

Observateur décentralisé des systèmes de grande dimension à entrées inconnues

Mejda MANSOURI¹, Latifa BOUTATBADDAS², Mohamed DAROUACH², Hassani MESSAOUED¹

¹Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, Avenue Ibn El Jazzar, 5019 Monastir, Tunisie
Mejda.Mansouri@iut-longwy.uhp-nancy.fr, hassani.messaoud@enim.rnu.tn

²Centre de Recherche en Automatique de Nancy,
 UMR 7039 – Nancy-Université, IUT de Longwy, CNRS
 186 Rue de Lorraine, 54400 Cosnes et Romain, France.

latifa.boutat-baddas@iut-longwy.uhp-nancy.fr, darouach@iut-longwy.uhp-nancy.fr

Résumé— Cet article traite le problème de synthèse des observateurs des systèmes linéaires de grande dimension. L'approche que nous proposons ici présente l'observateur décentralisé pour ces systèmes quand les interconnexions ne sont pas disponibles. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de tels observateurs sont données. Un exemple sera présenté pour valider ces résultats.

Mots-clés— Système de grande dimension, Observateur décentralisé, entrée inconnue.

I. INTRODUCTION

L'automatique moderne repose sur la description des systèmes et des phénomènes physiques de plus en plus complexes, cela nécessite l'information à priori sur le système (modèle ou valeurs des paramètres) et l'information à posteriori sur la réponse du système (ensemble des mesures provenant des différents capteurs) soient disponible en même temps, hypothèse qui est plutôt irréaliste dans le cas de systèmes à grande dimension caractérisés par une dispersion géographique ou un nombre élevé de variables d'états. Ces systèmes ne peuvent pas être traités avec efficacité que s'ils sont décomposés en sous-systèmes interconnectés de dimensions les plus faibles que possible qui mène à une structure décentralisée beaucoup plus simple à manipuler pour une commande basée observateur. La plupart des stratégies de commande développées suppose que les états des sous-systèmes sont disponibles ([7], [8]). Cependant, la disponibilité de ces états n'est pas toujours garantie en pratique. Dans cet article, on propose un observateur pour les systèmes interconnectés de grande dimension à interconnexions indisponibles, ces interconnexions sont considérées comme des entrées inconnues. En effet, la synthèse d'observateur à entrées inconnues pour les systèmes "à petite dimension" a suscité l'intérêt de la communauté automatique ces dernières années ([16], [9], [11], [2], [4] et [5]), du moment où la perturbation du système ou une de ces entrées n'est pas toujours accessible. En [4], on présente une méthode très intéressante pour la synthèse d'observateur à entrées inconnues qui utilise l'équation de Sylvester sous contrainte et les inverses généralisés. Ce travail est une extension des travaux présentés en [5] pour les systèmes de faibles dimensions aux cas des systèmes à grandes dimensions. Le plan de cet article est le suivant : le problème est présenté dans la section 1, l'observateur global dans la section 2. La section 3 porte sur l'observateur décentralisé,

cet observateur sera appliqué sur un exemple en section 4 et la section 5 conclue l'article.

II. POSITION DU PROBLÈME

Considérons le système linéaire de grande dimension formé de N sous-systèmes et décrit par le modèle d'état suivant :

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) + Fw(k) \quad (1)$$

$$Z(k) = HX(k) + Rw(k) \quad (2)$$

où $X(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u(k) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$, $Z(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ et $w(k) \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ sont respectivement l'état, l'entrée connue, la sortie et l'entrée inconnue. Considérons la partition des vecteurs $X(k)$ et $Z(k)$ suivante :

$$X(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{pmatrix}, \quad Z(k) = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_N(k) \end{pmatrix}$$

et les matrices A , B , F , H and R sont des matrices réelles et constantes de dimensions appropriées et partitionnées selon $X(k)$ comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & H_N \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}.$$

Remarque 1 : La décomposition ci-dessus ne présente pas de limitation, car on peut toujours se ramener à cette forme en utilisant des transformations de similarité comme dans ([2], [3], [6] et [14]).

