

# Synchronisation de mouvements sous contraintes pour des systèmes à retard

Warody LOMBARDI<sup>1,2</sup>, Anamaria LUCA<sup>1</sup>, Sorin OLARU<sup>1</sup>, Silviu-Iulian NICULESCU<sup>2</sup>, Patrick BOUCHER<sup>1</sup>, Joono CHEONG<sup>3</sup>

<sup>1</sup>SUPELEC Sciences des Systèmes (E3S) - Département Automatique  
3 rue Joliot-Curie, 91192, Gif-sur-Yvette, France.

*Warody.Lombardi@supelec.fr, Anamaria.Luca@supelec.fr, Sorin.Olaru@supelec.fr, Patrick.Boucher@supelec.fr*

<sup>2</sup>Laboratoire de Signaux et Systèmes - SUPELEC, UMR 8506 CNRS  
3 rue Joliot-Curie, 91192, Gif-sur-Yvette, France.

*Warody.Lombardi@lss.supelec.fr, Silviu.Niculescu@lss.supelec.fr*

<sup>3</sup>Université de Corée  
Jochiwon 339-700, Corée.  
*jncheong@korea.ac.kr*

**Résumé**— Cet article propose la synchronisation du mouvement de deux systèmes interconnectés à travers un réseau de communication. Une attention spéciale est accordée à la problématique du retard variable dans la chaîne de communication, causé par la discrétisation. Deux méthodes de stabilisation ont été proposées : une basée sur la construction d'un modèle affecté par incertitude polytopique et l'autre basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov.

**Mots-clés**— Synchronisation de mouvements, systèmes à retard, admissibilité d'états, stabilisation

## I. INTRODUCTION

Le problème de synchronisation des mouvements de systèmes interconnectés est bien connu dans la littérature. Parmi les applications, l'exemple classique est la téléopération des robots manipulateurs. Dans ce cas, un opérateur humain contrôle un système esclave éloigné d'un site principale, et reçoit un retour de force de l'esclave, en ayant la sensation d'être présent et en contact direct avec celui-ci. Ce phénomène est appelé retour de force ou réflexion de force [6]. Ce problème a été étudié par [14], [18], [26], [1]. De plus, la synchronisation des mouvements offre la possibilité d'avoir plusieurs systèmes qui se comportent de la même manière, de façon coordonnée, grâce à des correcteurs décentralisés.

Par exemple, [7] propose la synchronisation via une structure de commande de type prédicteur de Smith. Dans ce cas, le retard a été considéré fixe. Une étude comparative entre différents correcteurs a été faite dans [2].

Une des contributions de cet article est l'étude du retard variable, et la comparaison entre deux techniques proposées. [22], [20], [21] ont construit un modèle polytopique incertain en utilisant les outils de la géométrie convexe. D'autres techniques d'approximation de modèle présentes dans la littérature sont [8], [9], [12], [25]. L'avantage principal est le suivant : une fois que le modèle incertain est disponible, nous pouvons appliquer des techniques classiques de commande robuste pour le problème de stabilisation. En revanche un modèle étendu doit être utilisé, et toutes les entrées de commande passées doivent être retenues en mémoire.

Pour éviter ces inconvénients, il y a l'approche de Lyapunov, où les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii (LKF) et les fonctions de Lyapunov-Razumikhin (LRF) sont mises en évidence dans [15]. Ces approches, combinées à une transformation de modèle appropriée, nous donnent des conditions de stabilité (voir les travaux [10], [11], [16] pour le cas continu, et [23], [4], [19] pour le cas discret). Il est important de mettre en évidence que dans la plupart des cas discrets, nous avons seulement une fonction candidate de Lyapunov, et pas une fonctionnelle. Mais par convention, elles sont aussi appelés "LKF Discret".

Tous ces aspects sont liés à l'étude des systèmes avec retard. Pour plus d'information sur le sujet et ainsi que sur les problèmes ouverts dans ce domaine le lecteur pourra trouver des informations dans [24].

Dans la nature, la présence de contraintes physiques est très commune. Dès que ces contraintes ne sont pas respectées, des composantes physiques du système peuvent être endommagées ou des actionneurs peuvent rentrer en saturation, ce qui ramène le système à l'instabilité. La présence d'un ensemble de sortie maximal est très intéressante du point de vue des contraintes. La garantie qu'un ensemble de contraintes sera respecté est connue dans la littérature comme *ensemble admissible maximal* (développé dans [13]).

