Nouvelles approches de synthèse H_2 par retour de sortie statique pour une classe de systèmes non linéaires

[1]Neila Bedioui, [1]Salah Salhi, [1]Mekki Ksouri

[1]Laboratoire d'analyse et de commande de systèmes LACS,
Ecole national d'ingénieurs de Tunis ENIT
P.B. 37, Le Bélvédère, CP 1002 Tunis , Tunisie
bedioui_neila_enit@ yahoo.fr, salhis@lycos.com
, mekki.ksouri@insat.rnu.tn

***Résumé*— On traite dans ce papier le problème de synthèse d'un contrôleur robuste H_2 par retour de sortie statique pour une classe particulière de systèmes non linéaires. Il s'agit de systèmes linéaires auquel on ajoute une certaine fonction non linéaire satisfaisant une certaine contrainte quadratique. Dans ce cadre, on présente, une nouvelle condition suffisante décrite par un problème d'optimisation convexe formulée en termes de LMI. Cette approche permet d'assurer à la fois la stabilité du système, de maximiser les limites de la non linéarité que peut tolérer un tel système sans perte de stabilité et d'atténuer l'effet des perturbations exogènes.**

Mots-clés— **système nonlinéaire, stabilisation robuste, retour de sortie statique, synthèse H_2 ,théorie de Lyapunov , LMI.**

I. INTRODUCTION

Un des problèmes importants de l'automatique est celui du calcul des contrôleurs qui stabilisent un système non-linéaire et qui optimise les performances du système en boucle fermée : H_2, H_∞.
Le problème de stabilité et de stabilisation pour la classe des systèmes non-linéaires a attiré un intérêt considérable durant ces dernières années [6]. Cependant les systèmes non-linéaires ne sont pas simples à commander vu leur modèle physique complexe.
Généralement, pour ce type de système, on essaye de ramener le modèle réel à un modèle linéaire et ceci en appliquant l'une des techniques de linéarisation connues.

Cependant, certains systèmes non-linéaires peuvent être modéliser en gardant un aspect non linéaire. On parle dans ce cas de des systèmes à non linéarité séparable.

Il s'agit en effet de représenter les systèmes non-linéaire par des systèmes linéaires aux quels on ajoute un terme non-linéaire décrit par une fonction non linéaire variant dans le temps et vérifiant une certaine contrainte quadratique. Cette classe particulière de systèmes non-linéaires a été abordée dans la littérature [1-5].

Divers problèmes d'analyse de la stabilité et de performance robustes ont été traités dans la littérature dont les plus part sont basés sur la théorie de Lyapunov et formulés en termes de LMI. Par exemple, des approches de synthèse par retour d'état ont été développées [2-4]. Dans le cas de synthèse par retour de sortie statique, des efforts considérables [3],[10-11] ont été faits pour résoudre le problème majeur pour ce type de synthèse qui résulte dans la non convexité (similairement au problème posé pour le système linéaire) [14]. Le problème de synthèse par H_∞ par retour de sortie statique a été aussi abordé [11]. En revanche, le problème de performance H_2 (critère quadratique) reste encore un problème ouvert.

Dans ce papier, nous présentons une nouvelle approche de synthèse d'un contrôleur H_2 par retour de sortie statique pour cette classe de système. En effet, il s'agit d'une condition suffisante de stabilité robuste, formulée en termes de LMI et basée sur l'introduction d'une variable de relaxation, qui permet de séparer la matrice de Lyapunov du gain de retour de sortie statique et donc d'éliminer la condition forte imposée sur la matrice de Lyapunov.

Le papier est organisé comme suit. Dans la section II, on présente la problématique abordée et on présente aussi une condition de stabilité H_2 de cette classe de systèmes non-linéaires continus. On aborde dans la section III, le problème de synthèse d'un contrôleur H_2 par retour de sortie statique. La méthode proposée est une application de la condition de stabilité donnée dans la section II. Dans la section IV, nous présentons notre résultat principal. Des exemples numériques illustrent la pertinence des conditions proposées.

Notation : Ces différentes notations sont utilisées tout au long du papier : $P = P^T > 0$ est une matrice symétrique et définie positive. $\Re$ est l'ensemble des réels.

$sym(A) = A + A^T$, $diag(A, B) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$,et

$\begin{bmatrix} A & B \\ \bullet & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$.

