

Optimisation non lisse appliquée à la synthèse de lois de commande de vol structurées

Marion GABARROU^{1,2}, Daniel ALAZARD², Dominikus NOLL¹

¹Université de Toulouse - U.P.S.

118 route de Narbonne 31062 Toulouse, France

marion.gabarrou@math.univ-toulouse.fr, dominikus.noll@math.univ-toulouse.fr

²Université de Toulouse - ISAE

10. Av. Edouard Belin 31055 Toulouse, France.

alazard@isae.fr

Résumé— Nous étendons les concepts sous-jacents et fondateurs de la méthode des faisceaux afin d’aborder des problèmes d’optimisation non convexes et non lisses. Ce type de problèmes survient par exemple lors de la conception d’une loi de contrôle par retour de sortie. Cette nouvelle approche est ensuite appliquée à la synthèse de lois de commande de vol longitudinal d’un avion de transport. Cet exemple met en évidence le besoin et l’intérêt de disposer d’un outil d’optimisation de lois de commande structurées tenant compte de diverses contraintes fréquentielles sur des bandes de fréquences limitées.

Mots-clés— optimisation, correcteur structuré, commande de vol, H_∞ .

I. INTRODUCTION

Les architectures classiques de contrôle structurées en plusieurs boucles imbriquées, dites lois de GNC (Guidage, Navigation, Contrôle, [1], [2]) ont prouvé leurs efficacités pour le contrôle des véhicules aérospatiaux. La boucle interne (dite de **contrôle**) vise à contrôler la dynamique rapide de l’engin, c’est-à-dire le comportement haute fréquence, la boucle externe (dite de **guidage**) vise à contrôler le comportement basse fréquence. Un tel savoir faire s’appuie sur le découplage fréquentiel naturel entre la dynamique des degrés de liberté en translation (lente) et la dynamique des degrés de liberté en rotation (rapide) et le fait que le système est sous-actionné. Dans le cas d’un avion la boucle interne est la boucle des **commandes de vol**, la boucle externe est l’**autopilote**. Quand le pilote prend les commandes de vol manuelles (polonnier, mini-manche), l’autopilote est débranché et les consignes de la boucle de commande de vol sont directement les ordres du pilote (voir Figure 1). L’intérêt de cette structure est donc particulièrement intéressante lors de l’implémentation des lois de commande pour gérer la transition entre mode manuel et mode automatique.

Si l’on considère maintenant la boucle interne des commandes de vol, les avionneurs privilégient également des structures de commandes simples qui faciliteront l’implémentation de la loi, entre autres : la gestion des saturations, l’interpolation de la loi selon le point de vol ainsi que toutes les compensations en boucle-ouverte qui viennent se greffer sur la loi de commande nominale [3]. Ces structures combinent des retours proportionnels ou proportionnels intégraux ainsi qu’un filtre passe-bas dit ”de structure” pour filtrer les composantes hautes fréquences du signal de commande afin d’assurer la robustesse de la loi de

commande aux phénomènes dynamiques négligés dans le modèle de synthèse, notamment les modes flexibles de la structure [4].

Le réglage de ces gains et du filtre est évidemment contraint par le compromis incontournable entre les performances basse-fréquence et l’atténuation du signal de commande en haute fréquence. Ce compromis s’exprime facilement dans le domaine fréquentiel par des gabarits sur des fonctions de sensibilité en boucle fermée. Les techniques de synthèses H_∞ permettent de prendre en compte de telles spécifications fréquentielles mais présentent des inconvénients dans le contexte qui nous intéresse :

- Elles fournissent des contrôleurs d’ordre plein non structurés. De récentes recherches ont cherché à surmonter cette limitation, de nouvelles techniques permettant de concevoir des lois de commande avec une structure arbitraire du contrôleur ont émergé comme [5] ou encore [6].
- d’autre part la norme H_∞ n’est pas adaptée au problème des commandes de vol : l’objectif est de satisfaire le gabarit de performance uniquement dans une bande de fréquence correspondant à la dynamique en attitude de l’avion, il ne faut pas chercher à satisfaire ce gabarit en très basse fréquence car ce sera l’objectif de la boucle de guidage qui sera synthétisée ultérieurement. Une première approche dans la synthèse de lois de commande avec la norme H_∞ sur plusieurs bandes de fréquences est [7].

Le problème de la synthèse des lois de commande de vol longitudinal d’un avion est donc un exemple simple qui montre l’intérêt des outils d’optimisation permettant de prendre en compte directement une structure de correcteur donnée et des contraintes fréquentielles dans des bandes de fréquences limitées.

La section suivante présente les principes de l’optimisation non-lisse. Dans la section 3, ce principe est appliqué au problème de synthèse multi-objectif (problème H_∞/H_∞) sur bande fréquentielle . La section 4 présente le modèle longitudinal de l’avion, la structure des commandes de vol, les spécifications et les résultats de l’application de l’optimisation non-lisse.

II. L'OPTIMISATION NON-LISSE ET CONTRAINTE

A. Algorithme non lisse

Le problème est le suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne, possiblement non lisse et non convexe. Le but est de calculer une solution locale \bar{x} au sens où la condition nécessaire d'optimalité de 1^{er} ordre

$$0 \in \partial f(\bar{x}) \quad (2)$$

est satisfaite, $\partial f(x)$ étant le sous-différentiel de Clarke de f en x . Notre algorithme utilise une méthode de faisceaux avec contrôle de proximité ([8]), qui résout le problème (1) dans le sens où pour un point de départ arbitraire, tout point d'accumulation de la séquence d'itérés sérieux est un point critique de f , i.e. satisfait (2). La méthode des faisceaux est un bon outil d'optimisation non lisse mais seulement pour les problèmes convexes. C'est pourquoi on s'intéresse au concept de modèle convexe local $\phi(\cdot, x)$ de f dans un voisinage de l'itéré courant x . Plus précisément on construit $\Phi(y, x)$ qui peut être compris comme un analogue non lisse du développement de Taylor de f en x et qui prend la forme suivante :

$$\Phi(y, x) = \phi(y, x) + \frac{1}{2}(y - x)^T Q(x)(y - x)$$

Le terme $\phi(y, x)$ est le modèle de 1^{er} ordre de f en x convexe mais non nécessairement lisse. A l'opposé le terme du second ordre $\frac{1}{2}(y - x)^T Q(x)(y - x)$ est lisse mais non nécessairement convexe.

