

Approche des sous-espaces pour l'identification de modèles non entiers multivariables

Magalie THOMASSIN et Rachid MALTI

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système
UMR 5218 – Université de Bordeaux, CNRS
351 cours de la libération, 33405 Talence Cedex, France.
magalie.thomassin@ims-bordeaux.fr

Résumé— Cet article porte sur l'identification de système multivariable par une représentation d'état non entière. La difficulté réside dans le fait que le modèle est à temps continu. L'utilisation de deux filtres (de types passe-bas et passe-tout non entiers) est proposée afin de contourner le problème de l'estimation des dérivées non entières des signaux entrée-sortie. Le problème se rapporte alors à celui rencontré classiquement dans un contexte à temps discret. L'estimation des matrices de la représentation d'état est effectuée par une méthode des sous-espaces considérant comme variable instrumentale les signaux entrée-sortie filtrés temporellement décalés. L'estimation de l'ordre commensurable de la représentation d'état non entière est réalisée par une méthode d'optimisation non linéaire. Les propriétés statistiques des estimateurs proposés sont illustrées par des exemples de simulation.

Mots-clés— Représentation d'état non entière, identification à temps continu, méthode des sous-espaces, filtre passe-bas, filtre passe-tout, déphaseur.

I. INTRODUCTION

Les modèles fractionnaires ont reçu un intérêt sans cesse croissant ces dernières années. Ils permettent notamment d'obtenir une bonne représentation du comportement des phénomènes de diffusion avec peu de paramètres. En électrochimie par exemple, la diffusion des charges dans les batteries à acide est gouvernée par les modèles de Randles [1] qui font appel à l'impédance de Warburg avec un intégrateur d'ordre 0.5. Il a été établi que la diffusion électrochimique a une relation étroite avec des dérivées d'ordre 0.5 [2]. En diffusion thermique d'un médium semi-infini et homogène, Battaglia *et al.* [3] ont montré que la solution de l'équation de chaleur relie le flux thermique à la dérivée d'ordre 0.5 de la température de surface sur laquelle le flux est appliqué.

L'utilisation des modèles fractionnaires pour l'identification de systèmes dans le domaine temporel a été initiée à la fin des années 1990. Oustaloup [4] a développé une méthode basée sur la discrétisation de l'équation différentielle fractionnaire, en utilisant la définition de Grünwald, et sur l'estimation de ses coefficients par les moindres carrés. Trigeassou *et al.* [5] basent leur méthode d'identification sur l'approximation d'un intégrateur fractionnaire par un modèle rationnel, puis ils en déduisent le modèle fractionnaire après avoir estimé son approximation rationnelle. Cois *et al.* [6] ont proposé plusieurs extensions aux méthodes à erreur d'équation, telles que les SVF (*state variables filters*) et la variable instrumentale, à l'identification des systèmes fractionnaires. Aoun *et al.* [7] ont synthétisé des bases orthogonales fractionnaires permettant de généraliser plusieurs bases (Laguerre, Kautz,...) pour la dérivation d'ordres frac-

tionnaires dans un but d'identification. Plus récemment, Malti *et al.* [8] ont étendu le concept des méthodes IV optimales aux cas des systèmes fractionnaires. Le lecteur peut se reporter à [9] pour évaluer l'ensemble de ces méthodes existantes.

Ce papier aborde le problème de l'identification d'un système fractionnaire à temps-continu sous sa forme d'état. Peu de papiers ont déjà traité de cette problématique [6], [10]. Les travaux existants sont fondés sur la minimisation d'un critère basé sur l'erreur de sortie en utilisant des techniques de programmation non-linéaires. Ces méthodes sont bien adaptées au cas des systèmes SISO (*single-input single-output*) et sont généralement difficiles à appliquer dans le cas MIMO (*multi-input multi-output*) à cause du nombre important de paramètres à estimer. Ici nous proposons des méthodes de sous-espaces pour l'estimation des matrices de la représentation d'état à temps-continu d'un système fractionnaire. Ce travail est donc une extension au cas fractionnaire des méthodes utilisées pour les systèmes rationnels (*i.e.* non fractionnaires) [11], [12], [13]. D'autres techniques de sous-espaces pour l'identification de modèles à temps-continu peuvent être trouvées dans [14], [15], [16], [17]. La méthode proposée hérite donc des avantages des méthodes de sous-espaces qui découlent directement de la fiabilité des algorithmiques numériques fondés sur la décomposition QR et la décomposition en valeurs singulières [18], mais reste une méthode sous-optimale. En outre, aucune forme canonique, telle que les réalisations modale ou compagne, de la représentation d'état n'est requise. Enfin, les algorithmes en sous-espaces proposés peuvent être appliqués à l'identification des systèmes SISO ou MIMO. Cependant, la représentation d'état d'un système fractionnaire fait intervenir un paramètre supplémentaire : l'ordre commensurable. Il est le seul paramètre estimé par une technique d'optimisation non-linéaire (en minimisant un critère d'erreur de sortie).

