

# Commande d'un système bloc comprenant une saturation bordée par deux dynamiques linéaires

F. GIRI\*, E. CHATER, F.Z. CHAOUI, J.B. GNING, M. HALOUA

GREYC, Université de Caen Basse-Normandie, Caen, France.

\* Contact: [fouad.giri@unicaen.fr](mailto:fouad.giri@unicaen.fr)

**Résumé** – Cette étude porte sur le problème de commande de systèmes blocs comprenant un élément statique de type saturation pris en sandwich entre deux dynamiques linéaires. Cette structure généralise les deux structures classiques impliquant un seul élément dynamique linéaire monté en série avec un élément saturation placé soit à l'entrée (représentant alors un actionneur) ou en sortie (représentant alors un capteur). Le but de la commande est la stabilisation globale asymptotique en boucle fermée et la poursuite de trajectoires de référence compatibles avec la saturation. A cet effet, nous développerons un schéma de commande composé de deux régulateurs montés en cascade. En utilisant des outils empruntés à la théorie de stabilité entrée/sortie, nous mettons en évidence des critères de choix des paramètres de synthèse afin de garantir la réalisation des objectifs de commande escomptés.

**Mots-clés**— Systèmes blocs, Saturation, Stabilité asymptotique, Poursuite de référence.

## I. INTRODUCTION

Le problème de commande de systèmes impliquant des éléments statique de type saturation a suscité un grand intérêt au cours des deux dernières décennies. Cependant, la plupart des travaux ont porté sur les systèmes que l'on peut décrire par un modèle comprenant une saturation placée en amont d'une dynamique linéaire [1]. La saturation peut représenter un actionneur ou traduire une contrainte externe imposée afin, par exemple, de maintenir le système dans un domaine de fonctionnement linéaire. De nombreux résultats de stabilisation (locale, globale et semi-globale) ont été établis. Dans ce papier, l'intérêt porte sur les systèmes composés d'un élément statique de type saturation pris en sandwich entre deux éléments linéaires (Fig. 1). La structure de modèle ainsi définie, appelée simplement  $L_1NL_2$ , peut décrire plusieurs situations différentes. Par exemple, le bloc  $L_1N$  peut représenter un actionneur dont la dynamique  $L_1$  n'est pas tout à fait négligeable devant celle du procédé ( $L_2$ ) et  $N$  traduit le dispositif de 'fins de course' caractérisant la plupart des actionneurs physiques (moteurs, vannes, ensembles 'distributeurs-vérin', etc). La structure  $L_1NL_2$  peut également représenter un système composés de deux systèmes linéaires montés en série, de dynamiques respectives  $L_1$  et  $L_2$ , auquel cas  $N$  représenterait la saturation de l'ensemble 'capteur-transmetteur' reliant les deux sous-systèmes. Enfin, notons que les deux structures simples  $L_1N$  et  $NL_2$  ne sont que des cas particuliers la structure considérée (Fig. 1). Le présent travail vise à développer une approche de commande pour les systèmes de type  $L_1NL_2$ . Le but étant de forcer sa sortie à poursuivre parfaitement n'importe quel séquence de référence de type échelon, tout en préservant la stabilité globale du système en boucle fermée. A cet effet, un schéma de

commande, comprenant deux boucles montées en cascades, sera conçu en suivant une technique qui s'apparente à celle du backstepping. Le système en boucle fermée résultant fera l'objet d'une analyse formelle utilisant des outils empruntés à la théorie de stabilité entrée-sortie. Il sera ainsi démontré que les objectifs de commande escomptés sont bien atteints à conditions de choisir les paramètres de synthèses selon des critères bien définis. Il convient de noter que la pertinence de l'approche entrée-sortie pour traiter des problèmes de commande impliquant des saturation a bien été soulignée dans [4].

Le papier est organisé comme suit: le problème de commande est formellement défini dans la section II; le régulateur en cascade est conçu et analysé dans la section III; pour alléger le texte, une partie des preuves est placée en annexe.

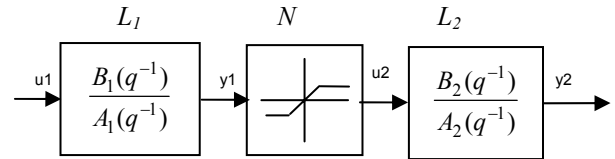


Fig. 1: Structure LNL

## II. FORMULATION DU PROBLEME DE COMMANDE

Nous nous intéressons aux systèmes monovariables de structure  $L_1NL_2$  (Fig. 1). Dans un contexte de commande en temps discret, ces systèmes peuvent être décrits par le modèle suivant:

$$A_1(q^{-1})y_1(t) = B_1(q^{-1})u_1(t) \quad (1)$$

$$u_2(t) = \overset{\text{def}}{\text{sat}}(y_1(t)) = \text{sgn}(y_1(t)) \min(|y_1(t)|, u_{\max}) \quad (2)$$

$$A_2(q^{-1})y_2(t) = B_2(q^{-1})u_2(t) \quad (3)$$

Les polynômes ci-dessus sont de la forme:

$$A_1(q^{-1}) = 1 + a_{11}q^{-1} + a_{12}q^{-2} \dots + a_{na1}q^{-na1} \quad (4)$$

$$B_1(q^{-1}) = q^{-d1}(b_{10} + b_{11}q^{-1} + b_{12}q^{-2} \dots + b_{nb1}q^{-nb1}) \\ = \overset{\text{def}}{q^{-d1}B_1^*(q^{-1})} \quad (5)$$