Définition 1 : $\phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelé modèle de premier ordre de f sur l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et vérifie les conditions suivantes :

- $\phi(x, x) = f(x)$ et $\partial_1 \phi(x, x) \subset \partial f(x)$
- $\forall x \in \Omega \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n$
 $\|y - x\| \leq \delta \Rightarrow f(y) - \phi(y, x) \leq \epsilon(\|y - x\|)$
- ϕ est semicontinue supérieurement sur $\mathbb{R}^n \times \Omega$, i.e.,
 $(y_j, x_j) \rightarrow (y, x)$ implique $\limsup_{j \rightarrow \infty} \phi(y_j, x_j) \leq \phi(y, x)$

Définition 2 : Soit $\phi(\cdot, x)$ un modèle de 1^{er} ordre de f en x . Pour une matrice $Q(x) = Q(x)^T$ bornée sur les ensembles bornés de x , la fonction $\Phi(y, x) = \phi(y, x) + \frac{1}{2}(y - x)^T Q(x)(y - x)$ est appelée modèle de f en x .

Le lien entre f et son modèle local Φ est utilisé afin de générer un pas de descente pour f à partir de x au moyen d'un mécanisme de contrôle de proximité. Nous n'utilisons pas $\Phi(\cdot, x)$ directement pour générer ce pas de descente car ceci est trop coûteux. Nous construisons d'abord un modèle de travail $\Phi_k(\cdot, x)$ de la forme

$$\Phi_k(y, x) = \phi_k(y, x) + \frac{1}{2}(y - x)^T Q(x)(y - x)$$

qui peut être pensé comme une approximation rudimentaire du modèle idéal $\Phi(\cdot, x)$.

Définition 3 : Nous appelons $\phi_k(\cdot, x)$ un modèle de travail de 1^{er} ordre de f en x , si c'est une fonction convexe satisfaisant $\phi_k(x, x) = \phi(x, x)$, $\partial_1 \phi_k(x, x) \subset \partial_1 \phi(x, x)$ et $\phi_k(\cdot, x) \leq \phi(\cdot, x)$.

$\phi_k(y, x)$ est amélioré de manière itérative en utilisant le trio Exactitude/Plan coupant/Agrégation dans la boucle interne. Le rôle de la boucle interne est de trouver un nouveau pas sérieux. Au compteur k de celle-ci, nous produisons un pas d'essai y^{k+1} en résolvant le programme tangent avec contrôle de proximité

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi_k(y, x) + \frac{\tau_k}{2} \|y - x\|^2, \quad (3)$$

où τ_k est le paramètre de contrôle de proximité. y^{k+1} est une solution locale dans le sens où

$$0 \in \partial_1 \phi_k(y^{k+1}, x) + (Q(x) + \tau_k I)(y^{k+1} - x). \quad (4)$$

Si la solution y^{k+1} de (3) donne une décroissance suffisante de f , il devient le nouvel itéré $x^+ = y^{k+1}$. On dit que y^{k+1} est un pas sérieux. Autrement y^{k+1} est dit pas nul. Dans ce cas on garde x mais on utilise l'information transmise par y^{k+1} pour améliorer la 1^{er} partie du modèle de travail $\phi_k(\cdot, x) \leftarrow \phi_{k+1}(\cdot, x)$. On met aussi à jour le paramètre de contrôle de proximité $\tau_k \leftarrow \tau_{k+1}$ et on relance le programme tangent pour obtenir un meilleur pas d'essai y^{k+2} . Le terme de 2nd ordre est laissé invariant dans la boucle interne. Sa raison d'être est de donner à notre méthode la possibilité de converger superlinéairement si f possède des propriétés de régularité cachées, ce qui est souvent le cas dans les applications. L'idée est qu'après plusieurs mise à jour $k \rightarrow k + 1$, y^{k+1} s'améliore et devient le nouvel itéré courant x^+ . Posons nous la question à présent de la détermination d'un pas sérieux ou nul. Pour ce faire nous introduisons une constante $0 < \gamma < 1$ et calculons le quotient

$$\rho_k = \frac{f(x) - f(y^{k+1})}{f(x) - \Phi_k(y^{k+1}, x)}$$

qui reflète l'adéquation entre f et $\Phi_k(\cdot, x)$ en y^{k+1} . Si le modèle de travail $\Phi_k(\cdot, x)$ est proche de f , nous nous attendons à $\rho_k \approx 1$. Si $\rho_k \geq \gamma$ alors y^{k+1} n'est pas mauvais et nous acceptons le pas d'essai $x^+ = y^{k+1}$. Sinon y^{k+1} est rejeté et $\phi_k(\cdot, x)$ est remplacée par un meilleur modèle $\phi_{k+1}(\cdot, x)$. Mais est-ce suffisant ou doit-on également accroître τ_k ? Pour en décider nous introduisons un second quotient à calculer