L'objectif ici est de synchroniser deux systèmes mécaniques placés dans deux sites différents, en utilisant le retour de force, proposé dans [7] (Section II). Comme la communication est faite par un réseau avec retard, deux techniques de stabilisation ont été proposées dans la Section III : l'approche polytopique, où le système est modélisé comme un système incertain polytopique et où des techniques de commande robuste classiques ont été appliquées (Section III-A) ; et l'approche de Lyapunov, où en utilisant la discrétisation d'un LKF et les idées de [5], [17], des conditions LMI ont été utilisées pour obtenir un gain de retour d'état (Section III-B). A la fin de l'article dans la Section V, des simulations numériques ont été réalisées pour valider les résultats, en utilisant la commande prédictive (Section

IV).

## II. PROBLÉMATIQUE

Considérons un système de synchronisation, représenté par le schéma bloc montré par la figure I. Les deux systèmes interconnectés  $P_1$  et  $P_2$  ont des dynamiques connues. La connexion des systèmes sera faite par réseau, et la présence du retard est implicite au processus. L'objectif est la synchronisation des sorties  $x_{1,k}$  et  $x_{2,k}$ , malgré les effets du retard dans le réseau de communication. Le retard entre  $P_1$  et  $P_2$  est  $d_1$ . De l'autre côté, entre  $P_2$  et  $P_1$ , la valeur du retard est  $d_2$ . Le retard d'un cycle complet dans la boucle, connue comme "Round Trip Time (RTT)", est la somme de  $d_1$  et  $d_2$ .

Les deux systèmes sont représentés par des équations différentielles linéaires à retard :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{1,c}x_1(t) + B_{1,c}u_1(t - h_1), \\ \dot{x}_2(t) &= A_{2,c}x_2(t) + B_{2,c}u_1(t - h_2) \end{aligned} \quad (1)$$

où  $A_{i,c} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{i,c} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$  sont les vecteurs d'état,  $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$  sont les vecteurs des entrées et  $h_i > 0$  est le retard au niveau de l'entrée,  $\forall i = 1, 2$ . Considérons une période d'échantillonnage  $T_e$ , les instants  $t_k = kT_e$  et les états échantillonnés  $x_{1,k} = x_1(t_k)$ . Comme discuté dans [22], un degré d'incertitude est imposé quand nous traitons un système à retard :

$$h_i = d_i T_e - \epsilon \quad (2)$$

La variable d'incertitude  $\epsilon$  est bornée et varie dans le temps :

$$0 \leq \epsilon \leq \bar{\epsilon} \leq T_e, \quad (3)$$

En conséquence le modèle discrétisé est décrit par :

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= A_1 x_{1,k} + B_1 \tilde{u}_{1,k-d_1} - \Delta_1 (\tilde{u}_{1,k-d_1} - \tilde{u}_{1,k-d_1+1}), \\ x_{2,k+1} &= A_2 x_{2,k} + B_2 \tilde{u}_{2,k-d_2} - \Delta_2 (\tilde{u}_{2,k-d_2} - \tilde{u}_{2,k-d_2+1}), \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\Delta_i$ ,  $\forall i = 1, 2$ , sont les termes que doivent compenser l'effet de l'incertitude introduite par  $\epsilon$ . Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\Delta_i$  sont :

$$\begin{aligned} A_i &= e^{A_{i,c} T_e}, \quad B_i = \int_0^{T_e} e^{A_{i,c}(T_e-\tau)} B_{i,c} d\tau, \\ \Delta_i &= \int_{-|\epsilon|}^0 e^{-A_{i,c}\tau} B_{i,c} d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

obtenues en supposant que les entrées de commande  $\tilde{u}_{i,k}$  sont constantes par morceau  $u_i(t) = u_{i,k}$ ,  $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ .

Le vecteur des entrées  $\tilde{u}_{i,k-d_i} \in \mathbb{R}^m$  est donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1,k-\tau} &= F_{1,k} + F_{2,k-d_2} + u_{1,k}, \\ \tilde{u}_{2,k-\tau} &= F_{1,k-d_1} + F_{2,k} + u_{2,k} \end{aligned} \quad (6)$$

où  $F_{i,k}$ ,  $i = 1, 2$  sont les forces à l'entrée. Les entrées de commande  $u_i$ ,  $i = 1, 2$  sont données par :

$$\begin{aligned} u_{1,k} &= K_1 \varepsilon_{1,k}, \\ u_{2,k} &= K_2 \varepsilon_{2,k}, \end{aligned} \quad (7)$$

où les gains de retour d'état  $K_i$ ,  $i = 1, 2$  sont obtenus par la procédure présentée dans la section III et l'erreur  $\varepsilon_{i,k}$ ,  $i = 1, 2$  est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,k} &= x_{1,k-d_1-d_2} - x_{2,k-d_2}, \\ \varepsilon_{2,k} &= -x_{1,k-d_1} - x_{2,k-d_1-d_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