$$A_2(q^{-1}) = 1 + a_{21}q^{-1} + a_{22}q^{-2} \dots + a_{na2}q^{-na2} \quad (6)$$

$$B_2(q^{-1}) = q^{-d2}(b_{20} + b_{21}q^{-1} + b_{22}q^{-2} \dots + b_{nb2}q^{-nb2}) \\ = \overset{\text{def}}{q^{-d2}B_2^*(q^{-1})} \quad (7)$$

où  $u_1(t)$  et  $y_2(t)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système global.  $u_{\max}$  représente la valeur maximale

autorisée de l'amplitude de la commande  $u_2(t)$ .  $q^{-1}$  est l'opérateur retard.  $(na_1, na_2, nb_1, nb_2, d_1, d_2)$  sont des entiers et  $(a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i})$  sont des nombres réels. Tous ces paramètres sont supposés connus et invariants. La description du système est complétée par les hypothèses suivantes :

H1.  $B_1(q^{-1})$  et  $A_2(q^{-1})$  sont des polynômes d'Hurwitz.

H2.  $(1 - q^{-1})A_2(q^{-1})$  et  $B_2(q^{-1})$  sont premiers entre eux.

L'objectif est de concevoir pour le système décrit ci-haut, un régulateur capable d'assurer, d'une part, la stabilité  $l_\infty$  de la boucle fermée et, d'autre part, la poursuite de n'importe quelle trajectoire de référence  $y_{r2}(t)$  compatible avec la limitation imposée par l'élément  $N$  et cohérente avec le fait que la dynamique  $L_2$  n'est pas nécessairement à minimum de phase. Compte tenu de ces contraintes, l'accent sera mis sur les signaux de références lentement variants en moyenne. A cet effet, nous faisons usage de la notion de vitesse quadratique moyenne. Selon [3], un signal  $s$  est dit  $\mu$ -petit en moyenne, et on note  $s \in SM(\mu)$ , si:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{t=h+1}^{h+k} s(t) \leq \mu \quad (\forall h \in \mathbb{N}).$$

Soit  $\mu$  le plus petit nombre réel tel que:

$$(y_{r2}(t) - y_{r2}(t-1))^2 \in SM(\mu) \quad (8)$$

$\mu$  mesure la variation quadratique moyenne (VQM) de la référence  $y_{r2}(t)$ . Notre but est d'élaborer un régulateur pour lequel on démontre l'existence d'un réel  $K$  tel que :

$$(y_2(t) - y_{r2}(t))^2 \in SM(K\mu) \quad (9)$$

Autrement dit, le régulateur escompté doit assurer une qualité de poursuite proportionnelle à la VQM de la référence  $y_{r2}(t)$ . A ce point, la référence est quelconque. Mais, compte tenu de l'élément (2) du modèle, l'accent sera mis uniquement sur les références qui vérifient la condition:

$$\sup_{0 \leq t < \infty} |y_{r2}(t)| < (B_2(1)/A_2(1))u_{\max} \quad (10)$$

Toutes séquence de référence vérifiant cette condition sera dite compatible avec la limitation imposée par l'élément (2).

*Remarques 1 (interprétation des hypothèses)*

- L'hypothèse H1 stipule, d'une part, que la dynamique  $L_1$  est à phase minimale et, d'autre part, que la dynamique  $L_2$  est stable. L'exigence sur la phase de  $L_1$  rendra possible la poursuite parfaite par la sortie de cet élément de sa trajectoire de référence (de nature a priori quelconque) générée par le régulateur externe. L'hypothèse de stabilité sur  $L_2$  garantit que ce sous-système (et par conséquent l'ensemble du système) reste asymptotiquement stabilisable en dépit de la saturation de l'actionneur ([2]). La dynamique  $L_1$  n'a pas besoin d'être stable car elle n'est précédée d'aucune limitation ( $u_1(t)$  non contraint).
- L'hypothèse H2 assure que la dynamique  $L_2$  est commandable et n'inclut aucun terme de dérivation pure. Le recours à la commandabilité est uniquement motivé par des

raisons de simplicité de l'exposé. En fait, l'étude peut être menée uniquement sous l'hypothèse de stabilisabilité de  $L_2$  comme c'est précisé dans la remarque précédente.

### III. SYNTHÈSE DU RÉGULATEUR

Le schéma de commande est composé de deux boucles de régulation montées en cascade. Il sera élaboré en deux étapes selon une démarche qui s'apparente à celle du backstepping. (Fig.2.)

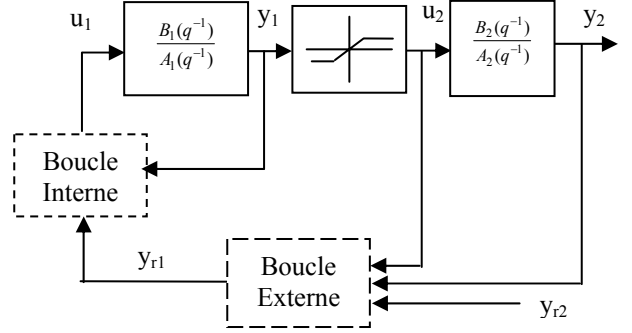


Fig. 2: Structure du régulateur en cascade

#### A. Elaboration de la boucle interne

Le fait que le polynôme  $B_1^*(q^{-1})$  soit d'Hurwitz permet l'élaboration d'un régulateur à modèle de référence pour le sous système (1). A cet effet, soit  $P_1(q^{-1})$  un polynôme d'Hurwitz quelconque de la forme:

$$P_1(q^{-1}) = 1 + p_{11}q^{-1} + p_{12}q^{-2} \dots + p_{np1}q^{-np1} \quad (11)$$

où  $np_1 \leq 2n_1$  avec  $n_1 = \max(na_1, d_1)$ . Puisque  $A_1(q^{-1})$  et  $q^{-d1}$  sont premiers entre eux, il existe une paire unique de polynômes de la forme :

$$R_1(q^{-1}) = 1 + r_{11}q^{-1} + r_{12}q^{-2} \dots + r_{n1-1}q^{-n1+1}$$

$$S_1(q^{-1}) = s_{10} + s_{11}q^{-1} + s_{12}q^{-2} \dots + s_{n1-1}q^{-n1+1}$$

vérifiant l'équation de Bezout suivante:

$$A_1(q^{-1})R_1(q^{-1}) + q^{-d1}S_1(q^{-1}) = P_1(q^{-1}) \quad (12)$$

Soit  $y_{r1}(t)$  le signal de référence de la sortie  $y_1(t)$  du sous-système (1). Ce signal sera généré plus tard par le régulateur externe (non encore déterminé). Alors, le régulateur interne, générant l'action de commande  $u_1(t)$ , est défini par la loi de commande suivante:

$$R_1(q^{-1})B_1^*(q^{-1})u_1(t) + S_1(q^{-1})y_1(t) = P_1(q^{-1})y_{r1}(t + d_1) \quad (13)$$

Les performances de ce régulateur, sont décrites par la proposition suivante:

*Proposition 1. (Performances de la boucle interne)*

Soit le système composé du sous-système (1), soumis à l'hypothèse H1, monté en boucle fermée avec le régulateur (13) où la séquence de référence  $\{y_{r1}(t)\}$  est quelconque mais bornée. Alors,  $u_1(t)$  et  $y_1(t)$  restent bornés et l'erreur de

poursuite  $\tilde{y}_1(t) = y_1(t) - y_{r1}(t)$  converge exponentiellement vers zéro  $\square$

*Preuve.* Opérant (12) sur  $y_1(t + d_1)$  donne:

$$A_1(q^{-1})R_1(q^{-1})y_1(t + d_1) + S_1(q^{-1})y_1(t) = P_1(q^{-1})y_1(t + d_1)$$

En tenant compte de (1), il s'ensuit que:

$$R_1(q^{-1})B_1^*(q^{-1})u_1(t) + S_1(q^{-1})y_1(t) = P_1(q^{-1})y_1(t + d_1) \quad (14)$$

Soustrayant cette équation de (13) donne  $P_1(q^{-1})(y_1(t + d_1) - y_{r1}(t + d_1)) = 0$  ce qui implique  $\tilde{y}_1(t) \rightarrow 0$  puisque  $P_1(q^{-1})$  est un polynôme d'Hurwitz. La bornitude de  $u_1(t)$  et  $y_1(t)$  découle du résultat précédent en utilisant le fait que le sous-système (1) est à minimum de phase.

### B. Elaboration de la boucle externe

Le signal interne  $u_2(t)$  se présente comme une commande virtuelle pour le sous-système (2). Dans cette étape, ce signal sera temporairement considéré comme étant une vraie entrée de commande. Le but étant alors d'élaborer pour ce sous-système un régulateur capable de forcer sa sortie  $y_2(t)$  à suivre parfaitement sa trajectoire de référence  $y_{r2}(t)$ . Par commodité, ce problème de poursuite est transformé en un problème de régulation. A cet effet, introduisons l'erreur de poursuite de sortie:

$$\tilde{y}_2(t) = y_2(t) - y_{r2}(t) \quad (15)$$

En opérant  $A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})$  sur  $\tilde{y}_2(t)$  et en tenant compte de (3), il vient que:

$$A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})\tilde{y}_2(t) = B_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t) - A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})y_{r2}(t) \quad (16)$$

L'égalité (16) définit un système virtuel de sortie  $\tilde{y}_2(t)$  et d'entrée  $\Delta(q^{-1})u_2(t)$ . Le terme  $A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})y_{r2}(t)$  s'apparente à une perturbation. Il est évident que faire tendre  $y_2(t)$  vers  $y_{r2}(t)$  équivaut à faire tendre  $\tilde{y}_2(t)$  vers 0. A cet effet, soit  $P_2(q^{-1})$  un polynôme d'Hurwitz de la forme:

$$P_2(q^{-1}) = 1 + p_{21}q^{-1} + p_{22}q^{-2} \dots + p_{np2}q^{-np2} \quad (17)$$

où  $np_2 \leq 2n_2 - 1$  avec  $n_2 = \max(na_2 + 1, nb_2 + d_2)$ .