II. SYSTÈMES À DÉRIVÉES NON ENTIÈRES

Un système non entier monovarié est décrit par l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$y(t) + a_1 \mathcal{D}^{\alpha_1} y(t) + \dots + a_{m_A} \mathcal{D}^{\alpha_{m_A}} y(t) = b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t) + b_1 \mathcal{D}^{\beta_1} u(t) + \dots + b_{m_B} \mathcal{D}^{\beta_{m_B}} u(t)$$

où $(a_j, b_i) \in \mathbb{R}^2$, et les ordres de dérivation $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{m_A}, \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{m_B}$ sont des nombres positifs non nécessairement entiers. La représentation d'état

a été étendue par [19] au cas des système fractionnaires commensurables, où tous les ordres de dérivation sont des multiples entiers de α . Cette extension a été réalisée en permettant à l'ordre de dérivation du vecteur d'état d'être l'ordre commensurable $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. La représentation d'état fractionnaire se présente dans le cas MIMO sous la forme :

$$\mathcal{D}^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont des matrices constantes. Nous supposons ici que les conditions initiales sont nulles : $\mathbf{x}(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Matignon [20] a montré que le système fractionnaire (1)-(2) est stable si :

$$0 < \alpha < 2 \quad \text{et} \quad |\arg(\lambda_k)| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

où λ_k est la $k^{\text{ème}}$ valeur propre de A et $-\pi < \arg(\lambda_k) \leq \pi$. La détermination de la fonction de transfert MIMO $G(s)$ du système (1)-(2) se fait de la même façon que pour les systèmes rationnels : $G(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D$ où s est la variable de Laplace.

Dans la suite, nous supposons que la paire (A, B) est atteignable et que la paire (C, A) est observable. Les conditions de commandabilité et d'observabilité d'une représentation d'état d'un système fractionnaire commensurable sont les mêmes que celles des systèmes rationnels [19].

L'une des principales difficultés des modèles fractionnaires est la simulation dans le domaine temporel. Ce problème a été largement étudié ; un panorama des principales méthodes est présenté dans [21]. L'approximation la plus utilisée des opérateurs fractionnaires est la distribution récursive des pôles et des zéros proposée dans [22]. Elle consiste à approcher le comportement fréquentiel de s^α dans la bande de fréquences $[\omega_A, \omega_B]$. Cependant, cette approximation aboutit à un comportement asymptotiquement nul aux basses et hautes fréquences, ce qui peut introduire une erreur statique entre le modèle fractionnaire et son approximation. Pour éviter ce problème, Trigeassou *et al.* [5] ont proposé d'utiliser l'intégrateur classique en dehors la zone fréquentielle $[\omega_A, \omega_B]$:

$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-\alpha} = \frac{G_\alpha}{s} \prod_{k=1}^{N_c} \frac{1 + s/\omega'_k}{1 + s/\omega_k} \quad (3)$$

où

- N_c est le nombre de cellules (directement lié à la qualité de l'approximation) ;
- G_α est choisi de façon à ce que $s^{-\alpha}$ ait le même gain que $s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-\alpha}$ au milieu de l'intervalle $[\omega_A, \omega_B]$;
- ω'_k et ω_k sont respectivement les zéros et les pôles récursivement distribués dans la bande fréquentielle $[\omega_b, \omega_h] = [\sigma^{-1}\omega_A, \sigma\omega_B]$ où σ est généralement fixé à 10 pour minimiser les effets de bord. Ils sont définis par les relations suivantes :

$$\omega'_k = \gamma\omega_k, \quad \omega_{k+1} = \eta\omega'_k, \quad \alpha = 1 - \frac{\log \gamma}{\log \gamma\eta}.$$

Cette approximation est utilisée pour simuler les systèmes fractionnaires présentés dans cette communication avec les paramètres : $N_c = 20$, $\omega_A = 10^{-5}$ et $\omega_B = 10^5$.

III. POSITIONNEMENT DU PROBLÈME D'IDENTIFICATION

Soit un système non entier représenté par la représentation d'état non entière suivante :

$$\mathcal{D}^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (5)$$

où $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$ sont les bruits d'état et de mesure supposés de moyenne nulle. Sous certaines conditions peu sévères sur \mathbf{v} et \mathbf{w} (spectre uniforme, non-correlation), la représentation d'état (4)-(5) peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{D}^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + K\mathbf{e}(t), \quad (6)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t). \quad (7)$$

Le problème est d'estimer l'ordre commensurable α et les matrices A , B , C et D à partir des données entrée-sortie échantillonnées¹ $\{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^{N-1}$ et $\{\mathbf{y}_k\}_{k=0}^{N-1}$. Dans un premier temps, l'ordre commensurable α est supposé connu. L'estimation de α est abordée à partir du §VII.

Afin de démontrer la difficulté de l'identification à temps continu d'une représentation d'état non entière, nous nous plaçons dans le cas déterministe où $\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$. En prenant les dérivées successives d'ordre α de (7), on obtient par substitution la relation suivante :

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \Gamma_i^* \mathbf{x}(t) + \Phi_i^* \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (8)$$