$$\tilde{\rho}_k = \frac{f(x) - \Phi(y^{k+1}, x)}{f(x) - \Phi_k(y^{k+1}, x)}$$

qui reflète l'adéquation entre $\Phi(\cdot, x)$ et $\Phi_k(\cdot, x)$ en y^{k+1} . On fixe une constante $\gamma < \tilde{\gamma} < 1$ et on dit que $\Phi_k(\cdot, x)$ est loin de $\Phi(\cdot, x)$ (en y^{k+1}) si $\tilde{\rho}_k < \tilde{\gamma}$. Plaçons nous dans le cas $\rho_k < \gamma$ et $\tilde{\rho}_k > \tilde{\gamma}$, i.e. $\Phi_k(y^{k+1}, x)$ est loin de $f(y^{k+1})$ mais en même temps proche de $\Phi(y^{k+1}, x)$. Construire $\Phi_{k+1}(\cdot, x)$ nous conduira à rapprocher encore plus le modèle de travail du modèle idéal (en y^{k+2}) mais ne suffira pas forcément à faire un progrès satisfaisant pour f . A savoir $\Phi(y^{k+1}, x)$ était trop loin de $f(y^{k+1})$ et ce phénomène est susceptible de persister si $\|y^{k+2} - x\| \approx \|y^{k+1} - x\|$. Pour forcer $\Phi(y^{k+2}, x)$ à être plus proche de $f(y^{k+2})$, nous devons réduire le rayon de la région de confiance, ou de manière duale resserer le contrôle de proximité, i.e. accroître τ_k . La question qui reste à élucider est celle de la construction d'un nouveau modèle de travail ϕ_{k+1} . Premièrement

il faut garantir l'exactitude, à savoir $\phi_{k+1}(x, x) = f(x)$ et $\partial_1 \phi_{k+1}(x, x) \subset \partial f(x)$. Pour ce faire, choisissons un élément $g(x) \in \partial_1 f(x)$, définissons la fonction affine $m(y) = f(x) + g(x)^T(y - x)$ et assurons que $\phi_{k+1}(y, x) \geq m(y) \forall y$. Alors $\partial_1 \phi_{k+1}(x, x) \subset \partial f(x)$ est garanti. Vient ensuite la technique des plans coupants. Cette étape consiste à choisir $g_{k+1} \in \partial_1 \phi(y^{k+1}, x)$ puis par convexité de $\phi(\cdot, x)$

$$g_{k+1}^T(y - y^{k+1}) \leq \phi(y, x) - \phi(y^{k+1}, x).$$

Ce qui se réécrit $m_{k+1}(y) = a_{k+1} + g_{k+1}^T(y - x)$ avec $a_{k+1} = \phi(y^{k+1}, x) + g_{k+1}^T(x - y^{k+1})$. m_{k+1} est une fonction affine support de $\phi(\cdot, x)$ en y^{k+1} . Elle est appelé plan coupant. Cette opération a pour effet d'éliminer y^{k+1} de l'optimisation. La dernière étape est celle de l'agrégation. Elle est utilisée pour recycler certaines informations stockées dans ϕ_k pour le nouveau modèle ϕ_{k+1} . Pour être plus précis, la condition d'optimalité du problème (3) donne (4). En d'autres termes

$$g_{k+1}^* = (Q(x) + \tau_k I)(x - y^{k+1}) \in \partial_1 \phi_k(y^{k+1}, x)$$

Ou encore $m_{k+1}^*(y) = a_{k+1}^* + g_{k+1}^{*T}(y - x)$ avec $a_{k+1}^* = \phi_k(y^{k+1}, x) + g_{k+1}^{*T}(x - y^{k+1})$, est une fonction affine support de $\phi_k(\cdot, x)$ en y^{k+1} . m_{k+1}^* est appelé plan agrégé. L'agrégation est une habile substitution au stockage d'une séquence complète de modèles $\phi_k \leq \phi_{k+1} \rightarrow \phi$ de complexité croissante. Naturellement celle-ci s'avèrerait trop coûteuse. Au total nous avons identifié la liste suivante de conditions que le modèle de travail convexe doit satisfaire

- Exactitude $m(\cdot) \leq \phi_{k+1}(\cdot, x) \leq \phi(\cdot, x)$.
- Plan coupant $m_{k+1}(\cdot) \leq \phi_{k+1}(\cdot, x)$.
- Agrégation $m_{k+1}^*(\cdot) \leq \phi_{k+1}(\cdot, x)$.

Ces conditions sont suffisantes pour assurer la convergence de la méthode. Voici un récapitulatif succinct des étapes successives de l'algorithme :

Paramètres $0 < \gamma < \tilde{\gamma} < \Gamma < 1$, et $0 < q < \infty$

1 : Initialisation de la boucle externe. Choisir un point initial x^1 et une matrice initiale $Q_1 = Q_1^T$ telle que $-qI \preceq Q_1 \preceq qI$. Fixer le paramètre mémoire de contrôle $\tau_1^\#$ telle que $Q_1 + \tau_1^\# I \succ 0$. Poser $j = 1$.

2 : Test d'arrêt. Au compteur de la boucle externe j , stopper si $0 \in \partial f(x^j)$. Sinon aller dans la boucle interne.

3 : Initialisation de la boucle interne. Poser le compteur de la boucle interne $k = 1$ et initialiser le paramètre τ en utilisant l'élément mémoire, i.e., $\tau_1 = \tau_j^\#$. Choisir un modèle de travail convexe initial $\phi_1(\cdot, x^j)$, et poser $\Phi_1(y, x^j) = \phi_1(y, x^j) + \frac{1}{2}(y - x^j)^T Q_j (y - x^j)$.

4 : Génération d'un pas d'essai. Au compteur k de la boucle interne, résoudre le programme tangent

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi_k(y, x^j) + \frac{\tau_k}{2} \|y - x^j\|^2.$$

La solution est le nouveau pas d'essai y^{k+1} .

5 : Test d'acceptation. Vérifier si

$$\rho_k = \frac{f(x^j) - f(y^{k+1})}{f(x^j) - \Phi_k(y^{k+1}, x^j)} \geq \gamma.$$

Si c'est le cas, poser $x^{j+1} = y^{k+1}$ (pas sérieux), quitter la boucle interne et aller à l'étape 8. Si ce n'est pas le cas (pas

nul), continuer dans la boucle interne avec l'étape 6.