Comme  $(1 - q^{-1})A_2(q^{-1})$  et  $B_2(q^{-1})$  sont premiers entre eux, il existe une paire unique de polynômes:

$$R_2(q^{-1}) = 1 + r_{21}q^{-1} + r_{22}q^{-2} \dots + r_{n2-1}q^{-n2+1}$$

$$S_2(q^{-1}) = s_{20} + s_{21}q^{-1} + s_{22}q^{-2} \dots + s_{n2-1}q^{-n2+1}$$

qui soit solution de l'équation de Bezout:

$$A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})R_2(q^{-1}) + S_2(q^{-1})B_2(q^{-1}) = P_2(q^{-1}) \quad (18)$$

En utilisant les notations précédentes, le régulateur externe se définit par les équations suivantes:

$$v_2(t) = (1 - \Delta(q^{-1})R_2(q^{-1}))u_2(t) - S_2(q^{-1})\tilde{y}_2(t) \quad (19)$$

$$y_{r1}(t + d_1) = \text{sat}(v_2(t), u_{\max}) \quad (20)$$

La boucle externe résultant est illustrée par la Fig. 3. Notons que le limiteur (20) s'explique par le fait que le signal  $y_{r1}(t)$  sert de trajectoire de référence pour la sortie  $u(t)$  de l'élément

N du modèle. Comme cette dernière est physiquement contraint (par ce même élément) à demeurer dans l'intervalle  $[-u_{\max}, u_{\max}]$ , il était logique que sa référence soit également contrainte à demeurer dans le même intervalle.

*Remarque 2.*

a) Dans le cas où le limiteur (20) ne se sature jamais ( $u_2(t) < u_{\max}, \forall t$ ), la loi de commande (19-20) se simplifie comme suit:

$$R_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t) + S_2(q^{-1})\tilde{y}_2(t) = 0 \quad (21)$$

Cette équation est celle d'un régulateur linéaire à retour unitaire avec une action intégrale. Il n'est pas difficile de montrer que, dans ce cas, l'objectif de régulation escompté (à savoir  $\tilde{y}_2(t) \rightarrow 0$ ) est parfaitement atteint à condition que le terme  $\Delta(q^{-1})y_{r2}(t)$  dans (16) soit nul (c'est-à-dire  $y_{r2}(t)$  invariant).

b) Les résultats de la proposition 1 sont conditionnés par le fait que la référence  $y_{r1}(t)$  de la boucle interne est bornée. Cette condition est à présent vérifiée grâce au limiteur (20). Donc, nous pouvons désormais utiliser, en particulier, le fait que  $\{y_1(t) - y_{r1}(t)\} \rightarrow 0$   $t \rightarrow \infty$ . Ce qui va être fait dans la sous-section C.

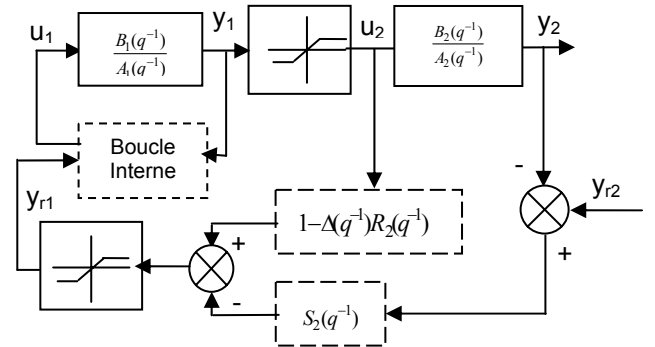


Fig.3: Loi de commande de la boucle externe

### C. L'analyse du système de commande global

Les performances du schéma de commande global comprenant les deux régulateurs, interne et externe, sont décrites dans la proposition suivante:

*Proposition 2. (Performances de la boucle externe)*

Considérons le système (1-3), soumis aux hypothèses (H1-2), monté en boucle fermée avec les régulateurs définis par les lois de commande (13) et (19-20), où la référence  $y_{r2}(t)$  vérifie les conditions (8) et (10). Alors nous avons les propriétés suivantes:

- Toutes les séquences de la boucle fermée sont bornées.
- Si

$$\inf_{\omega \in [0, 2\pi[} \left[ \text{Re} \left( \frac{P_2(e^{-j\omega})}{A_2(e^{-j\omega})} \right) \right] > 0 \quad (22)$$

alors, il existe un réel  $K$ , indépendant de  $\mu$ , tel que:

$$\{(v_2(t) - u_2(t))^2\} \in SM(K\mu)$$

$$\{(y_2(t) - y_{r2}(t))^2\} \in SM(K\mu)$$

c) En plus, si  $\{(y_{r2}(t) - y_{r2}(t-1))^2\} \in I_2$ , alors  $\{v_2(t) - u_2(t)\}$  et  $\{y_2(t) - y_{r2}(t)\}$  convergent vers 0  $\square$

*Preuve.* Au regard de la longueur de la preuve, celle-ci a été placée en annexe permettant ainsi un allègement du texte.

*Remarque 3.* Dans la preuve de la proposition 2, il est fait usage d'outils théoriques relevant de l'approche de stabilité entrée-sortie [3]. Parmi ces outils, le critère du cercle qui a conduit à la condition de positivité réelle (22). Cette condition définit en fait un voisinage des pôles de la dynamique  $L_2$  dans lequel doivent être assignés les pôles en boucle fermée induits par le polynôme  $P_2(e^{-j\omega})$ . Moyennant ce placement spécifique de pôles, la qualité de poursuite escomptée est garantie, en dépit de la présence de l'élément saturant  $N$  dans le système.

#### IV. SIMULATION

Les résultats théoriques établis dans les propositions 1 et 2 ont été confirmés par voie de simulation. Mais, faute de place, il n'a pas été possible d'inclure les résultats de simulation. Ces derniers seront présentés à la conférence.