Le système (1-2) peut alors s'écrire sous sa forme décentralisée, en N sous-systèmes interconnectés, chaque sous-système est décrit par :

$$x_i(k+1) = A_{ii}x_i(k) + B_iu(k) + D_iv_i(k) + F_iw(k) \quad (3)$$

$$z_i(k) = H_ix_i(k) + R_iw(k), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (4)$$

où

$$A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l_i},$$

$$F_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}, H_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}, R_i \in \mathbb{R}^{p_i \times q_i}$$

$$\text{et } n = n_1 + \dots + n_N.$$

les vecteurs $x_i(k)$ et $z_i(k)$ sont l'état et la sortie i -ème de sous-système respectivement.

$$D_i = \begin{bmatrix} A_{i1} & \dots & A_{i(i-1)} & A_{i(i+1)} & \dots & A_{iN} \end{bmatrix}$$

et

$$v_i(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \dots x_{i-1}(k) & x_{i+1}(k) & \dots & x_N(k) \end{bmatrix}.$$

L'objectif de cet article est de synthétiser un observateur décentralisé pour chaque sous-système donné par (3-4) qui satisfait les performances globales obtenues avec les observateurs centralisés. Pour résoudre ce problème, on considère que les interconnexions entre le sous-système i et le sous-système j $i \in \{1 \dots N\}$ et $j \neq i$ sont inconnues. Avant de présenter des observateurs d'ordre plein dans

sa forme globale, on tient à transformer le système (1-2), en un système équivalent plus adapté à la synthèse d'observateurs à entrées inconnues. En effet, on va essayer d'extraire les mesures libres des perturbations, on n'utilise que la partie utile de $w(k)$ et de $Z(k)$. La partie des signaux de $w(k)$ et de $Z(k)$ n'apportant pas d'information ne sera pas utilisée.

Soit q_1 le rang de R , alors, il existe deux matrices régulières U et V telles que :

$$U^T R V = \begin{pmatrix} I_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Le système (1-2) devient :

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + Bu(k) + F_1 Z_1(k) + F_2 w_2(k) \quad (6)$$

$$Z_1(k) = \bar{H}_1 X(k) + w_1(k) \quad (7)$$

$$Z_2(k) = \bar{H}_2 X(k) \quad (8)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = UZ, \quad \begin{pmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} = \bar{H} = UH,$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = V^{-1}w, \quad \bar{A} = A - F_1 \bar{H}_1$$

$$\text{et } FV = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \end{pmatrix}.$$

Avant d'aborder la synthèse des observateur, introduisons quelques hypothèses.

Hypothèse 1 : $\text{rang} \bar{H}_2 F_2 = \text{rang} F_2$.

Hypothèse 2 : $\text{rang} \begin{pmatrix} D_i & F_i \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} D_i & F_i \end{pmatrix}$.

III. OBSERVATEUR GLOBALE

L'observateur à entrée inconnues relatif au système (6-7-8) est donné par :

$$\xi(k+1) = N\xi(k) + Mu(k) + L_1 Z_1(k) + L_2 Z_2(k) \quad (9)$$

$$\hat{X}(k) = \xi(k) - EZ_2(k) \quad (10)$$

Où \hat{X} est l'estimée de X , ξ est l'état de l'observateur. les matrices N , M , L_1 et L_2 sont des matrices à déterminer telles que $e(k) = X(k) - \hat{X}(k)$ soit non biaisé, i.e indépendant de $u(k)$ et de $w(k)$, et converge vers zéro lorsque $k \rightarrow \infty$.

Les propositions suivantes donnent les conditions d'existence et de stabilité de l'observateur donné par (9-10).