II.PRELIMINAIRES

Dans cette section, on considère le système non linéaire décrit par la représentation d'état suivante dans le domaine continu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{cl}x(t) + B_{cl}w(t) + f(t,x) \\ z(t) = C_{cl}x(t) + D_{cl}w(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $x(t) \in \Re^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \Re^m$ est le vecteur des entrées, $y(t) \in \Re^p$ représente le vecteur de sorties mesurées, $w(t) \in \Re^q$ est le vecteur de perturbations exogènes et $z(t) \in \Re^r$ est le vecteur sorties contrôlées. A_{cl}, B_{cl}, C_{cl} et D_{cl} sont des matrices constantes de dimensions appropriées et $f(t,x)$ représente une fonction non linéaire dépendant des paramètres t et x et vérifiant $f(t,0) = 0$.
Cette fonction non linéaire est bornée par la contrainte quadratique suivante :

$$f^T(t,x)f(t,x) \le \alpha^2 x^T F^T F x \quad (2)$$

où $\alpha > 0$ est une borne limite de la non linéarité de la fonction f et F est une matrice constante de dimensions appropriées.

Le paramètre α représente un degré de robustesse dont sa maximisation permet de rendre le système robuste envers les incertitudes et les perturbations.

On peut noter que la contrainte quadratique (2) est équivalente à l'expression suivante:

$$\begin{bmatrix} x \\ w \\ f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\alpha^2 F^T F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ f \end{bmatrix} \le 0 \quad (3)$$

On définit, aussi, par T_{wz} la fonction de transfert de l'entrée w par rapport à la sortie z pour $f(t,x) = 0$ et dont l'expression est donnée par:

$$T_{wz} = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl} + D_{cl} \quad (4)$$

Dans cette section, nous proposons une approche d'analyse robuste caractérisant la performance H_2 pour le système non linéaire (1) en utilisant une formulation LMI.

Tout d'abord, nous allons introduire quelques théorèmes primordiaux utilisés dans la suite du papier pour la démonstration des approches de stabilisation pour le système (1).

Lemme 1 : soit Φ une matrice symétrique et *N*, *J* deux matrices de dimensions appropriées. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\Phi < 0$ et $\Phi + NJ^T + JN^T < 0$

ii) Il existe une matrice *G* tel que:

$$\begin{bmatrix} \Phi & J + NG \\ J^T + G^T N^T & -G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

Preuve 1 : Le lemme 1 peut être démontré en écrivant (5) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \Phi & J + NG \\ J^T + G^T N^T & -G - G^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & J \\ J^T & 0 \end{bmatrix} + sym\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} G^T \begin{bmatrix} N^T & -I \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (6)$$

et en appliquant le Lemme de projection [5] .■

Pour le système non linéaire (1), le critère de performance H_2 est décrit par une approche qui permet d'une part d'atténuer l'effet des entrées exogènes *w(t)* et d'autre part l'effet de la non linéarité *f(t)* sur les systèmes non linéaires (1). Et ceci en maximisant la borne limite de la non linéarité α et en même temps en minimisant le paramètre γ.

La caractérisation de la performance H_2 pour cette classe de systèmes non linéaires est donnée par le théorème 1.

Théorème 1: *(Caractérisation de la performance* H_2*)* Considérons D_{cl} =0, le système (1) est robuste stable avec $\|T_{wz}\|_2^2 < \gamma$, si il existe une matrice $Q = Q^T > 0$, une matrice *W*, des scalaires $\tau > 0$, $\gamma > 0$ et $\beta > 0$ tel que le problème d'optimisation suivant est faisable:

$$\begin{cases} minimiser\ \beta + \gamma \\ trace(W) < \gamma \\ \begin{bmatrix} W & C_{cl}Q \\ \bullet & Q \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_{cl}Q + QA_{cl}^T & B_{cl} & I & QF^T \\ \bullet & -\tau^{-1}I & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Preuve 2: La première et la deuxième inégalité du problème (7) dérivent directement du problème de performance H_2 pour les systèmes linéaires LTI continus [9],[5].

On propose dans ce qui suit la démonstration de la troisième LMI du problème (7) qui diffère de celle du cas linaire.

Soit la fonction de Lyapunov quadratique

$$V(x) = x^T(t)Px(t) \quad (8)$$

où $P = P^T > 0$.