#### V. CONCLUSION

Nous avons abordé le problème de commande de systèmes de structure  $L_1/NL_2$  où l'élément non linéaire  $N$  est de type saturation. Un schéma de commande en cascade a été élaboré en suivant une démarche qui s'apparente à la technique du backstepping. Le choix du polynôme  $P_2(e^{-j\omega})$ , caractérisant le régulateur externe, s'est avéré crucial. La condition de positivité réelle (22) constitue un critère de choix assurant la poursuite de trajectoires de référence par la sortie du système.

#### ANNEXE

##### Aperçu sur la preuve de la proposition 2

*Preuve de la partie 1.* Montrons que toutes les séquences du système en boucle fermée sont bornées.

La séquence  $u_2(t)$  est bornée puisqu'elle est la sortie du limiteur (2). Il s'ensuit que  $y_2(t)$  est aussi bornée puisqu'elle est la sortie du système linéaire  $L_2$  qui est BIBO stable par hypothèse.

Il vient de (19) que  $v_2(t)$  est donnée par :

$$v_2(t) = (1 - \Delta(q^{-1})R_2(q^{-1}))u_2(t) - S_2(q^{-1})\tilde{y}_2(t)$$

où  $\tilde{y}_2(t)$  constitue l'erreur de poursuite. Ceci implique que  $v_2(t)$  est bornée puisque la séquence de référence  $y_{r2}(t)$  est bornée. Enfin, il vient de (20) que la séquence de référence interne  $y_{r1}(t)$  est bornée ce qui implique que  $y_1(t)$  est aussi

bornée en vertu de la proposition 1.

*Preuve de la partie 2.* Montrons que si

$$\inf_{\omega \in [0, 2\pi[} \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{P_2(e^{-j\omega})}{A_2(e^{-j\omega})} \right) \right] > 0$$

alors, il existe un réel  $K$ , indépendant de  $\mu$ , tel que :

$$\{(y_2(t) - y_{r2}(t))^2\} \in SM(K\mu)$$

Multipliant les deux membres de (3) par  $\Delta(q^{-1})=1-q^{-1}$  donne:

$$A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})y_2(t) = B_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t) \quad (23)$$

ce qui à son tour se réécrit comme suit:

$$A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})\tilde{y}_2(t) = B_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t) - A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})y_{r2}(t) \quad (24)$$

Ensuite, multiplions les deux termes de la loi de commande (19) par  $A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})$  :

$$A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})v_2(t) = A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})(1 - \Delta(q^{-1})R_2(q^{-1}))u_2(t) - A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})S_2(q^{-1})\tilde{y}_2(t) \quad (25)$$

Rappelons par commodité l'équation de Bezout (18):

$$A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})R_2(q^{-1}) + B_2(q^{-1})S_2(q^{-1}) = P_2(q^{-1}) \quad (26)$$

Au regard des équations (24)-(26), il découle de (26) que:

$$\Delta(q^{-1})v_2(t) = \left[ 1 - P_2(q^{-1})/A_2(q^{-1}) \right] \Delta(q^{-1})u_2(t) + S_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})y_{r2}(t) \quad (27)$$

En notant

$$\delta_1(t) = S_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})y_{r2}(t).$$

(27) se réécrit simplement :

$$\Delta(q^{-1})v_2(t) = \left( 1 - \frac{P_2(q^{-1})}{A_2(q^{-1})} \right) \Delta(q^{-1})u_2(t) + \delta_1(t) \quad (28)$$

En utilisant les hypothèses (H1-H2), et le fait que  $y_{r2}(t)$  est  $\mu$ -petit en moyenne, nous pouvons affirmer qu'il existe un réel  $k_1$ , indépendant de  $\mu$ , tel que :

$$\{\delta_1(t)\} \in S(k_1\mu) \quad (29)$$

Par ailleurs, il vient de (2):

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \operatorname{sat}(y_1(t)) = \operatorname{sat}(y_{r1}(t)) + \delta_2 \\ &= \operatorname{sat}(\operatorname{sat}(v_2(t))) + \delta_2 \quad (\text{d'après (20)}) \\ &= \operatorname{sign}(v_2(t)) \min(|v_2(t)|, u_{\max}) + \delta_2 \end{aligned} \quad (30)$$

où  $\delta_2$  est un terme qui converge exponentiellement vers zéro en vertu de la proposition 1 et de la continuité de la fonction  $\operatorname{sat}(\cdot)$ .

Introduisons l'opérateur non linéaire  $\psi$  suivant:

$$\Delta(q^{-1})v_2(t) \xrightarrow{\psi} \Delta(q^{-1})\bar{u}_2(t) \quad (31)$$

avec

$$\bar{u}_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sign}(v_2(t)) \min(|v_2(t)|, u_{\max}) \quad (32)$$

Les équations (29), (30) et (31) définissent le système à rétroaction représenté par la Fig.4.

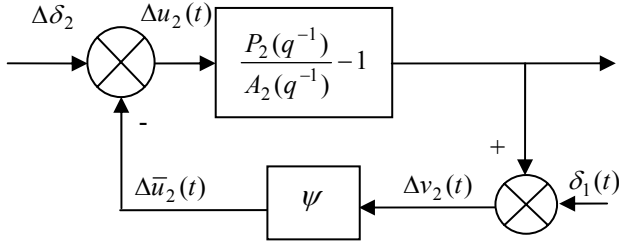


Fig. 4: Boucle fermée avec le retour non linéaire

Les propriétés suivantes de la saturation sont immédiates:

$$\left| \Delta(q^{-1})\bar{u}_2(t) \right| \leq \left| \Delta(q^{-1})v_2(t) \right| \quad (33)$$

$$\text{sign}(\Delta(q^{-1})\bar{u}_2(t)) = \text{sign}(\Delta(q^{-1})v_2(t)) \quad (34)$$

Il en découle que:

$$0 \leq \Delta(q^{-1})u_2(t+d_1)\Delta(q^{-1})v_2(t) \leq (\Delta(q^{-1})v_2(t))^2 \quad (35)$$

Ceci implique que  $\psi \in S(0,1)$  où  $S(\alpha, \beta)$  (avec  $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ ), dénote le secteur du plan délimité par les droites, passant par l'origine, de pentes respectives  $\alpha$  et  $\beta$  (voir par exemple [3]).