Proposition 1 : Le système (9-10) est un observateur asymptotique i.e : $\lim_{k \rightarrow \infty} X(k) - \hat{X}(k) = 0$ si :

i) N est stable.

ii) $P\bar{A} - NP - L_2 \bar{H}_2 = 0$

iii) $PF_2 = 0$

iv) $PB - M = 0$

v) $PF_1 = L_1$, où $P = (I + E\bar{H}_2)$

Preuve 1 : Soit $e(k) = X(k) - \hat{X}(k)$ l'erreur d'estimation, alors :

$$e(k) = X(k) - \xi(k) + EZ_2(k)$$

sa dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= X(k+1) - \xi(k+1) + EZ_2(k+1) \\ &= Ne(k) + (P\bar{A} - NP - L_2 \bar{H}_2)X(k) \\ &+ PF_2 w_2(k) + (PB - M)u(k) \\ &+ (PF_1 - L_1)Z_1(k) \end{aligned}$$

où $P = (I + E\bar{H}_2)$. L'erreur $e(k)$ est indépendante de $X(k)$, de $u(k)$ et des perturbations si :

$$(P\bar{A} - NP - L_2 \bar{H}_2) = 0 \quad (11)$$

$$PF_2 = 0 \quad (12)$$

$$PB - M = 0 \quad (13)$$

$$PF_1 = L_1 \quad (14)$$

Dans ce cas $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$ si et seulement si N est stable, ce qui correspond à la condition i) de la proposition 1, ainsi on termine la démonstration.

Maintenant, pour résoudre l'équation de Sylvester (11) sous la contrainte 12, on utilise la méthode des inverses généralisées, cette méthode est due à [4] : L'équation (11) peut s'écrire, en tenant que de l'expression de P , comme suit :

$$N = P\bar{A} - K\bar{H}_2 \quad (15)$$

où

$$K = L_2 + NE \quad (16)$$

et

$$L_2 = K(I + \bar{H}_2 E) - P\bar{A}E \quad (17)$$

Alors l'équation régissant la dynamique de l'observateur (9) devient :

$$\xi(k+1) = (P\bar{A} - K\bar{H}_2)\xi(k) + L_1 Z_1(k) + L_2 Z_2(k) + Mu(k) \quad (18)$$

où les matrices M , L_1 et L_2 sont obtenus à partir de (13), (14) et (17) respectivement.

Alors le problème de synthèse d'observateurs à entrées inconnues d'ordre plein est réduit à trouver une matrice E qui satisfait (12) et une matrice K telle que la paire $(P\bar{A}, \bar{H}_2)$ est détectable. Ce problème est équivalent au problème standard de synthèse d'observateurs quand toutes les entrées sont connues. D'après (12) on a :

$$E\bar{H}_2 F_2 = -F_2 \quad (19)$$

La solution (19) de cette equation dépend du rang de la matrice $C_2 D_{12}$, (19) existe si

$$\text{rang}(H_2 F_2) = \text{rang}(F_2).$$

La forme générale de cette solution est donnée par la relation suivante :

$$E = -F_2(\bar{H}_2 F_2)^+ + Z(I - \bar{H}_2 F_2(\bar{H}_2 F_2)^+) \quad (20)$$

où Z est une matrice arbitraire qui peut être déterminée par placement de pôle et $(\bar{H}_2 F_2)^+$ est la pseudo-inverse de la matrice $(\bar{H}_2 F_2)$, donnée par

$$(\bar{H}_2 F_2)^+ = ((\bar{H}_2 F_2)^T (\bar{H}_2 F_2)^{-1} (\bar{H}_2 F_2)^T)^T \quad (21)$$

En utilisant (20), la relation (15) aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} N &= \bar{A} - F_2(\bar{H}_2 F_2)^+ \bar{H}_2 \bar{A} \\ &+ Z(I - \bar{H}_2 F_2(\bar{H}_2 F_2)^+) \bar{H}_2 \bar{A} - K\bar{H}_2 \end{aligned} \quad (22)$$