appelée *équation d'entrée-sortie*, où :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(t) &= [\mathbf{u}(t)^T \quad \mathcal{D}^\alpha \mathbf{u}(t)^T \quad \dots \quad \mathcal{D}^{i\alpha} \mathbf{u}(t)^T]^T \\ \bar{\mathbf{y}}(t) &= [\mathbf{y}(t)^T \quad \mathcal{D}^\alpha \mathbf{y}(t)^T \quad \dots \quad \mathcal{D}^{i\alpha} \mathbf{y}(t)^T]^T \\ \Gamma_i^* &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_i^* = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{i-2}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\Gamma_i^* \in \mathbb{R}^{ip \times n}$ et $\Phi_i^* \in \mathbb{R}^{ip \times im}$ et $i \geq n + 1$. La structure de cette équation est identique à celle du cas classique à temps discret [18]. On pourrait donc appliquer à cette relation les méthodes classiques des sous-espaces développées dans le contexte à temps discret pour estimer les matrices de la représentation d'état. Malheureusement, (8) contient les dérivées successives d'ordre α des données entrée-sortie. Ces dérivées ne sont pas mesurées en pratique et sont particulièrement difficiles à estimer en présence de perturbation sur les données [23]. Pour contourner cette difficulté, deux opérateurs, correspondant à des filtres non entiers, peuvent être utilisés. Le premier est un filtre passe-bas non entier dont les performances ont déjà été présentées dans [24]. Le second filtre, de type passe-tout (ou déphaseur), a été proposé par [11] dans un contexte à temps continu pour un système à dérivations entières.

IV. ÉQUATION D'ENTRÉE-SORTIE D'UNE REPRÉSENTATION D'ÉTAT NON ENTIÈRE

Ce paragraphe présente l'intérêt d'utiliser des filtres passe-bas ou passe-tout non entiers pour estimer les matrices d'une représentation d'état non entière.

1. Les variables à temps discret sont notées x_k et correspondent à l'échantillonnage temporel avec une période constante T_e de la variable à temps continu $x(t) : x_k = x(kT_e)$.

Soit la transformée de Laplace de la représentation d'état (4)-(5) :

$$s^\alpha X(s) = AX(s) + BU(s) + KE(s) \quad (9)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) + E(s), \quad (10)$$

où $U(s)$, $Y(s)$, $X(s)$ et $E(s)$ sont les transformées de Laplace de $u(t)$, $y(t)$, $x(t)$ et $e(t)$, respectivement.

A. Utilisation d'un filtre passe-bas non entier

Soit le filtre suivant (de type passe-bas) :

$$\Lambda(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_f}\right)^\alpha} = \frac{1}{1 + \tau s^\alpha} \text{ avec } \tau = (1/\omega_f)^\alpha. \quad (11)$$

On a alors $s^\alpha = \tau(1 - \Lambda(s))/\Lambda(s)$ et on montre sans difficulté que l'équation d'état (9) devient :

$$X(s) = A_\lambda[\Lambda(s)X(s)] + B_\lambda[\Lambda(s)U(s)] + K_\lambda[\Lambda(s)E(s)]$$

avec $A_\lambda = I + \tau A$, $B_\lambda = \tau B$ et $K_\lambda = \tau K$. L'application de la transformée de Laplace inverse conduit à :

$$\mathbf{x}(t) = A_\lambda[\lambda \mathbf{x}(t)] + B_\lambda[\lambda \mathbf{u}(t)] + K_\lambda[\lambda \mathbf{e}(t)] \quad (12)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (13)$$

où $\lambda \mathbf{x}(t)$, $\lambda \mathbf{u}(t)$ et $\lambda \mathbf{e}(t)$ correspondent aux états, entrées et bruits filtrés par Λ (11). En calculant les dérivées successives d'ordre α de (13), on trouve par substitution l'équation d'entrée-sortie (sans dérivée temporelle) :

$$\mathcal{Y}_\lambda(t) = \Gamma_{i,\lambda} \mathcal{X}_\lambda(t) + \Phi_{i,\lambda} \mathcal{U}(t) + \Psi_{i,\lambda} \mathcal{E}_\lambda(t) \quad (14)$$

avec les variables d'état, d'entrée-sortie et de bruit suivantes : $\mathcal{X}_\lambda(t) = \lambda^{i-1} \mathbf{x}(t)$,

$$\mathcal{Y}_\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda^{i-1} \mathbf{y}(t) \\ \lambda^{i-2} \mathbf{y}(t) \\ \vdots \\ \lambda^1 \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}, \mathcal{U}_\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda^{i-1} \mathbf{u}(t) \\ \lambda^{i-2} \mathbf{u}(t) \\ \vdots \\ \lambda^1 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \mathcal{E}_\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda^{i-1} \mathbf{e}(t) \\ \lambda^{i-2} \mathbf{e}(t) \\ \vdots \\ \lambda^1 \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$$

où $\lambda^j \mathbf{s}(t)$ pour $j = 1, \dots, i-1$ correspond au signal $\mathbf{s}(t)$ filtré par une série de j filtres Λ en cascade, et :

$$\Gamma_{i,\lambda} = \begin{bmatrix} C \\ CA_\lambda \\ \vdots \\ CA_\lambda^{i-1} \end{bmatrix}, \Phi_{i,\lambda} = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB_\lambda & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA_\lambda^{i-2} B_\lambda & \cdots & CB_\lambda & D \end{bmatrix},$$