En appliquant la théorie de dissipativité, dans le cas de performance H_2 , on montre que:

$$\dot{V}(x(t)) - w^T(t)w(t) < 0 \qquad (9)$$

Le développement de (9), nous ramène à l'inégalité suivante:

$$\begin{bmatrix} x \\ w \\ f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} & PB_{cl} & P \\ \bullet & -I_q & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ f \end{bmatrix} < 0 \qquad (10)$$

Par la suite, en appliquant le Lemme de S-procédure [7] à l'inégalité (10) avec (3), il existe un scalaire $\tau > 0$ tel que:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T \tilde{P} + \tilde{P}A_{cl} + \alpha^2 F^T F & \tilde{P}B_{cl} & \tilde{P} \\ B_{cl}^T \tilde{P} & -\tau^{-1} I & 0 \\ \bullet & \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (11)$$

avec $\tilde{P} = P / \tau$.

Par complément de Schur, (11) est équivalente à l'inégalité suivante:

$$\begin{bmatrix} A^T \tilde{P} + \tilde{P}A & \tilde{P}B & \tilde{P} & F^T \\ \bullet & -\tau^{-1} I & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I \end{bmatrix} < 0 \qquad (12)$$

avec $\beta = \alpha^{-2}$.

Multiplions par la suite par $diag(Q, I, I, I, I)$ et sa transposé , avec $Q = \tilde{P}^{-1}$, les deux cotés de (12) pour aboutir à l'inégalité (7).■

III. SYNTHESE H_2 PAR RETOUR DE SORTIE STATIQUE

L'objectif de cette section est de déterminé une approche de synthèse H_2 par retour de sortie statique pour une classe de systèmes non linéaires (1). Dans le cas de synthèse par retour de sortie statique, des efforts considérables [3],[10-11] ont été faits pour résoudre le problème majeur pour ce type de synthèse qui résulte dans la non convexité. Dans ce cadre, nous proposons une première méthode de stabilisation solution de cette problématique énoncé par le théorème 2 .

Soit le système non linéaire continu suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) + f(t,x) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) \end{cases} \qquad (13)$$

où $y(t) \in \Re^p$ est le vecteur sortie mesurée et C_y est une matrice constante de dimensions appropriées.

Il s'agit dans cette partie de déterminer un contrôleur par retour de sortie statique vérifiant la loi suivante :

$$u(t) = K_{sof}\, y(t) \qquad (14)$$

avec $K_{sof} \in \Re^{m \times p}$ est le contrôleur par retour de sortie statique permettant d'assurer la stabilité du système (13) en boucle fermée.

Le système en boucle fermée de (13) est alors caractérisé par les matrices suivante :

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A + B_u K_{sof} C_y \\ B_{cl} &= B_w \\ C_{cl} &= C_z + D_{zu} K_{sof} C_y \\ D_{cl} &= 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

Théorème 2: Le système (13) est robuste stable par retour de sortie statique avec $\|T_{wz}\|_2^2 < \gamma$, Si il existe une matrice $Q = Q^T > 0$,des matrices W et R de dimensions appropriées, des scalaires $\tau > 0$, $\gamma > 0$ et $\beta > 0$ tel que le problème d'optimisation suivant est faisable:

$$\begin{cases} minimiser\ \beta + \gamma \\ trace(W) < \gamma \\ \begin{bmatrix} W & C_z Q + D_{zu} R C_y \\ \bullet & Q \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} sym(AQ + B_u R C_y) & B_w & I & QF^T \\ \bullet & -\tau^{-1} I & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \qquad (16)$$

où:

$$Q = V \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} V^T, avec \quad Q_1 \in \Re^{p \times p} \text{ et } Q_2 \in \Re^{(n-p)\times(n-p)} \qquad (17)$$

et la matrice $R \in \Re^{m \times p}$ tel que:

$$R = K_{sof} U C_0 Q_1 C_0^{-1} U^{-1} \qquad (18)$$

Le contrôleur par retour de sortie statique est donné par:

$$K_{sof} = RUC_0 Q_1^{-1} C_0^{-1} U^T \qquad (19)$$

avec $U \in \Re^{p \times p}$ et $V \in \Re^{n \times n}$ sont deux matrices unitaires et $C_0 \in \Re^{p \times p}$, sont toutes obtenues en appliquant le décomposition en valeurs singulières de la matrice C_y :

$$C_y = U \begin{bmatrix} C_0 & 0 \end{bmatrix} V^T \qquad (20)$$

Preuve 3: en appliquant le théorème 1, le système non linéaire (13) en boucle fermée est dit robuste stable si il existe une matrice $Q = Q^T > 0$, une matrice *W*, des scalaires $\tau > 0$, $\gamma > 0$ et $\beta = \alpha^{-2}$ tel que le problème (7) est solvable pour A_{cl}, B_{cl} and C_{cl}, Q et R définis respectivement by (15) , (17) et (18). ■