Pour la synthèse d'un observateur (10) stable, les conditions nécessaires et suffisantes sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 1 : Supposons que P de rang maximal, sous l'hypothèse 1, pour le système (1-2), l'observateur (10) existe si et seulement si i) $(P\bar{A}, \bar{H}_2)$ est détectable,

ii) $\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - \bar{A} & F_2 \\ \bar{H}_2 & 0 \end{pmatrix} = n + f \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Re}(\lambda) \geq 0$

Preuve 2 : Définissons deux matrices :

$$S = \begin{pmatrix} P & 0 \\ F_2^+ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ de rang plein colonne}$$

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\lambda F_2^+ - F_2^+ \bar{A}) & I_f \end{pmatrix} \text{ est non singulière,}$$

alors :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - \bar{A} & F_2 \\ \bar{H}_2 & 0 \end{pmatrix} &= \text{rang} S \begin{pmatrix} \lambda I_n - \bar{A} & F_2 \\ \bar{H}_2 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P - P\bar{A} & 0 \\ 0 & I_f \\ \bar{H}_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= f + \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P - P\bar{A} \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'autre part, comme $(P\bar{A}, \bar{H}_2)$ est détectable, alors :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - P\bar{A} \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} = n, \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ telque } \text{Re}(\lambda) \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - P\bar{A} \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} &= \text{rang} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I - P\bar{A} \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P - P\bar{A} \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} = n \end{aligned}$$

d'où le résultat.

IV. OBSERVATEUR DÉCENTRALISÉ

On considère maintenant le système interconnecté dans sa forme décentralisée décrit par les equations (3) et (4). Soit q_{i1} le rang de R_i , il existe alors deux matrices non singulières U_i et V_i telles que :

$$U_i R_i V_i = \begin{pmatrix} I_{q_{i1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

donc le système (3-4) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \bar{A}_{ii}x_i(k) + B_i u(k) + D_i v_i(k) \\ &+ F_{i1}z_{i1}(k) + F_{i2}z_{i2}(k) \end{aligned} \quad (24)$$

$$z_{i1}(k) = H_{i1}x_i(k) + w_1(k), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (25)$$

$$z_{i2}(k) = H_{i2}x_i(k) \quad (26)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} z_{i1} \\ z_{i2} \end{pmatrix} = U_i z_i, \quad \begin{pmatrix} H_{i1} \\ H_{i2} \end{pmatrix} = U_i H_i,$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = V_i^{-1} w, \quad \bar{A}_{ii} = A_{ii} - F_{i1} H_{i1}$$

$$\text{et } F_i V_i = \begin{pmatrix} F_{i1} & F_{i2} \end{pmatrix}.$$

Le but est de synthétiser un observateur asymptotiquement stable de la forme :

$$\begin{aligned} \xi_i(k+1) &= N_i \xi_i(k) + L_{i1} z_{i1}(k) + L_{i2} z_{i2}(k) \\ &+ M_i u(k) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\hat{x}_i(k) = \xi_i(k) - E_i z_{i2}(k) \quad (28)$$

donc le problème de la synthèse d'observateur décentralisé se réduit à trouver les matrices N_i, M_i, L_{i1}, L_{i2} et E_i tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) - \hat{x}_i(k) = 0$. La proposition suivante donne les conditions d'existence et de stabilité d'un tel observateur.