En définitive, nous sommes en présence d'un système en boucle fermée dont la chaîne directe est une dynamique linéaire stable et dont la chaîne de retour est un élément non linéaire conique et qui appartient au secteur  $S(0,1)$ . Alors, il vient du critère du cercle [3], qu'un tel feedback est  $l_2$ -stable si et seulement si la dynamique de sa chaîne directe vérifie :

$$\inf_{\omega \in [0, 2\pi]} \left[ \text{Re} \left( \frac{P_2(e^{-j\omega})}{A_2(e^{-j\omega})} \right) \right] > 0 \quad (36)$$

Rappelons que l'objectif de cette analyse est de montrer qu'il existe un réel  $K$ , indépendant de  $\mu$ , tel que :

$$\left\{ |y_2(t) - y_{r2}(t)|^2 \right\} \in S(K\mu)$$

Nous allons procéder en deux étapes :

Dans la première étape, nous montrerons qu'il existe un réel  $K_1$ , indépendant de  $\mu$ , tel que :

$$\left\{ \left| \Delta(q^{-1})v_2(t) \right|^2 \right\}, \left\{ \left| \Delta(q^{-1})u_2(t) \right|^2 \right\}, \left\{ \left| \Delta(q^{-1})y_2(t) \right|^2 \right\} \in S(K_1\mu)$$

Ensuite, lors de la seconde étape, nous montrerons qu'il existe un réel  $K_2$ , indépendant de  $\mu$ , tel que :

$$\left\{ |v_2(t) - u_2(t)|^2 \right\} \in S(K_2\mu) \text{ et } \left\{ |\tilde{y}_2(t)|^2 \right\} \in S(K_2\mu).$$

#### Première étape :

En appliquant la propriété de petitesse en moyenne, nous pouvons affirmer qu'il existe un réel  $k_2$ , indépendant de  $\mu$ , tel que, d'après (31)-(32):

$$\left\{ \left| \Delta(q^{-1})v_2(t) \right|^2 \right\} \in S(k_2\mu) \text{ et } \left\{ \left| \Delta(q^{-1})u_2(t) \right|^2 \right\} \in S(k_2\mu) \quad (37)$$

Puisque  $A_2(q^{-1})$  est un polynôme d'Hurwitz, il en résulte aussi que :

$$\left\{ \left| \Delta(q^{-1})y_2(t) \right|^2 \right\} \in S(k_3^2 k_2\mu) \quad (38)$$

où  $k_3$  est le gain- $l_2$  de la dynamique  $B_2(q^{-1})/A_2(q^{-1})$ .

La première étape est ainsi démontrée.

#### Seconde étape :

Selon (19), la loi de commande de la boucle externe s'écrit :

$$v_2(t) = (1 - \Delta(q^{-1})R_2(q^{-1}))u_2(t) - S_2(q^{-1})\tilde{y}_2(t),$$

Ce qui peut être réécrit :

$$v_2(t) = u_2(t) - S_2(1)\tilde{y}_2(t) + \delta_2(t) \quad (39)$$

où :

$$\delta_2(t) = -R_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t) - (S_2(q^{-1}) - S_2(1))\tilde{y}_2(t) \quad (40)$$

Or,  $\left\{ \left| \Delta(q^{-1})u_2(t) \right|^2 \right\} \in S(k_2\mu)$ ,  $\left\{ \left| \Delta(q^{-1})y_2(t) \right|^2 \right\} \in S(k_3^2 k_2\mu)$

$$\text{et } \left\{ \left| \Delta(q^{-1})y_{r2}(t) \right|^2 \right\} \in S(\mu),$$

Alors, il s'ensuit, à partir de (39), qu'il existe un réel  $k_4$ , indépendant de  $\mu$ , tel que :

$$\left\{ (\delta_2(t))^2 \right\} \in S(k_4\mu) \quad (41)$$

De même, l'équation (3) peut être réécrite :

$$A_2(1)y_2(t) = B_2(1)u_2(t) + \delta_3(t) \quad (42)$$

avec :

$$\delta_3(t) = (B_2(q^{-1}) - B_2(1))u_2(t) - (A_2(q^{-1}) - A_2(1))y_2(t) \quad (43)$$

Et en utilisant (37-38), nous pouvons déduire de (43) qu'il existe une constante  $k_5$ , indépendante de  $\mu$ , telle que :

$$\left\{ (\delta_3(t))^2 \right\} \in S(k_5\mu) \quad (44)$$

Maintenant, en multipliant les deux membres de (42) par  $P_2(1)/(A_2(1)B_2(1))$ , il s'ensuit :

$$P_2(1)/B_2(1)y_2(t) = P_2(1)/A_2(1)u_2(t) + P_2(1)/(A_2(1)B_2(1))\delta_3(t) \quad (45)$$