6 : Mise à jour du paramètre de proximité. Calcul du second paramètre de contrôle :

$$\tilde{\rho}_k = \frac{f(x^j) - \Phi(y^{k+1}, x^j)}{f(x^j) - \Phi_k(y^{k+1}, x^j)}.$$

Prendre alors

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} \tau_k & \text{si } \tilde{\rho}_k < \tilde{\gamma} \\ 2\tau_k & \text{si } \tilde{\rho}_k \geq \tilde{\gamma}. \end{cases}$$

7 : Mise à jour du modèle de travail. Construire un nouveau modèle de travail convexe $\phi_{k+1}(\cdot, x^j)$ en respectant les trois règles (exactitude, plan coupant, agrégation) basées sur le pas nul y^{k+1} . Ensuite incrémenter le compteur k de la boucle interne et continuer dans la boucle interne avec le pas 4.

8 : Mise à jour de Q_j et de l'élément mémoire. Mise à jour de la matrice $Q_j \rightarrow Q_{j+1}$ en respectant $Q_{j+1} = Q_{j+1}^T$ et $-qI \preceq Q_{j+1} \preceq qI$. Puis stocker un nouvel élément mémoire

$$\tau_{j+1}^\# = \begin{cases} \tau_k & \text{si } \gamma \leq \rho_k < \Gamma \\ \frac{\tau_k}{2} & \text{si } \rho_k \geq \Gamma \end{cases}$$

Augmenter $\tau_{j+1}^\#$ si nécessaire pour assurer $Q_{j+1} + \tau_{j+1}^\# I \succ 0$. Incrémenter le compteur de la boucle externe j de 1 et retourner au pas 2.

B. Optimisation H_∞ par l'algorithme non lisse

B.1 Position du problème

Nous considérons un système P décrit par la représentation en espace d'état suivante :

$$P : \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ z_1 \\ z_2 \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & B \\ C_1 & D_{11} & D_{12} & D_{1u} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & D_{2u} \\ C & D_{y1} & D_{y2} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

où $x_P \in \mathbb{R}^{n_P}$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le contrôle, $y_P \in \mathbb{R}^p$ la sortie, et où $w_1 \in \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow z_1 \in \mathbb{R}^{p_1}, w_2 \in \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow z_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$ sont les canaux de performance H_∞ . Introduisons les notations suivantes :

- $T_{z_i w_i}$ est la fonction de transfert en boucle ouverte du canal $w_i \rightarrow z_i$. Une réalisation de $T_{z_i w_i}$ est obtenue en annulant la colonne w_i et la ligne z_i dans P .
- $\|G\|_{\infty, \Omega} = \sup_{\omega \in \Omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)]$, $\Omega \subset \mathbb{R}_+$

où $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$ est la plus grande valeur singulière de $G(j\omega)$.

Nous cherchons une loi de contrôle en feedback

$K : \begin{bmatrix} x_K \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y_P \end{bmatrix}$ telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Stabilité interne : K stabilise P exponentiellement en boucle fermée.
2. Performance H_∞ sur bande Ω fixée : $T_{z_2 w_2}(K)$ a un niveau de performance pré-spécifié $\|T_{z_2 w_2}(K)\|_{\infty, \Omega} \leq \gamma$.
3. Performance H_∞ sur bande Ω optimale : $\|T_{z_1 w_1}(K)\|_{\infty, \Omega}$ est minimisé parmi les K satisfaisant (1) et (2).
4. K doit obéir à des contraintes structurelles.

Puisque la loi de commande a des contraintes imposées sur sa structure, il convient d'introduire le paramétrage

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) = \begin{bmatrix} A_K(x) & B_K(x) \\ C_K(x) & D_K(x) \end{bmatrix}$$

où x désigne les variables de synthèse. Le problème de synthèse mixte H_∞/H_∞ sur bande Ω se pose sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{minimiser } f(x) &:= \|T_{z_1 w_1}(K(x))\|_{\infty, \Omega}^2 \\ \text{s.c } g(x) &:= \|T_{z_2 w_2}(K(x))\|_{\infty, \Omega}^2 \leq \gamma^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Des travaux antérieurs sur la synthèse mixte H_2/H_∞ utilisant l'optimisation non lisse sont par exemple [9].

B.2 La norme H_∞

f et g sont de la forme $\|\cdot\|_{\infty, \Omega}^2 \circ T_{w \rightarrow z}$. Posons

$$h(x) = \sup_{\omega \in \Omega} \lambda_1[H(x, \omega)] = \sup_{\omega \in \Omega} h(x, \omega)$$

avec $H : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{H}^m$ de classe C^2 en la variable x , continue en la variable (x, ω) et λ_1 la valeur propre maximale de la matrice hermitienne $H(x, \omega)$. Pour obtenir par exemple f à partir de h il suffit de prendre $H(x, \omega) = T_{z_1 w_1}(K(x), j\omega)T_{z_1 w_1}(K(x), j\omega)^H$ et $m = n_{z_1}$. Cette écriture fait clairement apparaître le caractère non lisse du problème d'optimisation. Les fonctions f et g ne sont pas régulières et la source de leur non-régularité est double : la fonction "maximum" de fonctions et la fonction "valeur propre maximale". Notons que cette dernière est non lisse mais convexe. Pour résoudre notre problème d'optimisation nous devons connaître le sous-différentiel de h . Cette tâche est l'objet de cette sous-partie.

Lemme 1 : Soit $K(x)$ stabilisant la boucle fermée. Alors $h(x) = \|T(K(x))\|_{\infty, \Omega}^2 < \infty$ et l'ensemble des fréquences actives défini par $\mathcal{I}(x) = \{\omega \in \Omega / h(x) = h(x, \omega)\}$ est soit fini soit égal à Ω .