Proposition 2 : Le système (27-28) est un observateur asymptotiquement stable i.e : $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) - \hat{x}_i(k) = 0$ si :

i) N_i est stable.

ii) $P_i \bar{A}_{ii} - N_i P_i - L_{i2} H_{i2} = 0$

iv) $P_i D_i = 0$

iv) $P_i F_{i2} = 0$

iii) $P_i B_i - M_i = 0$

v) $P_i F_{i1} - L_{i1} = 0$, où $P_i = I + E_i H_{i2}$

Preuve 3 : soit $e_i(k) = x_i(k) - \hat{x}_i(k)$ l'erreur d'estimation, alors :

$$e_i(k) = x_i(k) - \xi_i(k) + E_i z_{i2}(k)$$

sa dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} e_i(k+1) &= N_i e_i(k) + (P_i \bar{A}_{ii} - N_i P_i - L_{i2} H_{i2}) x_i(k) \\ &+ (P_i B_i - M_i) u(k) + (P_i F_{i1} - L_{i1}) z_{i1}(k) \\ &+ P_i F_{i2} z_{i2}(k) + P_i D_i v_i(k) \end{aligned} \quad (29)$$

où $P_i = I + E_i H_{i2}$.

$e_i(k) = x_i(k) - \hat{x}_i(k)$ est non biaisée si elle ne depend pas de l'entrée, des interconnexions et des perturbations, donc en utilisant (29) on obtient

$$P_i \bar{A}_{ii} - N_i P_i - L_{i2} H_{i2} = 0 \quad (30)$$

$$P_i D_i = 0 \quad (31)$$

$$P_i F_{i2} = 0 \quad (32)$$

$$P_i B_i - M_i = 0 \quad (33)$$

$$P_i F_{i1} - L_{i1} = 0 \quad (34)$$

Dans ce cas $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0$ si N_i est stable ce qui correspond à la condition i).

La méthode de synthèse d'observateurs à entrées inconnues d'ordre plein qui suit, est due à Darouach et al [4] pour la résolution de l'équation de Sylvester sous contrainte, en utilisant les pseudo-inverse.

L'équation (30) peut s'écrire en tenant que de l'expression de P_i , comme suit :

$$N_i = P_i \bar{A}_{ii} - K_i H_{i2} \quad (35)$$

où

$$K_i = L_{i2} + N_i E_i \quad (36)$$

$$L_{i2} = K_i (I + H_{i2} E_i) - P_i \bar{A}_{ii} E_i \quad (37)$$

Alors l'équation régissant la dynamique de l'observateur (27) devient

$$\begin{aligned} \xi_i(k+1) &= (P_i \bar{A}_{ii} - K_i H_{i2}) \xi_i(k) + L_{i1} z_{i1}(k) \\ &+ L_{i2} z_{i2}(k) + M_i u(k) \end{aligned} \quad (38)$$

où les matrices M_i, L_{i1} et L_{i2} , sont obtenues respectivement à partir de (33), (34) et (37).

D'autre part, en utilisant (31) et (32) on a :

$$P_i \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix} = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$E_i H_{i2} \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix} \quad (39)$$

La solution de (39) existe si et seulement si :

$$\text{rang}(H_{i2} \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix}) = \text{rang} \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix}$$

dans ce cas la solution générale de (39) est donnée par :

$$E_i = - \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix} \Sigma_i^+ + \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i (\Sigma_i^+)^+) \quad (40)$$

où \mathcal{Z}_i est une matrice arbitraire de dimension appropriée et

$$\Sigma_i = H_{i2} \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix}, \Sigma_i^+$$

est une inverse généralisée de Σ_i vérifiant $\Sigma_i \Sigma_i^+ \Sigma_i = \Sigma_i$. Dans ce cas N_i devient :

$$\begin{aligned} N_i &= \bar{A}_{ii} - \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix} (\Sigma_i^+)^+ H_{i2} \bar{A}_{ii} \\ &+ \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i (\Sigma_i^+)^+) H_{i2} \bar{A}_{ii} - K_i H_{i2} \end{aligned} \quad (41)$$

Alors le problème de synthèse de l'observateur décentralisé se réduit à trouver une matrice E_i qui satisfait (40) et une matrice K_i telle que $(P_i \bar{A}_{ii} - K_i H_{i2})$ est stable. Ce problème est équivalent au problème standard de synthèse d'observateurs quand toutes les entrées sont connues. Les valeurs propres de $(P_i \bar{A}_{ii} - K_i H_{i2})$ peuvent être fixées arbitrairement, par un choix convenable de K_i , si et seulement si la paire $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i2})$ est observable. Si $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i2})$ ne l'est pas, alors on peut trouver une matrice K_i de façon à assurer la stabilité asymptotique de l'observateur si et seulement si $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i2})$ est détectable.