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ CK_\lambda & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA_\lambda^{i-2} K_\lambda & \cdots & CK_\lambda & I \end{bmatrix}$$

où $\Gamma_{i,\lambda} \in \mathbb{R}^{ip \times n}$ est la matrice d'observabilité étendue et $\Phi_{i,\lambda} \in \mathbb{R}^{ip \times im}$, $\Psi_{i,\lambda} \in \mathbb{R}^{ip \times im}$ sont des matrices de Toeplitz par blocs. L'obtention de l'équation (14) est détaillée dans [25]. À partir des N échantillons d'entrée-sortie observés aux instants discrets $t_k = kT_s$ pour $k = 0, \dots, N-1$, l'équation entrée-sortie matricielle (14) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{Y}_{\lambda,N} = \Gamma_{i,\lambda} \mathcal{X}_{\lambda,N} + \Phi_{i,\lambda} \mathcal{U}_{\lambda,N} + \Psi_{i,\lambda} \mathcal{E}_{\lambda,N} \quad (15)$$

où

$$\mathcal{U}_{\lambda,N} = \begin{bmatrix} [\lambda^{i-1} \mathbf{u}]_0 & [\lambda^{i-1} \mathbf{u}]_1 & \cdots & [\lambda^{i-1} \mathbf{u}]_{N-1} \\ [\lambda^{i-2} \mathbf{u}]_0 & [\lambda^{i-2} \mathbf{u}]_1 & \cdots & [\lambda^{i-2} \mathbf{u}]_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\lambda \mathbf{u}]_0 & [\lambda \mathbf{u}]_1 & \cdots & [\lambda \mathbf{u}]_{N-1} \\ \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times N}$$

et $[\lambda^j \mathbf{u}]_k = \lambda^j \mathbf{u}(t_k)$ représente les données filtrées échantillonnées. Les matrices $\mathcal{Y}_{\lambda,N} \in \mathbb{R}^{pi \times N}$, $\mathcal{X}_{\lambda,N} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ et $\mathcal{E}_{\lambda,N} \in \mathbb{R}^{mi \times N}$ sont construites de façon similaire. La relation (15) permet d'utiliser les algorithmes d'identification des sous-espaces de manière identique à ceux utilisés dans un contexte non fractionnaire à temps discret. La différence est l'ajout d'une étape pendant laquelle les données sont filtrées (ce qui est une étape classique en identification à temps continu [23]). Ce filtre passe-bas nécessite de déterminer un paramètre de synthèse ω_f dont la sensibilité est étudiée au §VI.

B. Utilisation d'un filtre passe-tout (déphaseur) non entier

Un filtre de type passe-tout a été utilisée dans [11] pour l'identification à temps continu d'une représentation d'état entière à partir de données échantillonnées. Dans le cas non entier, nous allons montrer qu'un filtre passe-tout d'ordre non entier peut être utilisé.

Soit le filtre suivant (de type passe-tout) :

$$W(s) = \frac{s^\alpha - a}{s^\alpha + a}, \text{ avec } a > 0, a \neq \lambda_k, \forall k = 1, \dots, n, \quad (16)$$

(où λ_k est la $k^{\text{ème}}$ valeur propre de A). En utilisant le fait que $s^\alpha = a(1 + W(s))/(1 - W(s))$, la représentation d'état (4)-(5) devient :

$$W(s)X_w(s) = A_w X_w(s) + B_w U(s) + K_w E(s) \quad (17)$$

$$Y(s) = C_w X(s) + D_w U(s) + E(s), \quad (18)$$

avec $X_w(s) = (1 - W(s))^{-1} X(s)$ et :

$$A_w = (A + aI)^{-1}(A - aI), \quad (19)$$

$$B_w = (A + aI)^{-1}B, \quad (20)$$

$$C_w = 2aC(A + aI)^{-1}, \quad (21)$$

$$D_w = D - C(A + aI)^{-1}B, \quad (22)$$

$$K_w = (A + aI)^{-1}K. \quad (23)$$

On obtient alors par un raisonnement identique à celui présenté dans le paragraphe précédent l'équation d'entrée-sortie matricielle suivante :

$$\mathcal{Y}_{w,N} = \Gamma_{i,w} \mathcal{X}_{w,N} + \Phi_{i,w} \mathcal{U}_{w,N} + \Psi_{i,w} \mathcal{E}_{w,N} \quad (24)$$

où

$$\mathcal{U}_{w,N} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{N-1} \\ [w\mathbf{u}]_0 & [w\mathbf{u}]_1 & \cdots & [w\mathbf{u}]_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [w^{i-2} \mathbf{u}]_0 & [w^{i-2} \mathbf{u}]_1 & \cdots & [w^{i-2} \mathbf{u}]_{N-1} \\ [w^{i-1} \mathbf{u}]_0 & [w^{i-1} \mathbf{u}]_1 & \cdots & [w^{i-1} \mathbf{u}]_{N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times N}$$

et $[w^j \mathbf{u}]_k = w^j \mathbf{u}(t_k)$ représente les données filtrées (par j filtres $W(s)$ successifs) échantillonnées. Les matrices

$\mathcal{Y}_{w,N} \in \mathbb{R}^{pi \times N}$, $\mathcal{X}_{w,N} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ et $\mathcal{E}_{w,N} \in \mathbb{R}^{mi \times N}$ sont construites de façon similaire. Comme dans le cas précédent, cette relation permet d'utiliser les méthodes des sous-espaces pour identifier les matrices A_w , B_w , C_w et D_w . Les matrices A , B , C et D en seront déduites à partir des relations (19)-(22). Ce filtre nécessite la synthèse d'un paramètre a ($= \omega_f^\alpha$). Son influence sera étudiée §VI.

V. MÉTHODES DES SOUS-ESPACES

Afin d'estimer les matrices (A_λ , B_λ , C_λ , D_λ) ou (A_w , B_w , C_w , D_w) selon le filtre utilisé, une variante de l'algorithme PO-MOESP (*Past Output MIMO Output-Error State Space*) présentée dans [11] est utilisé afin de réduire le biais des estimateurs en introduisant une variable instrumentale. D'après [11], les estimées sont tout de même asymptotiquement biaisées.