Remarque1 : Pour contourner le problème de bilinéarité posé dans le cas de synthèse H_2 par retour de sortie statique, nous avons imposé une structure particulière (diagonale) (18) à la matrice Lyapunov [3] et [16]. Cette structure peut s'avérer très conservative notamment quant le rang de la matrice de sortie C_y est faible par rapport à l'ordre du système. De manière à réduire ce conservatisme nous proposons dans la section suivante une nouvelle condition suffisante basée sur l'introduction d'une matrice de relaxation permettant ,ainsi, la séparation de la matrice de Lyapunov du gain de retour de sortie rendant alors à la matrice de Lyapunov toute sa généralité [10-11].

IV. Resultat principal

Nous introduisons dans cette partie, une nouvelle approche H_2 par retour de sortie statique pour une classe de systèmes non linéaires (1).

D'abord, nous proposons le théorème 3 qui représente une autre alternative du théorème 1.

Théorème 3: Considérons D_{cl} =0, le système (1) est robuste stable avec $\|T_{wz}\|_2^2 < \gamma$, Si il existe une matrice $Q = Q^T > 0$, les matrices *W et G de dimensions appropriées*, des scalaires $\tau > 0$, $\gamma > 0$ et $\beta > 0$ tel que , pour tout scalaire fixe $\mu > 0$, le problème d'optimisation suivant est faisable:

$$\begin{cases} minimiser \ \beta + \gamma \\ trace(W) < \gamma \\ \begin{bmatrix} W & C_{cl}G \\ \bullet & G + G^T - Q \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} -2\mu Q & B_{cl} & I & 0 & Q + A_{cl}G + \mu G \\ \bullet & -\tau^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -I & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I & FG \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -G - G^T \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \tag{21}$$

Preuve 4: La première inégalité de (21) en multipliant $\begin{bmatrix} W & C_{cl}Q \\ \bullet & Q \end{bmatrix} > 0$ de (7) des deux côtés par $diag(I_q, G)$ et sa transposé.

La troisième inégalité de (7)peut être formulée de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T & B & I & QF^T \\ \bullet & -\tau^{-1}I & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I \end{bmatrix} = \varphi + sym\left(NJ^T\right) \tag{22}$$

avec :

$$\phi = \begin{bmatrix} -2\mu Q & B_{cl} & I & 0 \\ \bullet & -\tau^{-1}I & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \ pour \ tout \ \mu > 0$$

$$N = \begin{bmatrix} A + \mu I \\ 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \ et \ J^T = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

En appliquant le Lemme 1 sur (22) en considérant (23), il existe une matrice *G* tel que la troisième inégalité de (7) soit équivalente à celle de (21). ■

Nous allons dans la suite exploitées le résultat du théorème 3 pour définir une nouvelle approche de synthèse H_2 par retour de sortie statique pour le système non linéaire (13) . Ce résultat est énoncé dans le théorème 4.

Théorème 4: Le système (13) est robuste stable par retour de sortie statique avec $\|T_{wz}\|_2^2 < \gamma$, Si il existe une matrice $Q = Q^T > 0$,les matrices W , R et G de dimensions appropriées, des scalaires $\tau > 0$, $\gamma > 0$ et $\beta > 0$, tel que pour tout scalaire fixé $\mu > 0$, le problème d'optimisation suivant est faisable :

$$\begin{cases} minimiser \ \beta + \gamma \\ trace(W) < \gamma \\ \begin{bmatrix} W & C_z G + D_{zu} R C_y \\ \bullet & G + G^T - Q \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} -2\mu Q & B_w & I & 0 & Q + (A + \mu I)G + B_u R C_y \\ \bullet & -\tau^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -I & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I & FG \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -G - G^T \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \tag{24}$$

où
$$G = V \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix} V^T$$
$$avec \ \ G_1 \in \Re^{p \times p}, G_2 \in \Re^{(n-p) \times p}, G_2 \in \Re^{(n-p) \times (n-p)} \tag{25}$$

Le contrôleur par retour de sortie statique est donné par:

$$K_{sof} = RUC_0G_1^{-1}C_0^{-1}U^T \qquad (26)$$

avec U, V et C_0 sont données par (20).