Remarque 2 : *i)* Si $(P_i A_{ii}, H_i)$ est observable alors on a un placement arbitraire des pôles par un choix judicieux de K_i . Donc on peut trouver une matrice K_i assurant la stabilité asymptotique de l'observateur si et seulement si $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i2})$ est détectable, dans ce cas, les pôles fixes de l'observateur sont les zéros invariants du système.

ii) Le choix de la matrice K_i est très important dans la synthèse de l'observateur. En effet, l'observabilité de la paire $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i2})$ est donné par le rang de la matrice

$$O_i = \begin{pmatrix} H_{i2} \\ H_{i2} P_i \bar{A}_{ii} \\ \vdots \\ H_{i2} (P_i \bar{A}_{ii})^{n_i-1} \end{pmatrix}$$

est de rang plein si et seulement si P_i est aussi de rang plein.

Les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont données par le théorème suivant :

Théorème 2 : Pour le système (3-4), l'observateur (27-28) existe si et seulement si :

$$i) \text{rang}(H_{i2} \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix}) = \text{rang} \begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix} = d_i,$$

$$ii) \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i2} \end{pmatrix} = n_i \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \geq 1$$

Preuve 4 : la condition *i)* est nécessaire pour l'existence de E_i et par conséquent de l'observateur, cela peut se déduire de l'équation (25). D'autre part, de (40) on peut trouver une matrice K_i telle que (41) est asymptotiquement stable si et seulement si $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i2})$ est détectable ce qui conduit à :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i2} \end{pmatrix} = n_i \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \geq 1$$

ou de manière équivalente, $\forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \geq 1$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} I_{n_i} & \lambda E_i \\ 0 & I_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i2} \end{pmatrix} = n_i$$

Ce qui complète la démonstration.

Le théorème suivant donne La condition *ii)* en fonction des zéros invariants du sous-système *i*.

Théorème 3 : On suppose que $\text{rang}(H_{i2} D_{fi}) = d_i$, D_{fi} étant égale à $\begin{pmatrix} D_i & F_{i2} \end{pmatrix}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $(P_i \bar{A}_{ii} - K_i H_{i2})$ est détectable,

$$ii) \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i2} \end{pmatrix} = n_i \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \geq 1$$

$$iii) \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - \bar{A}_{ii} & D_i & F_{i2} \\ H_i & 0 & 0 \end{pmatrix} = n_i + d_i, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \geq 1.$$

Preuve 5 : *i)* et *ii)* sont équivalentes grâce au Théorème 1. Afin de montrer que *iii)* est équivalente à *ii)*, définissons les deux matrices :

$$S_i = \begin{pmatrix} P_i & 0 \\ D_{fi}^+ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, T_i = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\lambda D_{fi}^+ - D_{fi}^+ \bar{A}_{ii}) & I \end{pmatrix},$$

où S_i de rang plein colonne et T_i une matrice non singulière, alors on a :

$$\begin{aligned} & \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - \bar{A}_{ii} & D_{fi} \\ H_{i2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rang} S_i \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - \bar{A}_{ii} & D_{fi} \\ H_i & 0 \end{pmatrix} T_i \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} & 0 \\ 0 & I \\ H_{i2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= d_i + \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i2} \end{pmatrix} \\ &= n_i + \text{rang}(D_{fi}) \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème

Remarque 3 : Le système donné par (9 – 10) apparaît comme une forme décentralisée du système donné par (27 – 28) tels que :

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & N_N \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & L_{N_1} \end{pmatrix},$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} L_{12} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & L_{N_2} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & E_N \end{pmatrix}.$$