Or, il découle de l'équation (26) que :

$$S_2(1)B_2(1) = P_2(1) \quad (46)$$

En remplaçant  $S_2(1)$  par  $P_2(1)/B_2(1)$  dans (39), et en tenant compte de (45), il s'ensuit :

$$v_2(t) = u_2(t) - P_2(1)/A_2(1)u_2(t) + P_2(1)/B_2(1)y_{r2}(t) - P_2(1)/(A_2(1)B_2(1))\delta_3(t) + \delta_2(t) \quad (47)$$

Notons par :

$$u_{r2}(t) = A_2(1)/B_2(1)y_{r2}(t) \quad (48)$$

Alors, selon (10), nous avons :

$$\left| u_{r2}(t) \right| \leq u_{\max} \quad (49)$$

Donc, en utilisant (48), (47) peut être réécrite comme suite :

$$v_2(t) = u_2(t) + P_2(1)/A_2(1)(u_{r2}(t) - u_2(t)) + \delta_4(t) \quad (50)$$

avec :

$$\delta_4(t) = -P_2(1)/(A_2(1)B_2(1))\delta_3(t) + \delta_2(t) \quad (51)$$

En tenant compte de (41)-(44), il existe une constante  $k_6$ , indépendante de  $\mu$ , telle que :

$$\left\{ (\delta_4(t))^2 \right\} \in S(k_6\mu) \quad (52)$$

D'abord, remarquons que lorsque  $|u_2(t)| < |u_{r2}(t)|$ , il découle de (49) que  $|u_2(t)| < u_{\max}$ , ce qui signifie que :

$$u_2(t) = v_2(t) \quad (53)$$

Maintenant, supposons qu'il existe un instant  $t$ , tel que :

$$\left| u_2(t) \right| \geq \left| u_{r2}(t) \right| \quad (54)$$

Alors, en remarquant que  $A_2(1)$  et  $P_2(1)$  sont positifs, il découle de (50) que :

$$\left| v_2(t) \right| \leq \left| u_2(t) \right| + \left| \delta_4(t) \right| \quad (55)$$

En combinant (54) et (55), nous pouvons dire que pour tout instant  $t$ , nous avons :

$$|v_2(t)| \leq |u_2(t)| + |\delta_4(t)| \quad (56)$$

Comme  $\text{sign}(u_2(t)) = \text{sign}(v_2(t))$ , il découle de (56) que, pour tout instant  $t$ , nous avons :  $|v_2(t) - u_2(t)| \leq \delta_4(t)$

Alors, en tenant compte de (52), il s'ensuit aussi que :

$$\left\{ (v_2(t) - u_2(t))^2 \right\} \in S(k_6, \mu) \quad (57)$$

Enfin, il s'ensuit de l'équation (39), en utilisant (57), que :

$$\left\{ (y_2(t) - y_{r2}(t))^2 \right\} \in S(k_7, \mu) \quad (58)$$

où  $k_7$  est une constante dépendante de  $k_4$ ,  $k_6$  et  $S_2(1)$ .

La partie (b) de la proposition 2 est alors vérifiée pour  $K = \max(k_6, k_7)$ .

*Preuve de la partie 3.* Maintenant, montrons que si  $\{y_{r2}(t) - y_{r2}(t-1)\} \in l_2$

Alors  $\{v_2(t) - u_2(t)\}$  et  $\{y_2(t) - y_{r2}(t)\}$  convergent vers 0.

D'abord, selon la partie (b), si la condition (36) est vérifiée, alors le feedback de la figure 4 est  $l_2$ -stable.

Par suite, si  $\{y_{r2}(t) - y_{r2}(t-1)\} \in l_2$ , alors, l'entrée du feedback de la figure 4, en l'occurrence  $\delta_1(t)$ , appartient à  $l_2$ .

Et par conséquent :

$$\left\{ \Delta(q^{-1})v_2(t) \right\} \in l_2 \text{ et } \left\{ \Delta(q^{-1})u_2(t) \right\} \in l_2 \quad (59)$$

En plus, en multipliant (3) par  $\Delta(q^{-1})$ , nous obtenons :

$$A_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})y_2(t) = B_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t)$$

Puisque  $A_2(q^{-1})$  est un polynôme d'Hurwitz, nous obtenons :

$$\left\{ \Delta(q^{-1})y_2(t) \right\} \in l_2 \quad (60)$$

Or, l'équation (39) peut être aussi réécrite :

$$v_2(t) = u_2(t) - S_2(1)(y_2(t) - y_{r2}(t)) + \delta_2(t) \quad (61)$$

avec :

$$\delta_2(t) = -R_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t) - (S_2(q^{-1}) - S_2(1))(y_2(t) - y_{r2}(t))$$

Puisque  $\left\{ \Delta(q^{-1})u_2(t) \right\} \in l_2$ ,  $\left\{ \Delta(q^{-1})y_2(t) \right\} \in l_2$  et  $\left\{ \Delta(q^{-1})y_{r2}(t) \right\} \in l_2$

alors :

$$\left\{ \delta_2(t) \right\} \in l_2 \quad (62)$$

Utilisons un raisonnement par l'absurde afin de montrer que  $\{v_2(t) - u_2(t)\}$  converge vers 0:

Supposons que  $\{v_2(t) - u_2(t)\}$  ne converge pas vers 0 :