Notons \mathcal{U}_f la matrice des entrées filtrées échantillonnées (\mathcal{U}_f est égale à $\mathcal{U}_{\lambda,N}$ ou $\mathcal{U}_{w,N}$ selon le filtre utilisé) et \mathcal{Y}_f la matrice des sorties filtrées échantillonnées (égale à $\mathcal{Y}_{\lambda,N}$ ou $\mathcal{Y}_{w,N}$). Nous choisissons d'utiliser comme variable instrumentale la matrice $\mathcal{Z} = [\mathcal{U}_{f,L}^T \mathcal{Y}_{f,L}^T]^T$ formée des matrices d'entrées et sorties temporellement décalées (composées de $[f^j \mathbf{u}]_{k-L} = f^j \mathbf{u}(t_k - LT_e)$ et $[f^j \mathbf{y}]_{k-L} = f^j \mathbf{y}(t_k - LT_e)$ pour $k = 0, \dots, N-1$ et $j = 0, \dots, i-1$ où f correspond au filtre utilisé). Le principe de l'algorithme est le suivant :

1. Effectuer la décomposition LQ suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_f \\ \mathcal{U}_{f,L} \\ \mathcal{Y}_{f,L} \\ \mathcal{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \quad (25)$$

où les matrices L_{jj} sont triangulaires supérieures et les matrices Q_j sont orthogonales (pour $j = 1, 2, 3, 4$).

2. Effectuer la décomposition en valeurs singulières de $[L_{42} \ L_{43}]$ qui approche l'espace colonne de la matrice d'observabilité étendue $\Gamma_{i,f}$:

$$[L_{42} \ L_{43}] = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (26)$$

où $U_1 \in \mathbb{R}^{ip \times n}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{ip \times (ip-n)}$ et $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. L'ordre de la représentation d'état n peut être estimé en calculant le nombre de valeurs propres significatives de $[L_{42} \ L_{43}]$.

3. Estimer la matrice d'observabilité étendue :

$$\hat{\Gamma}_{i,f} = U_1 \Sigma_1^{1/2}. \quad (27)$$

4. Estimer la matrice C_f (égale à C_λ ou C_w) :

$$\hat{C}_f = \hat{\Gamma}_{i,f}(1:p, 1:n). \quad (28)$$

5. Estimer la matrice A_f (égale à A_λ ou A_w) par résolution du système linéaire :

$$\hat{\Gamma}_{i,f}(1:p(i-1), 1:n) A_f = \hat{\Gamma}_{i,f}(p+1:ip, 1:n). \quad (29)$$

6. Estimer les matrices B_f et C_f . Plusieurs méthodes présentées dans [26], [18] peuvent être utilisées.

Notons, à titre de comparaison, que la méthode utilisée précédemment dans [24] était fondé sur l'algorithme MOESP ordinaire. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite un assez grand nombre de blocs lignes i , ce qui augmente le coût de calcul et les incertitudes (notamment dus à la simulation des filtres non entiers).

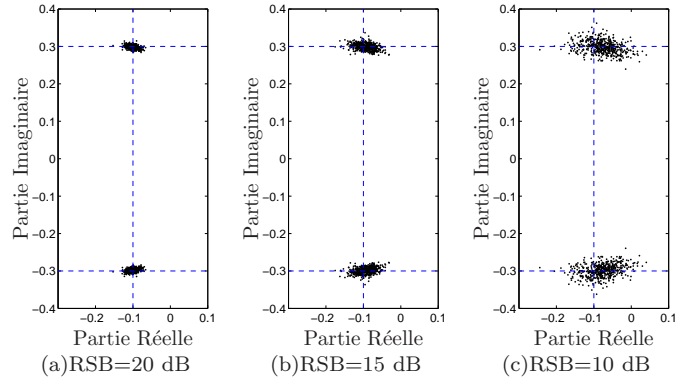


Fig. 3. Pôles estimés avec un filtre passe-bas non entier (+ : vrais poles), α fixé à 0.5

VI. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE SYNTHÈSE

Les algorithmes sont appliqués sur $N = 1023$ données entrée-sortie générées par la simulation du système ayant la structure (1)-(2) avec $\alpha = 0.5$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.5 & -0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et des conditions initiales nulles ($\mathbf{x}(t) = 0$ for $t \leq 0$). Le signal d'entrée est une séquence binaire pseudo-aléatoire de longueur maximale. La période d'échantillonnage est $T_e = 0.05s$. Les sorties sont corrompues par des bruits blancs de divers rapports signal sur bruit (RSB) égaux à 20, 15 et 10dB. Les figures 1 (obtenues en considérant un filtre passe-bas) et 2 (obtenues en considérant un filtre passe-tout) représentent l'influence des paramètres de synthèse (à savoir le nombre de blocs lignes i des matrices de données de la méthode des sous-espaces et la pulsation des filtres ω_f) sur l'erreur normalisée $\|\hat{y} - y\|_2 / \|y\|_2$ pour la première sortie (des résultats similaires étant obtenus sur la seconde sortie). L'estimation est considérée comme incorrecte si cette erreur est supérieure ou égale à 1 (*i.e.* si son logarithme est supérieur ou égal à 0). Ainsi, toutes les erreurs supérieures à 1 sont mises à 1. les niveaux de contour montrent que le choix d'un nombre de blocs lignes minimal ($i = n + 1$) est suffisant et que les pulsations peuvent être choisies dans un large intervalle sans que ce choix influe sur l'erreur de sortie normalisée. Toutefois, on constate que le choix de ces paramètres influe moins sur les résultats de la méthode avec un filtre passe-tout.