Lemme 2 : Supposons que $K(x)$ stabilise la boucle fermée et que $\mathcal{I}(x)$ soit fini. Alors le sous-différentiel de Clarke de h en x est l'ensemble ([10])

$$\begin{aligned} \partial h(x) &= \text{co}\{v \in \mathbb{R}^n : v_i = \left\langle Q(x, \omega) Y_\omega Q(x, \omega)^H, \frac{\partial H(x, \omega)}{\partial x_i} \right\rangle, \\ & i \in \{1, \dots, q\}, Y_\omega \in \mathbb{H}^p, \text{Tr} Y_\omega = 1, Y_\omega \succeq 0, \omega \in \mathcal{I}(x)\} \end{aligned}$$

où $Q(x, \omega)$ est la matrice dont les colonnes forment une base orthonormale de l'espace propre de $H(x, \omega)$ associé à la plus grande valeur propre $\lambda_1(H(x, \omega))$ de multiplicité p .

B.3 Conditions d'optimalité

L'outil que nous allons utiliser afin de résoudre (5) est la fonction de progrès définie comme suit :

$$\begin{aligned} F(y, x) &= \max\{f(y) - f(x) - \mu [g(x) - \gamma^2]_+; \\ & [g(y) - \gamma^2] - [g(x) - \gamma^2]_+\} \end{aligned} \quad (6)$$

où $\mu > 0$ est un paramètre fixé et $g(x)_+ = \max(g(x), 0)$.

Lemme 3 : Supposons $0 \in \partial_1 F(\bar{x}; \bar{x})$ pour un certain $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors nous avons les possibilités suivantes :

1. soit $g(\bar{x}) > \gamma^2$, alors \bar{x} est un point critique de g , appelé point critique de violation de contrainte.
2. soit $g(\bar{x}) \leq \gamma^2$ alors \bar{x} satisfait les conditions nécessaire d'optimalité de F. John pour (5). De plus, il y a deux sous-cas :

- (a) soit \bar{x} est un point de Karush-Kuhn-Tucker de (5)

(b) soit \bar{x} n'est pas un point de Karush-Kuhn-Tucker. Ceci peut arriver seulement quand $g(\bar{x}) = \gamma^2$ et en même temps $0 \in \partial g(\bar{x})$.

B.4 Modèle local de 1^{er} ordre

Dans cette section, nous introduisons un modèle local de F dans un voisinage de l'itéré courant x . Une approximation de h dans un voisinage de x peut s'obtenir en linéarisant l'opérateur $y \mapsto H(y, \omega)$ autour de x .

$$\begin{aligned} \tilde{h}(y; x) &= \max_{\omega \in \Omega} \lambda_1[H(x, \omega) + H'(x, \omega)(y - x)] \\ &= \max_{\omega \in \Omega} \max_{Z \in \mathcal{C}} \langle Z, H(x, \omega) + H'(x, \omega)(y - x) \rangle \end{aligned}$$

où $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^H B)$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $H'(x, \omega)$ est la différentielle de $H(\cdot, \omega)$ en x et où $\mathcal{C} = \{Z \in \mathbb{H}^m : Z \succeq 0, \text{Tr}(Z) = 1\}$. Grâce au développement de Taylor, nous nous attendons à ce que $\tilde{h}(\cdot; x)$ soit une bonne approximation de $h(\cdot)$ au voisinage de x . Notons que $\tilde{h}(x, x) = h(x)$. Nous proposons comme approximation de $F(\cdot, x)$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(y, x) &= \max\{\tilde{f}(y, x) - f(x) - \mu [g(x) - \gamma^2]_+; \\ & [\tilde{g}(y, x) - \gamma^2] - [g(x) - \gamma^2]_+\} \end{aligned} \quad (7)$$

Notons que $\tilde{F}(x, x) = F(x, x)$ et que $\tilde{F}(y, x)$ est proche de $F(y, x)$ pour y proche de x .

Lemme 4 : Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné. Alors $\exists L > 0$ telle que $\forall x, y \in B$

$$|F(y; x) - \tilde{F}(y; x)| \leq L \|y - x\|^2.$$

Il est commode de représenter le modèle local différemment. Soient $H_1(x, \omega) = T_{z_1 w_1}(K(x), j\omega)T_{z_1 w_1}(K(x), j\omega)^H$ et $H_2(x, \omega) = T_{z_2 w_2}(K(x), j\omega)T_{z_2 w_2}(K(x), j\omega)^H$. Posons

$$\begin{aligned} \alpha_1(\omega, Z) &= \langle Z, H_1(x, \omega) \rangle - f(x) - \mu [g(x) - \gamma^2]_+ \in \mathbb{R} \\ \phi_1(\omega, Z) &= H_1'(x, \omega)^* Z \in \mathbb{R}^{n_{z_1}} \\ \alpha_2(\omega, Z) &= \langle Z, H_2(x, \omega) \rangle - \gamma^2 - [g(x) - \gamma^2]_+ \in \mathbb{R} \\ \phi_2(\omega, Z) &= H_2'(x, \omega)^* Z \in \mathbb{R}^{n_{z_2}} \end{aligned}$$

De cette manière les deux fonctions dont $\tilde{F}(y; x)$ est le maximum peuvent se réécrire comme des enveloppes de plans coupants

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y, x) - f(x) - \mu [g(x) - \gamma^2]_+ &= \\ & \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{Z \in \mathcal{C}} \alpha_1(\omega, Z) + \phi_1(\omega, Z)^T (y - x), \\ [\tilde{g}(y; x) - \gamma^2] - [g(x) - \gamma^2]_+ &= \\ & \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{Z \in \mathcal{C}} \alpha_2(\omega, Z) + \phi_2(\omega, Z)^T (y - x). \end{aligned}$$

Nous pouvons introduire

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \text{co}\{(\alpha_1(\omega, Z), \phi_1(\omega, Z)) : \omega \in \Omega, Z \in \mathcal{C}\} \\ & \cup \{(\alpha_2(\omega, Z), \phi_2(\omega, Z)) : \omega \in \Omega, Z \in \mathcal{C}\}. \end{aligned}$$

Alors le modèle local peut se réécrire

$$\tilde{F}(y, x) = \max\{\alpha + \phi^T (y - x) : (\alpha, \phi) \in \mathcal{G}\}. \quad (8)$$

L'avantage de (8) par rapport à (7) est que le stockage des éléments (α, ϕ) de \mathcal{G} est plus commode que le stockage des éléments (ω, Z) de $\Omega \times \mathcal{C}$. Egalement, comme nous allons le voir, cela va nous faciliter la construction des approximations \mathcal{G}_k de \mathcal{G} . Cette question est traitée dans la prochaine sous-section.