Preuve 5 : En appliquant le résultat du théorème 3 sur le système non linéaire (13) en boucle fermée avec les matrices A_{cl}, B_{cl} and C_{cl} donnés par (15), on obtient le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{cases} minimiser\ \beta+\gamma \\ trace(W)<\gamma \\ \begin{bmatrix} W & C_zG+D_{zu}K_{sof}C_y \\ \bullet & G+G^T-Q \end{bmatrix}>0 \\ \begin{bmatrix} -2\mu Q & B_w & I & 0 & Q+(A+B_uK_{sof}C_y)G+\mu G \\ \bullet & -\tau^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -I & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I & FG \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -G-G^T \end{bmatrix}<0 \end{cases} \qquad (27)$$

Le problème (27) est un problème non convexe vu l'existence de termes bilinéaires dans la formulation des inégalités. Pour contourner ce problème, on propose la solution suivante en utilisant les expressions (25) et (20) de la manière suivante :

$$K_{sof}C_yG = \underbrace{K_{sof}UC_0G_1C_0^{-1}U^{-1}}_{R}\underbrace{U[C_0 \quad 0]V^T}_{C_y} \qquad (28)$$

avec $R \in \Re^{m\times p}$.

Il suffit par la suite de remplacer tous les termes bilinéaires de (27) qui sont fonctions de K_{sof} et G par l'égalité donné par (28).

On obtient finalement le résultat proposé dans le théorème 4. ■

Remarque 2 : On peut démontrer aisément que la condition du théorème 4 est moins conservative que la condition du théorème 2.

En effet, il suffit dans le théorème 4 d'imposer :

$G_1 = Q_1, G_2 = 0$ et $G_3 = Q_2$ pour retrouver le résultat du théorème 1.

L'avantage du problème d'optimisation donné par (27) par rapport à la méthode proposée par le théorème 2 , est que nous avons séparé la matrice de Lyapunov du gain par retour de sortie statique. Ainsi, la matrice de Lyapunov garde une forme générale dans ce problème. Le conservatisme est du dans ce cas à l'introduction d'une structure à la matrice variable *G*.

Pour montrer les performances de l'approche de synthèse H_2 par retour de sortie statique proposée par le théorème 4, nous illustrons ceci par un exemple numérique.

V. Exemple numerique

Soit le système non linéaire continu (29) avec la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} w(t) \\ &\quad + \alpha f(t,x) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \qquad (29)$$

Où : $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T \in \Re^3$, $\alpha > 0$

Et la fonction nonlinéaire est donnée par $f(t,x(t)) = \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \end{bmatrix}$.

La fonction non linéaire $f(k,x(k))$ vérifie la contrainte quadratique (2) de la manière suivante:

$$\begin{aligned} f^T(k,x(k))f(k,x(k)) &= \alpha^2 \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \end{bmatrix} \\ &= \alpha^2\left(\sin^2(x_1(t))+\sin^2(x_2(t))\right) \\ &\le \alpha^2\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right) \\ &= \alpha^2 x^T(t)\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M^T}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M} x(t) \end{aligned}$$

Les résultats obtenus par application du théorème 2 sont résumés comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_{\max} = 0.4199,\ \gamma_{\min} = 0.9873 \\ Q = V\begin{bmatrix} 0.1076 & 0 \\ 0 & 2.5699 \end{bmatrix}V^T \\ K_{sof} = -25.1859 \end{cases}$$

Les résultats obtenus par application du théorème 4 sont résumés comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_{\max} = 0.9673,\ \gamma_{\min} = 8.9713 \times 10^{-12}, \mu = 2 \\ Q = V\begin{bmatrix} 0.8453 & -0.1305 \\ -0.1305 & 0.2786 \end{bmatrix} V^T,\ \ G = V\begin{bmatrix} 0.8985 & 0 \\ 0.4693 & 0.5446 \end{bmatrix} V^T \\ K_{sof} = -2.8639 \end{cases}$$

L'approche du théorème 4 permet d'avoir une valeur maximale du degré de non linéarité α supérieur à celui obtenu par le théorème 2. De plus, cette approche nous a permis de minimiser encore l'effet de la perturbation sur le système non linéaire en obtenant une valeur de γ très faibles à celle obtenu par le théorème 2. En conclusion, cette approche est moins conservatrice vu qu'aucune structure particulière n'est imposée à la structure de Lyapunov.