Nous choisissons de fixer les paramètres de synthèse de la méthode avec le filtre passe-bas à $i = 3$ et $\omega_f = 3$ et ceux de la méthode avec la filtre passe-tout à $i = 4$ et $\omega_f = 30$. Afin d'analyser les propriétés statistiques des estimateurs, 3 simulations de Monte Carlo ont été effectuées pour des RSB de 20, 15 et 10dB avec pour chacun 500 réalisations du bruit. L'ordre de la dérivation non entière est fixé à $\alpha = 0.5$. Les figures 3 et 4 représentent les pôles estimés. On constate que les estimateurs sont légèrement biaisés; le biais obtenu avec la méthode utilisant un filtre passe-tout étant supérieur pour une variance du même ordre de grandeur.

VII. ESTIMATION DE L'ORDRE NON ENTIER

Jusqu'alors l'ordre de dérivation non entière de la représentation d'état était supposé connu. Son estimation

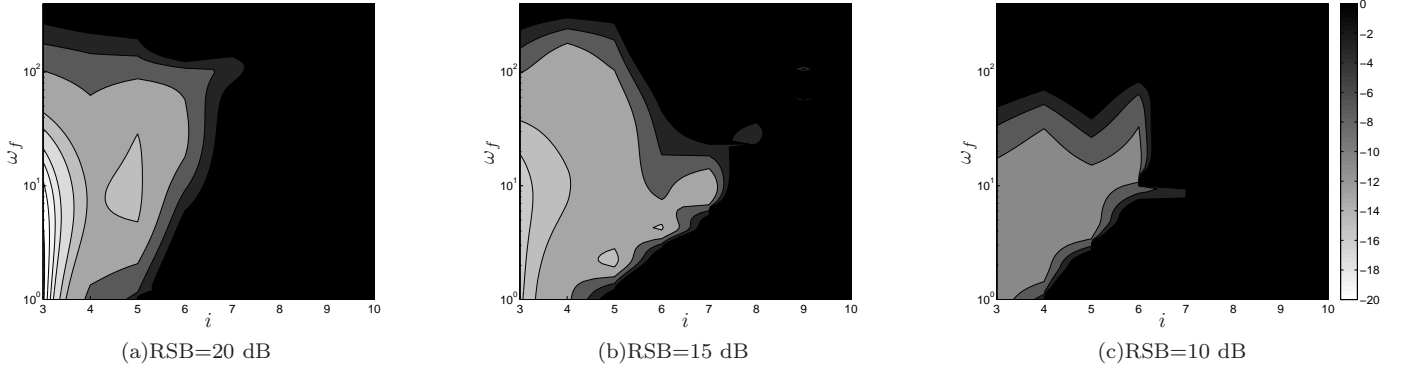


Fig. 1. Erreur normalisée $\|\hat{y} - y\|_2 / \|y\|_2$ en dB en fonction du nombre de blocs-lignes i et de la pulsation du filtre passe-bas ω_f .

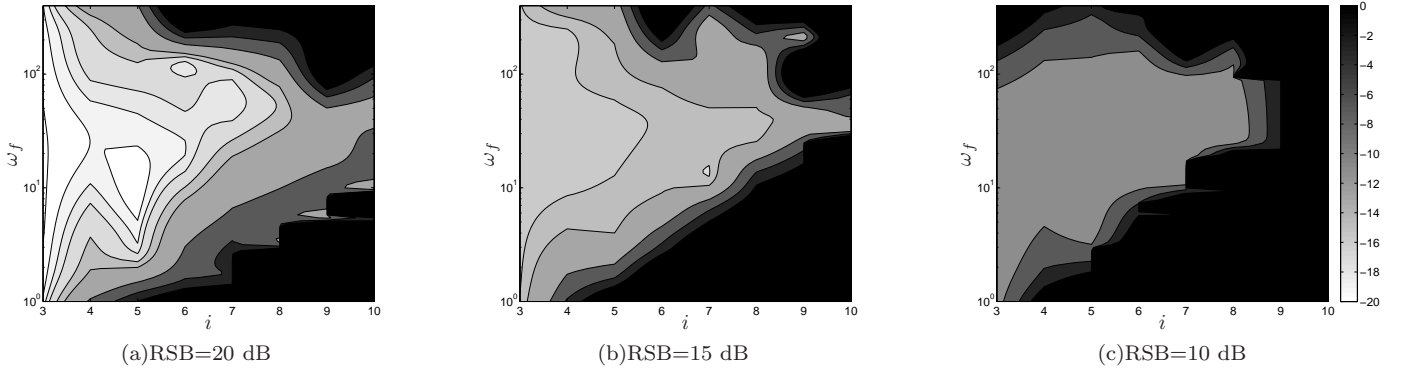


Fig. 2. Erreur normalisée $\|\hat{y} - y\|_2 / \|y\|_2$ en dB en fonction du nombre de blocs-lignes i et de la pulsation du filtre passe-tout ω_f .