Alors, il existe un réel  $\varepsilon > 0$  et une sous-séquence  $\{v_2(t_i) - u_2(t_i)\}$  telle que pour tout  $i$  :

$$|v_2(t_i) - u_2(t_i)| \geq \varepsilon \quad (63)$$

Parmi les séquences  $\{v_2(t_i)\}$  et  $\{u_2(t_i)\}$ , considérons les sous-séquences  $\{v_2(t_{ij})\}$  et  $\{u_2(t_{ij})\}$  dont les termes sont à signe constant. En d'autres termes, pour tout  $j$  :

$$\text{sign}(v_2(t_{ij})) = \text{sign}(u_2(t_{ij})) = s, \quad (s=1 \text{ ou } -1) \quad (64)$$

Donc, selon (63), nous avons, pour tout  $j$  :

$$su_2(t_{ij}) = |u_2(t_{ij})| = u_{\max} \text{ et } sv_2(t_{ij}) = |v_2(t_{ij})| \geq u_{\max} \quad (65)$$

De plus, la réécriture de l'équation (3) sous une forme identique à celle de (42) donne :

$$A_2(1)y_2(t) = B_2(1)u_2(t) + \delta_3(t) \quad (66)$$

Avec :

$$\delta_3(t) = (B_2(q^{-1}) - B_2(1))u_2(t) - (A_2(q^{-1}) - A_2(1))y_2(t).$$

Comme :

$$\left\{ \Delta(q^{-1})u_2(t) \right\} \in l_2 \text{ et } \left\{ \Delta(q^{-1})y_2(t) \right\} \in l_2$$

il vient que :

$$\left\{ \delta_3(t) \right\} \in l_2 \quad (67)$$

Or, d'après (46), nous avons :  $S_2(1)B_2(1) = P_2(1)$

Donc, en tenant compte de (66), ceci implique que :

$$\begin{aligned} S_2(1)y_2(t) &= P_2(1)/B_2(1)y_2(t) \\ &= P_2(1)/A_2(1)[u_2(t) + \delta_3(t)/B_2(1)] \end{aligned} \quad (68)$$

Reportons (68) dans (61) pour les instants  $t_{ij}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} v_2(t_{ij}) &= u_2(t_{ij}) - P_2(1)/A_2(1)[u_2(t_{ij}) + \delta_3(t_{ij})/B_2(1)] \\ &\quad + P_2(1)/B_2(1)y_{r2}(t_{ij}) + \delta_2(t_{ij}) \end{aligned} \quad (69)$$

Cela signifie que :

$$\begin{aligned} sv_2(t_{ij}) &= su_2(t_{ij}) - P_2(1)/A_2(1)[su_2(t_{ij}) + s\delta_3(t_{ij})/B_2(1)] \\ &\quad + P_2(1)/B_2(1)sy_{r2}(t_{ij}) + s\delta_2(t_{ij}) \end{aligned}$$

Par suite, en tenant compte de (65), il s'ensuit :

$$\begin{aligned} |v_2(t_{ij})| &\leq u_{\max} - P_2(1)/A_2(1)[u_{\max} + s\delta_3(t_{ij})/B_2(1)] \\ &\quad + P_2(1)/A_2(1)u_{\max} + s\delta_2(t_{ij}) \end{aligned}$$

Enfin, nous obtenons :

$$|v_2(t_{ij})| \leq u_{\max} - P_2(1)/A_2(1)[s\delta_3(t_{ij})/B_2(1)] + s\delta_2(t_{ij}) \quad (70)$$

L'inégalité (70) implique, en tenant compte de (62)-(67) que :

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |v_2(t_{ij})| \leq u_{\max} \quad (71)$$

Or, ceci contredit (63). Alors  $\{v_2(t) - u_2(t)\}$  converge vers 0.

D'autres part, l'équation (19) peut être réécrite comme suite :

$$v_2(t) - u_2(t) = -R_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t) - S_2(q^{-1})\tilde{y}_2(t) \quad (72)$$

En multipliant (72) par  $B_2(q^{-1})$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} B_2(q^{-1})(v_2(t) - u_2(t)) &= -B_2(q^{-1})R_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})u_2(t) \\ &\quad - B_2(q^{-1})S_2(q^{-1})\tilde{y}_2(t) \end{aligned}$$

Et, en tenant compte de l'équation de Bezout (18), il découle :

$$P_2(q^{-1})\tilde{y}_2(t) = -B_2(q^{-1})(v_2(t) - u_2(t)) - A_2(q^{-1})R_2(q^{-1})\Delta(q^{-1})y_{r2}(t).$$

Puisque, d'une part,  $\{v_2(t) - u_2(t)\}$  et  $\{\Delta(q^{-1})y_{r2}(t)\}$  sont toutes les deux convergentes vers 0 et d'autre part  $P_2(q^{-1})$  est un polynôme d'Hurwitz, il en résulte que  $\{\tilde{y}_2(t)\} = \{y_2(t) - y_{r2}(t)\}$  converge aussi vers 0.

## REFERENCES

- [1] Glatfelter A.H. and W. Schaufelberger (2003). Control systems with input and output constraints. Springer, Berlin.
- [2] Sussmann H. J., E.D. Sontag, and Y. Yang, (1994). A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. IEEE-TAC, vol.AC-39, n°12, pp.2411-2425.
- [3] Vidyasagar M., (2002). Nonlinear systems analysis. 2d edition, SIAM, PA, USA. ISBN: 0-89871-526-1
- [4] P. Hippe (2006). Windup in Control: Its Effects and Their Prevention. Springer, UK.