V. EXEMPLE NUMÉRIQUE

Considérons le système interconnecté suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce système est composé de trois sous-système interconnectés tels que :

Le sous-système 1 :

$$\bar{A}_{11} = A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous-système 2 :

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
H_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
F_{21} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le sous-système 3 :

$$\begin{aligned}
A_{33} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A_{32} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
H_{32} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_{32} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
F_{31} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'observateur décentralisé :

Pour le sous-système 1 on a :

$$\begin{aligned}
N_1 &= \begin{pmatrix} -0.0015 & -0.0014 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0.0008 & 0.0014 & -0.0007 \end{pmatrix}, \\
M_1 &= 10^{-15} \begin{pmatrix} 0.4787 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1276 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
L_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
L_{12} &= 10^{-14} \begin{pmatrix} 0.0187 & -0.0145 & -0.1262 \\ 0.0122 & -0.0124 & -0.09103 \\ -0.00033 & 0.0000034 & 0.08873 \end{pmatrix}, \\
E_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour le sous-système 2 on a

$$\begin{aligned}
N_2 &= \begin{pmatrix} -0.0015 & 0 & -0.0015 \\ -0.0015 & -0.0006 & -0.0014 \\ 0.0015 & 0.0001 & 0.0014 \end{pmatrix}, \\
M_2 &= 10^{-15} \begin{pmatrix} 0 & 0.222 & -0.222 & 0 \\ 0 & 0.208 & -0.222 & 0 \\ 0 & -0.326 & 0.666 & 0 \end{pmatrix}, \\
L_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
L_{22} &= 10^{-14} \begin{pmatrix} 0.0444 & 0.133 & -0.0887 \\ 0.0416 & 0.098 & -0.0706 \\ -0.0652 & -0.01044 & 0.0547 \end{pmatrix}, \\
E_2 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour le sous-système 3 on a

$$\begin{aligned}
N_3 &= \begin{pmatrix} -0.0015 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0007 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{pmatrix}, \\
M_3 &= 10^{-15} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0555 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00042 \\ 0 & 0 & 0 & 0.222 \end{pmatrix}, \\
L_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
L_{32} &= 10^{-15} \begin{pmatrix} 0.118 & -0.0405 & 0.110 \\ 0.021 & 0.443 & -0.000514 \\ -0.015 & -0.191 & -0.444 \end{pmatrix}, \\
E_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les figures 1 and 2 donnent les résultats de simulations obtenus avec les sous-systèmes ci-dessus. Il est clair que la méthode présentée permet la convergence de l'estimateur décentralisé aussi bien au système décentralisé qu'au système global.