VI. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons présenté une approche de synthèse H_2 pour une classe de systèmes non linéaires en utilisant une formulation LMI. Il s'agit, d'un problème d'optimisation convexe linéaire en fonction du degré de la non linéarité et du paramètre de performance. L'objectif à travers cette approche est d'une part d'assurer la stabilité du système, de maximiser la limite de la non linéarité que peut aussi tolérer le système sans perte de stabilité et enfin d'assurer une certaine performance du systèmes contre les perturbations. Le résultat proposé est étendu au cas de synthèse H_2 par retour de sortie statique. Une nouvelle condition suffisante a été élaborée et présente une solution moins conservative aux problèmes de synthèse par retour de sortie statique. Un exemple numérique illustre l'apport de cette approche.

REFERENCES

[1] D.M.Stipanovic and D.D.Siljak. Robust stability and stabilization of discrete-time non-linear systems : the LMI approach. *Iternational Journal of Control*, vol. 74, n°. 9, pp. 873-897, 2001.

[2] D.D.Siljak and D.M. Stipanovic. Robust stabilization of non-linear systems: the LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering,* vol. 6, n°. 5, pp. 461-493, 2000.

[3] D.W.C. Ho and G. Lu. Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback: the unified LMI approach. *Iternational Journal of Control*, vol. 76, n°. 2, pp. 105-115, 2003.

[4] Z. Zuo, J. Wang and L. Huang. Robust stabilization for non-linear discrete-time systems. *Iternational Journal of .Contro*l, vol. 77, n°. 4, pp. 384-388, 2004.

[5] S.P.Boyd, L.E Ghaoui, E.Feron, , and V.Balakrishnam. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. vol. 15 (Philadelphia, PA: SIAM), 1994.

[6] A.J.Fossard. Nonlinear systems,. vol 1,vol2,vol3, Kluwer Academic Publishers Group,1995.

[7] V.A.Yakubovich. S-procedure in nonlinear control theory. *Vestnick Leninigrad Univ.Math*, vol. 4, pp.73-93, 1977.

[8] David Banjerdpongchai and Jonathan P. How. Parametric robust H2 control design with generalized multipliers via LMI synthesis. *International Journal of Control*, vol 70, pp. 481 – 503, 1998.

[9] M.C..DE Oliveira, J.C.Geromel and J.Bernussou. Extended H_2 and H_∞ norm characterization and controller parameterization for discrete time systems. *International Journal of Control*, vol. 75, n°. 9, pp. 666-679, 2002.

[10] N.Bedioui, S.Salhi and M.Ksouri. An improved LMI approach for robust static output feedback stabilization of nonlinear systems. IEEE SSD 2008. 5th International Multi- conference, July 2008 Amman.

[11] N.Bedioui, S.Salhi and M.Ksouri. Robust stabilization apprroach and H_∞ performance via static output feedback for a class of nonlinear systems. Mathematical Problems in Engineering vol 2009 , 22 pages,2009

[12] S.S.Stankovic, D.M.Stipanovic and D.D.Siljak. Decentralized dynamic output feedback for robust stabilization of a class of nonlinear interconnected systems. *Automatica*, vol. 43, n°. 5, pp. 861-867, 2007.

[13] D.Mehdi,E.K.Boukas and O.Bachelier. Static output feedback design for linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 21,n°.1, pp. 1-13, 2004.

[14] O.Toker and H.Ösbay. On the NP-hardness of Solving Bilinear Matrix Inequalities and Simultaneous Stabilization with static output feed back . in Proc.Amer.control. Conf., Seattle,WA , pp. 2525-2526, 1995.

[15] M.Abbaszadeh and H.J.Marquez. Robust Static Ouput Feedback Stabilization of Discrete time nonlinear Uncertain Systems with H∞ Performance. in 16th Meditteranean conference on control and automation,congress,France, pp.226-231,June 25-27,2008.

[16] C.A.R.Crusius, and A.Trofino. Sufficient LMI Conditions for Output Feedback Control Problems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.44, n°.5, pp.1053-1057, 1999.

[17] M.Banjerdpongchai and H.Kimura. Robust analysis of discrete-time LUR'E systems with slope restrictions using convex otpimization . *Asian Journal of Control*, vol.4, n°. 2, pp.119-126,June 2002.