B.5 Modèle local de 2nd ordre et programme tangent

Soit x l'itéré courant de l'algorithme non lisse. Dans le but de générer des pas d'essai à partir de x , nous allons générer de manière récursive des approximations $\tilde{F}_k(y; x)$ de $\tilde{F}(y; x)$ dénomées modèles de travail. Utilisant (8), celles-ci seront de la forme

$$\tilde{F}_k(y; x) = \max \{ \alpha + \phi^T(y - x) : (\alpha, \phi) \in \mathcal{G}_k \},$$

où $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}$. En particulier, $\tilde{F}_k(y; x) \leq \tilde{F}(y; x)$, et $\tilde{F}_k(x; x) = \tilde{F}(x; x) = F(x; x) = 0$ au point $y = x$. De plus notre construction assure que $\partial_1 \tilde{F}_k(x; x) \subset \partial F(x; x)$ pour tout k et que \tilde{F}_k se rapproche de \tilde{F} lorsque k augmente. En tandem avec le contrôle de proximité, nous avons l'assurance que \tilde{F}_k se rapproche de F . Une fois \mathcal{G}_k formé, un nouveau pas d'essai y^{k+1} est calculé avec le programme tangent

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \tilde{F}_k(y; x) + \frac{\tau_k}{2} \|y - x\|^2$$

III. APPLICATION AUX COMMANDES DE VOL LONGITUDINAL

A. Le modèle longitudinal

Le mouvement dans le plan vertical d'un avion type Concorde, linéarisé autour d'un point de vol donné (Mach= 0.7, Altitude= 5000 *piesds*), est décrit par le modèle d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ u \end{bmatrix} \quad (9)$$

avec :

- $x_P = [V, \gamma, \alpha, q, H]^T$,
- $u = [\delta_x, \delta_m]^T$,
- $y_P = [V, \gamma, N_z, q, H]^T$.

Soit :

- 5 états : V (vitesse aérodynamique en m/s), γ (pente en rd), α (incidence en rd), $q = \dot{\theta} = \dot{\alpha} + \dot{\gamma}$ (vitesse de tangage en rd/s), H (altitude en m).
- 2 commandes : δ_x (manette de gaz en % de la poussée maximale) et δ_m (gouverne de profondeur en rd),
- 5 mesures : l'état sauf l'incidence α qui est remplacée par la mesure du facteur de charge verticale N_z (accélération verticale).

La dynamique du vol longitudinal est caractérisée par les 5 valeurs propres :

- $\lambda_{1,2} = -0.56 \pm 1.61j$ (soit une pulsation de 1.7 rd/s et un amortissement de 0.33) correspond au mode d'oscillation d'incidence qui affecte principalement les variables d'état α et V ,
- $\lambda_{3,4} = -0.0039i \pm 0.064j$ (soit une pulsation de 0.064 rd/s et un amortissement de 0.06) correspond au mode phugoïde qui affecte principalement les variables d'état γ et V ,
- $\lambda_5 = -0.0026$ correspond au mode de rappel de propulsion et affecte principalement l'altitude H .

B. La structure de commande

L'architecture de boucles imbriquées mentionnée dans l'introduction appliquée au vol longitudinal est représentée sur la Figure 1 dans laquelle on a également fait apparaître :

- la sous structure du guidage en 2 parties : le guidage en altitude et le pilote automatique (c'est-à-dire les asservissements de pente et de vitesse),
- le commutateur à l'entrée de la boucle de contrôle, dite boucle de commande de vol, qui permet de prendre en compte la consigne en facteur de charge verticale N_{z_c} du mini-manche actif lorsque le pilote passe en mode manuel. En effet dans le cas de l'avion en vol longitudinal, l'entrée de la boucle de contrôle n'est pas une consigne d'incidence, mais une consigne d'accélération verticale.

Enfin une loi de commande de vol communément utilisée s'écrit (s désigne la variable de LAPLACE) :

$$\delta_m(s) = F(s) \left(\left(K_p + \frac{K_i}{s + \varepsilon} \right) (N_{z_c} - N_z) - K_v q \right) \quad (10)$$

et fait intervenir :

- un retour proportionnel à la vitesse de tangage q au travers du gain K_v afin d'amortir le mode d'oscillation d'incidence,
- un retour proportionnel intégral afin d'asservir le facteur de charge vertical N_z ($K_p + \frac{K_i}{s + \varepsilon}$: il s'agit en fait d'un pseudo intégrateur),
- un filtre de structure $F(s)$.

L'intérêt pour l'avionneur d'une telle structure de commande de vol réside dans le fait que les principaux paramètres de réglage K_p et K_v ont une signification physique. Par exemple la valeur de K_v peut être comparée au coefficient aérodynamique C_{m_q} de l'avion.

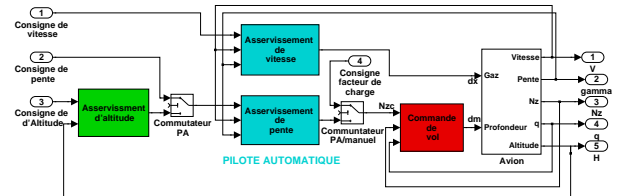


Fig. 1. Structure de contrôle du vol longitudinal : Les boucles de commande de vol et du pilote automatique.

