Processing*. Vol. 86, n° 10, pp 2712-2727, 2006
- [18] Djamah T., Mansouri R., Djenoune S. et Bettayeb M. Identification des modèles d'état d'ordre fractionnaire. *7ème conférence Internationale de Modélisation et Simulation, MOSIM 08*. Paris France, 2008.
- [19] Djamah T., Mansouri R., Djenoune S. et Bettayeb M. Heat transfer modeling and identification using fractional order state space models. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*. vol. 42, pp 939-951, Lavoisier, Hermes sciences. 2008.
- [20] T. Djamah, S. Djenoune, M. Bettayeb. Diffusion process identification in cylindrical geometry using fractional models. *Physica Scripta, T136, 014013*. IOP journals, 2009.
- [21] Glover M. et Willems J. C. Parametrizations of linear dynamical systems : Canonical forms and identifiability. *IEEE Trans. Automatic Control*. Vol. AC-19, n° 6, pp 640- 646, 1974.
- [22] Golub G. H. and van Loan C. F. *Matrix Computations (3rd ed.)*, The Johns Hopkins University Press. 1996.
- [23] Guidorzi R. Canonical structures in the identification of multivariable systems. *Automatica*. Vol. 11, n° 4, pp 361-374, 1975.
- [24] Kailath T. *Linear Systems*. Prentice Hall. Engelwood Cliffs, 1980.
- [25] Katayama T. *Subspace methods for system identification*. Springer, 2005.
- [26] Borne P., Dauphin Tanguy G., Richard J. P., Rotella F., et Zambettakis I. Modélisation et identification des processus. Technip, 1992.
- [27] Landau I.D. *Identification et commande des systèmes. Série Automatique*. 2eme édition , Hermes Paris 1993.
- [28] Van Overschee P. et De Moor B. *Subspace Identification for Linear Systems*. Kluwer Academic Pub., 1996.
- [29] Viberg M. Subspace-based methods for identification of linear time-invariant systems. *Automatica*. Vol. 31, n° 12, pp 1835-1851, 1995.
- [30] Ljung L. *System identification : theory for the user*. Prentice Hall, London, 1987.
- [31] Richalet J., Rault A. et Pouliquen R. *Identification des processus par la méthode du modèle*. Gordon and Breach, 1971.
- [32] Kelley C.T. *Iterative Methods for Optimization*. SIAM, Philadelphia, 1999.
- [33] Marquardt D.W. An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. Vol. 11, n° 2, pp 431-441, Paris France, 1963.
- [34] Mansouri R. Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par la représentation d'état. These de doctorat, Université M. MAMMERI de Tizi Ouzou, Algérie, 2008.