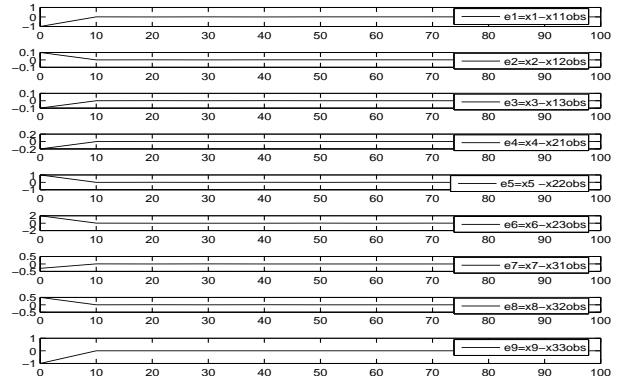


Fig. 1. l'erreur entre le système global et l'observateur décentralisé

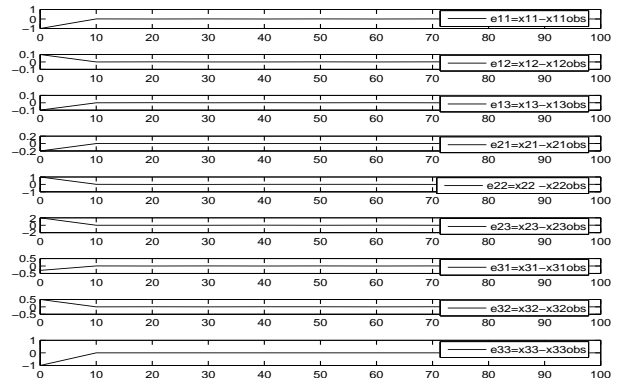


Fig. 2. l'erreur entre le système décentralisé et l'observateur décentralisé

VI. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté la synthèse d'observateur à entrées inconnues pour les systèmes à grandes dimensions, les conditions de convergence et de stabilité sont étudiées, l'estimateur décentralisé obtenu est comparé au système global à l'aide d'un exemple validant les résultats. Une extension de ce travail au observateurs robustes pour les systèmes singuliers à grande dimension est en cours d'étude.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Aldeen and J. F. Marsh, "Decentralised observer-based control scheme for interconnected dynamical systems with unknown inputs", Inst. Electr. Eng. Proc. Control Theory Appl., vol. 146, pp. 349-357, 1999.

- [2] A. Bassong-Onana, "Filtrage Optimal des Systèmes Dynamiques Discrets : Décentralisation et Robustesse Numérique", Thèse de doctorat, université de Nancy 1, 1992.
- [3] K.C Daly, "The computation of Luenberger canonical form using elementary similarity transformations" *Int J.Syst.Sci*, vol 7, 1-15, 1976.
- [4] M. Darouach, M.Zasadzinski, Xu S.J, "Full order observers for linear systems with unknown input" *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol AC 39, pp. 606-609,1994.
- [5] M. Darouach, M. Zasadzinski, A. Bassong Onana, and S. Nowakowski, "Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems". *Int. J.Syst. Sci.*, 26 ,2015-2028, 1995.
- [6] C. Foulard, S. Gentil, J.P. Sandraz, "Commande et régulation par calculateur numérique", Eyrolles, Paris, 1987.
- [7] D. T. Gavel and D. D. Siljak, "Decentralized adaptive control : Structural conditions for stability", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 34,no. 4, pp. 413-426, Apr. 1989.
- [8] Z. Gong, C. Wen, and D. P. Mital, "Decentralized robust controller design for a class of interconnected uncertain systems : With unknown bound of uncertainty", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 41, no. 6, pp.291-298, Jun. 1996.
- [9] Y. P. Guan and M. Saif, "A novel approach to the design of unknown input observers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, pp. 632-635, 1991.
- [10] M. Hodzic and D.D. Siljak, "Estimation and control of large sparse systems". *Automatica*, 21 ,277-292, 1985.
- [11] M. Hou and P. C. Muller, "Design of observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 871-875, 1992.
- [12] N. Hovakimyan, E. Lavretsky, B.-J. Yang, and A. J. Calise, "Coordinated decentralized adaptive output feedback control of interconnected systems",*IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 16, no. 1, pp. 185-194, Jan. 2005.
- [13] P.Kudva , N.Viswanadham, A. Ramakrishna,"Observers for linear systems with unknown inputs",*IEEE Trans. Autom. Control*, Vol AC 25, pp. 113-115,1980.
- [14] P.Hr. Petkov, N.D. Christov and M.M. Konstantinov, "Computational methods for linear control systems". Prentice Hall, New York, 1991.
- [15] D.D. Siljak, M.B. Vukcevic,"On decentralized estimations". *IJC*, 27, 113-131, 1978.
- [16] F. Yang and R. W. Wilde, "Observers for linear systems with unknown inputs." *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, pp. 677-681, 1988.
- [17] T.K. Yeu, N. Matsunaga, S. Kawaji, "Decentralization of interconnected system descriptor systems via estimation of disturbances". *Proceeding of the American Control Conference*, Denver, Colorado June, 4-6, 2003.