C. Les spécifications et le réglage initial

Si l'on ne considère pas le filtre $F(s)$, il est facile de trouver un réglage des gains K_p , K_v , K_i permettant d'amortir correctement le mode d'oscillation d'incidence et d'obtenir des performances satisfaisantes. La performance d'asservissement peut s'exprimer par un gabarit $W_1(s)$ sur la fonction de sensibilité T_1 en boucle fermée entre la consigne N_{z_c} et l'erreur d'asservissement d_{N_z} , c'est-à-dire le transfert entre la première entrée et la première sortie du système $P(s)$ représenté sur la figure 2, soit

$$T_1(s) = T_{N_z N_{z_c}}(s).$$

Si l'on considère le gabarit $W_1(s) = \frac{s^2 + 4s}{s^2 + 4s + 7}$, alors le

Réglage # 1 : $K_p = -0.1$, $K_v = -1$, $K_i = -0.15$, $F(s) = 1$,

permet de satisfaire ce gabarit comme le montre la figure 3. Les réponses à un échelon de N_{zc} (figure 5) confirment que les performances de l'asservissement sont satisfaisantes.

Si maintenant on veut atténuer le signal de commande $\delta_m(s)$ en haute fréquence (roll-off) on peut chercher à imposer que le transfert T_2 entre le bruit de mesure n_q sur la mesure de vitesse tangage q (entrée 2 de $P(s)$) et le bruit sur la mesure de facteur de charge N_z (bruit qui agit comme la consigne N_{zc} , entrée 1 de $P(s)$) vers δ_m (sortie 2 de $P(s)$) satisfasse un gabarit passe-bas $W_2(s)$. Soit :

$$T_2(s) = T_{\delta_m[N_{zc}, n_q]}(s).$$

Considérons le gabarit :

$$W_2(s) = \frac{25}{s^2 + \sqrt{2}5s + 25}$$

qui vise à imposer un "roll-off" d'ordre 2 à partir de 5 rd/s et qui est représenté sur la figure 4. On peut être tenté de choisir comme réglage $F(s) = W_2(s)$, soit :

Réglage # 2 : $K_p = -0.1$, $K_v = -1$, $K_i = -0.15$, $F(s) = W_2(s)$.

On peut vérifier que ce réglage est loin de satisfaire le gabarit (figure 4) : en effet, la fréquence de coupure du filtre W_2 (5 rd/s) est proche de la bande passante de l'asservissement de N_z (de l'ordre de 2 rd/s). Il en résulte un compromis délicat à régler qui se traduit pour notre étude par la présence en boucle de fermée d'un mode mal amorti comme en témoigne la résonance autour de 5 rd/s sur la réponse fréquentielle de T_2 (figure 4) ou les oscillations sur les réponses temporelles (figure 5).

On peut alors essayer de régler K_p , K_v , K_i et $F(s)$ par une approche de type essai-erreur pour satisfaire les deux gabarits sur $T_1(s)$ et $T_2(s)$, mais une telle démarche devient très vite laborieuse.

On notera également sur les figures 3 et 4 qu'il ne faut pas chercher à satisfaire les gabarits pour des pulsations inférieures à 0.1 rd/s , c'est-à-dire que le non-respect de ces gabarits en très basse fréquence ne gêne en rien les performances de la boucle de commande de vol.

Enfin si l'on considère que l'on peut paramétrer le filtre du second ordre $F(s)$ sous la forme :

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + bs + a},$$

le problème de commande consiste à trouver le vecteur paramétrique x de la loi de commande structurée :

$$x = [K_p, K_i, K_v, a, b]^T$$

qui stabilise la boucle fermée et tel que :

$$\|W_1^+ T_1\|_{\infty, [0.1; +\infty]} \leq 1, \quad (11)$$

$$\|W_2^+ T_2\|_{\infty, [0.1; +\infty]} \leq 1, \quad (12)$$

où $W_1^+(s)$ et $W_2^+(s)$ sont les inverses respectifs des filtres $W_1(s)$, $W_2(s)$ régularisés pour être réalisables et stables. Par exemple :

$$W_1^+(s) = \frac{s^2 + 4s + 7}{s^2 + 4s + 0.001}$$

$$W_2^+(s) = \frac{s^2 + \sqrt{2}5s + 25}{25 \left((s/500)^2 + \sqrt{2}(s/500) + 1 \right)}.$$

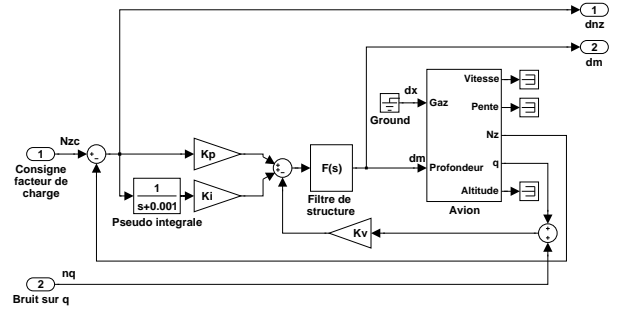


Fig. 2. Schéma fonctionnel du système en boucle fermée sur les commandes de vol : $P(s)$.

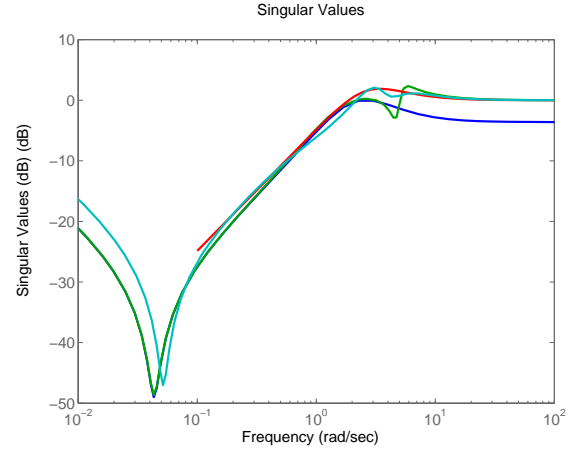


Fig. 3. Réponses fréquentielles en performance : le gabarit $W_1(s)$ (rouge) et $T_1(s)$ dans le cas du réglage # 1 (bleu), réglage # 2 (vert) et réglage optimisé (cyan).