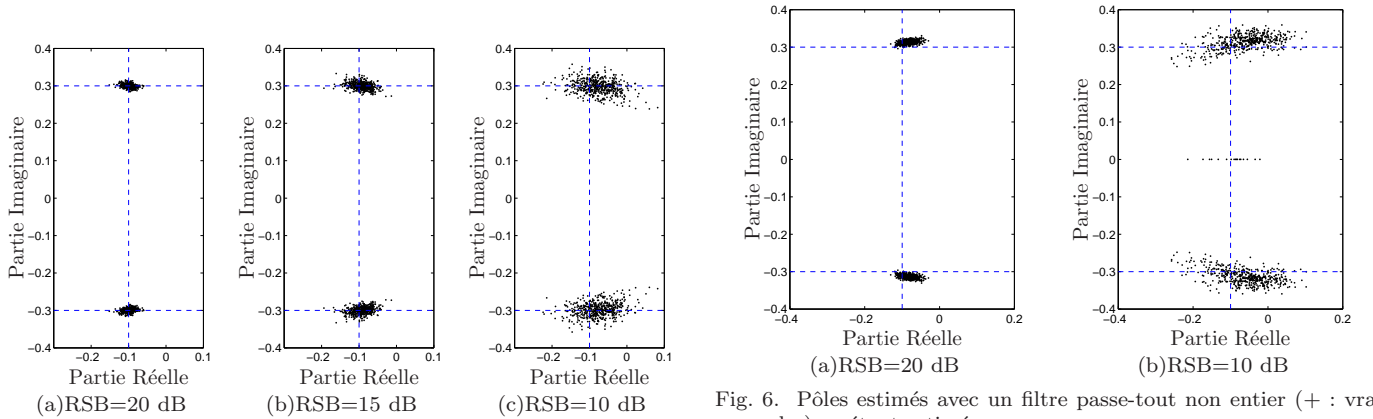


Fig. 4. Pôles estimés avec un filtre passe-tout non entier (+ : vrais poles), α fixé à 0.5

Fig. 6. Pôles estimés avec un filtre passe-tout non entier (+ : vrais poles), α étant estimé.

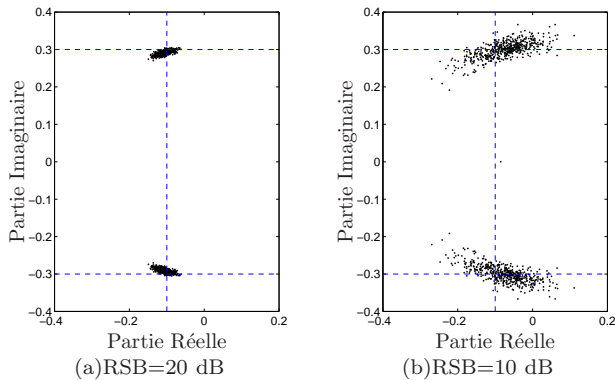


Fig. 5. Pôles estimés avec un filtre passe-bas non entier (+ : vrais poles), α étant estimé.

est réalisée en minimisant le critère quadratique :

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in (0,2)} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}}_c(\alpha) - \mathbf{y}_c\|_2^2, \quad (30)$$

où \mathbf{y}_c est le vecteur (de dimension pN) obtenu en concaténant les p sorties du système et $\hat{\mathbf{y}}_c(\alpha)$ est le vecteur obtenu en concaténant les p sorties de la représentation d'état estimée pour une valeur donnée de α . L'estimée de α (30) est obtenue par une méthode d'optimisation non linéaire. L'algorithme utilisé est fondé sur une méthode à région de confiance et sur une méthode de Newton décrite dans [27]. Ainsi, l'algorithme des sous-espaces proposé est exécuté à chaque itération de la méthode d'optimisation. Le nombre d'états n est supposé connu. Cependant, il peut être estimé en utilisant un critère d'estimation d'ordre présenté dans [28].

Des simulations de Monte Carlo ont été effectuées pour des RSB de 20 et 10dB, toujours avec 500 réalisations du bruit. L'ordre α est estimé à l'aide du critère (30). Les figures 3 et 4 représentent les pôles estimés et celles 7 et 8 représentent les histogrammes des ordres commensurables estimés. On constate que la méthode du filtre passe-bas est meilleure au sens qu'elle présente un biais sur les estimées plus faibles que celui de la méthode du filtre passe-tout (avec une variance du même ordre de grandeur).

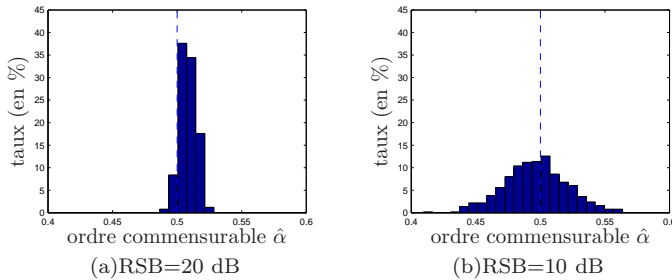


Fig. 7. Histogrammes des ordres commensurables estimés. Cas du filtre passe-bas non entier

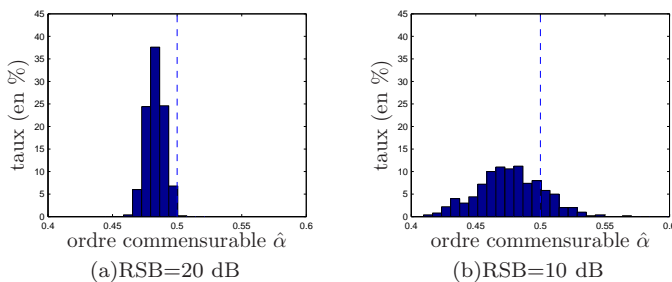


Fig. 8. Histogrammes des ordres commensurables estimés. Cas du filtre passe-tout non entier