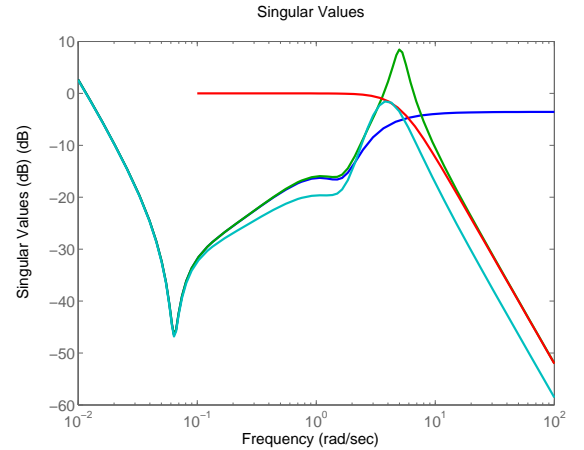


Fig. 4. Réponses fréquentielles en atténuation : le gabarit $W_2(s)$ (rouge) et $T_2(s)$ dans le cas du réglage # 1 (bleu), réglage # 2 (vert) et réglage optimisé (cyan).

D. Les résultats obtenus

Notre algorithme a été appliqué à ce problème. Après optimisation, nous obtenons le vecteur paramétrique suivant :

$$x = [-0.077603; -0.086731; -0.44784; 6.3451; 25.908]^T.$$

Les deux critères obtenus sont :

$$\|W_1^+ P_1\|_{\infty, [0.1; +\infty]} = 1.02, \quad \|W_2^+ P_2\|_{\infty, [0.1; +\infty]} = 0.9.$$

On constate que la contrainte (12) est largement satisfaite et que la contrainte (11) est quasiment saturée. On peut

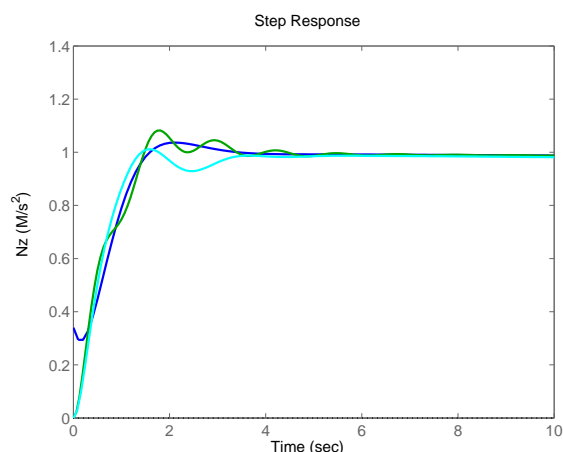


Fig. 5. Réponses à un échelon de N_{zc} dans le cas du réglage # 1 (bleu), réglage # 2 (vert) et réglage optimisé (cyan).

par ailleurs montrer (pour $\omega \rightarrow \infty$) que cette contrainte ne peut pas descendre en dessous de 1.

IV. CONCLUSION

Une méthode d'optimisation non-lisse a été développée et appliquée à la synthèse de lois de commande de vol longitudinal d'un avion de transport. Cette technique permet de prendre en compte plusieurs contraintes fréquentielles sur des bandes de fréquences limitées et une structure a priori de la loi de commande. Les résultats obtenus sont encourageants. La suite des travaux devrait s'organiser de la façon suivante :

- sur l'application considérée (commande de vol longitudinal), la synthèse simultanée des boucles de commande de vol et du pilote automatique sera étudiée afin de conforter la méthode,
- la possibilité de prendre en compte des contraintes temporelles à l'aide des techniques d'optimisation non lisse sera également développée et appliquée au problème de commande de vol latéral d'un avion rigide pour lequel les contraintes temporelles de découplage roulis-lacet sont particulièrement dimensionnantes,
- on évaluera également la méthode sur des modèles d'avion tenant compte des modes flexibles et de spécifications de réduction de charges sur la structure de l'avion,
- enfin on confrontera, en ce qui concerne le traitement du problème de synthèse mixte H_∞ sur bandes fréquentielles, notre algorithme innovant d'optimisation non lisse aux outils déjà présents dans les boîtes à outils matlab.

RÉFÉRENCES

- [1] Mark B. Tischler. *Advances in Aircraft Flight Control*. Taylor & Francis, 1996.
- [2] B. L. Stevens and F. L. Lewis. *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [3] L. Ronceray, P. Mouyon, S. Tebbani, G. Puyou, and D. Alazard. Adaptive retuning of feedforward controller - application to the airbrake compensation of an aircraft. In *Proceedings of the European Control Conference ECC'09*, Budapest (Hungary), August 2009.
- [4] D. Alazard. Robust \mathcal{H}_∞ design for lateral flight control of a highly flexible aircraft. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 6 :502–509, 2002.

- [5] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth h_∞ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51 No. 1 :71–86, 2006.
- [6] J.V. Burke, D. Henrion, A.S. Lewis, and M.L. Overton. A matlab package for fixed-order controller design and h_∞ -optimization robust control design.
- [7] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design. *Automatica*, 43 No. 4 :724–731, 2007.
- [8] D. Noll, O. Prot, and A. Rondepierre. A proximity control algorithm to minimize nonsmooth and nonconvex functions. *Pacific Journal of Optimization*, 4, No. 3 :569–602, 2008.
- [9] P. Apkarian, D. Noll, and A. Rondepierre. Mixed h_2/h_∞ control via nonsmooth optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47 No. 3 :1516–1546, 2008.
- [10] M.L. Overton. Large-scale optimization of eigenvalues. *SIAM Journal on Optimization*, 2 No. 1 :88–120, 1992.