VIII. CONCLUSION

Une nouvelle approche pour l'identification d'un système multivariable non entier est proposée dans ce papier. Elle repose sur l'utilisation d'un opérateur de type filtre passe-bas ou filtre passe-tout afin d'obtenir une équation matricielle entrée-sortie permettant l'application des méthodes des sous-espaces sans nécessité l'estimation des dérivées d'ordres non entiers des signaux. Les résultats de simulation montrent que l'approche avec le filtre passe-bas conduit sensiblement à de meilleurs résultats.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Sabatier, M. Aoun, A. Oustaloup, G. Grégoire, F. Ragot, et P. Roy. Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation. *Signal Processing*, 86(10) :2645–2657, 2006.
- [2] K. B. Oldham et J. Spanier. Diffusive transport to planar, cylindrical and spherical electrodes. *Electroanal. Chem. Interfacial Electrochem.*, 41 :351–358, 1973.
- [3] J.-L. Battaglia, O. Cois, L. Puigsegur, et A. Oustaloup. Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 44(14) :2671–2680, 2001.
- [4] A. Oustaloup, L. Le Lay, et B. Mathieu. Identification of non integer order system in the time-domain. *IEEE-CESA '96, SMC IMACS Multiconference*, 1996.
- [5] J.-C. Trigeassou, T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup, et F. Levron. Modeling and identification of a non integer order system. *Proc. of the European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.

- [6] O. Cois, A. Oustaloup, T. Poinot, et J.-L. Battaglia. Fractional state variable filter for system identification by fractional model. *Proc. of the European Control Conference*, Porto, Portugal, Sep. 2001.
- [7] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, et A. Oustaloup. Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation. *Automatica*, 43(9) :1640–1648, September 2007.
- [8] R. Malti, S. Victor, A. Oustaloup, et H. Garnier. An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification. *Proc. of the 17th IFAC World congress*, Seoul, South Korea, 2008.
- [9] R. Malti, S. Victor, et A. Oustaloup. Advances in system identification using fractional models. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(2), January 2008.
- [10] T. Poinot et J.-C. Trigeassou. Identification of fractional systems using an output-error technique. *Nonlinear Dynamics*, 38(1-2) :133–154, 2004.
- [11] B. R. J. Haverkamp, C. T. Chou, M. Verhaegen, et R. Johansson. Identification of continuous-time MIMO state space models from sampled data, in the presence of process and measurement noise. *Proc. of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, Dec. 1996.
- [12] R. Johansson, M. Verhaegen, et C. T. Chou. Stochastic theory of continuous-time state-space identification. *Proc. of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, California, USA, Dec. 1997.
- [13] R. Johansson, M. Verhaegen, et C. T. Chou. Stochastic theory of continuous-time state-space identification. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(1) :41–51, 1999.
- [14] T. Bastogne, H. Garnier, et P. Sibille. A PMF-based subspace method for continuous-time model identification. Application to a multivariable winding process. *International Journal of Control*, 74(2) :118–132, 2001.
- [15] A. Ohsumi, K. Kameyama, et K.-I. Yamaguchi. Subspace identification for continuous-time stochastic systems via distribution-based approach. *Automatica*, 38 :63–79, 2002.
- [16] W. Li, H. Raghavan, et S. Shah. Subspace identification of continuous time models for process fault detection and isolation. *Journal of Process Control*, 13 :407–421, 2003.
- [17] G. Mercère, R. Ouvrard, M. Gilson, et H. Garnier. Subspace-based methods for continuous-time model identification of MIMO systems from filtered sampled data. *Proceedings of the European Control Conference*, Kos, Greece, 2007.
- [18] T. Katayama. *Subspace methods for system identification*. Springer, 2005.
- [19] D. Matignon et B. d'Andréa Novel. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. *IEEE-CESA '96, SMC IMACS Multiconference*, pages 952–956, Lille, France, 1996.
- [20] D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM : Proceedings, Fractional Differential Systems : Models, Methods and Applications*, volume 5, pages 145–158, 1998.
- [21] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, et A. Oustaloup. Numerical simulations of fractional systems : an overview of existing methods and improvements. *Nonlinear Dynamics*, 38 :117–131, 2004.
- [22] A. Oustaloup. *La dérivation non entière. Théorie, synthèse et applications*. Hermès, Paris, 1995.
- [23] H. Garnier et L. Wang, editors. *Identification of Continuous-Time Models from Sampled Data*. Springer, 2008.
- [24] M. Thomassin et R. Malti. Subspace method for continuous-time fractional system identification. *Proc. of the 15th IFAC Symp. on System Identification (SYSID 2009)*, Saint-Malo, France, 2009.
- [25] M. Thomassin et R. Malti. Multivariable identification of continuous-time fractional system. *Proc. of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conference*, San Diego, California, USA, 2009.
- [26] P. Van Overschee et B. De Moor. *Subspace Identification for Linear Systems : Theory, Implementation Applications*. Springer, 1996.
- [27] T. F. Coleman et Y. Li. An interior, trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 6 :418–445, 1996.
- [28] D. Bauer. Order estimation for subspace methods. *Automatica*, 37 :1561–1573, 2001.