L'objectif est la stabilité et la synchronisation des systèmes  $P_1$  et  $P_2$  malgré la présence du retard de communication tout en respectant un ensemble de contraintes :

$$Cx_k + Du_k \leq W. \quad (9)$$

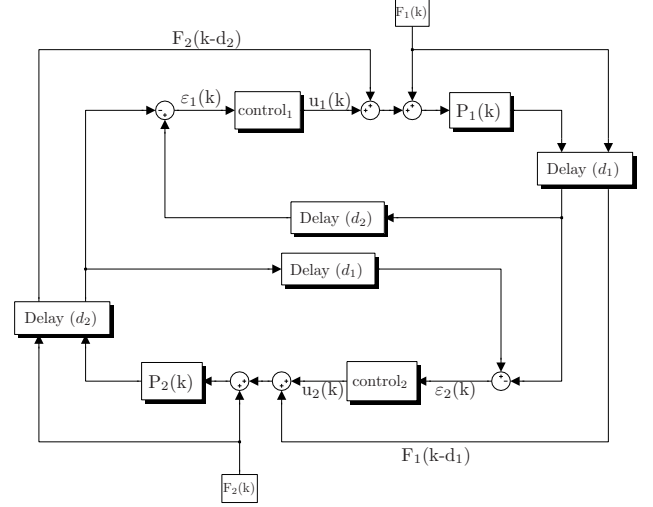


Fig. 1. Schéma bloc pour la synchronisation.

## III. STABILITÉ DE SYSTÈMES À RETARD

Pour simplifier la notation, on va considérer par la suite le cas  $A = A_1 = A_2$  et  $A = A_1 = A_2$  en mentionnant que le cas général peut être traité de façon similaire.

### A. Approche polytopique

L'objectif est de confiner  $\Delta$  donné par (5) dans un polytope de telle façon à couvrir toutes les réalisations possibles de (4) en fonction de la variation du retard  $\epsilon$ . La construction est basée sur la forme canonique de Jordan  $A_{i,c} = V_i \Lambda_i V_i^{-1}$ . Trois cas principaux doivent être considérés : matrice  $A_c$  non défective, avec des valeurs propres réelles, matrice  $A_c$  non défective avec des valeurs propres complexes conjuguées et matrice  $A_c$  défective. Tous les autres cas peuvent être obtenus par la combinaison de ces cas principaux. Les détails sur chaque construction ne seront pas développés dans cet article, les détails de construction étant développés dans [22], [20], [21].

Comme on veut la synchronisation des systèmes mécaniques, considérons une matrice  $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible et non défective, avec les valeurs propres réelles et non répétées. Les blocs de Jordan de multiplicité 1 nous donnent une façon très simple de construire un *simplex*  $n$ -dimensionnel pour emboîter la dépendance non-linéaire de  $\Delta(\epsilon)$ . Les sommets sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \mathbf{0}_{n \times m}, \\ \Delta_j &= n V \int_0^{\bar{\epsilon}} e^{\Lambda_j \tau} d\tau V^{-1} B_c, \quad \forall j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (10)$$

où  $\Lambda_j$  correspond au  $j^{eme}$  bloc de la matrice  $\Lambda$  complétée par des zéros.

*Remarque 1* : Des ensembles polytopiques moins conservatifs peuvent être obtenus par optimisation. Cette approche ne sera pas développée ici (voir [20] et [21] pour plus des détails).

La dynamique (4) peut être réécrite dans une forme compacte :

$$\xi_{k+1} = A_\Delta \xi_k + B_\Delta u_k, \quad (11)$$

avec :

$$A_\Delta = \begin{bmatrix} A & B - \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$B_\Delta = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix}; \quad \xi_k^T = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-d} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix}.$$

Considérons les sommets  $\Delta_i$  pour construire un modèle polytopique à partir de l'Eq. (12) avec  $n + 1$  réalisations,  $\Delta \in \text{Co}\{\delta_0, \dots, \delta_n\}$ . Un modèle étendu global est obtenu sous la forme :

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= A_\Delta \xi_k + B_\Delta u_k \\ A_\Delta &\in \text{Co}\{A_{\Delta_0}, A_{\Delta_1}, \dots, A_{\Delta_n}\}. \end{aligned} \quad (13)$$

En utilisant  $Q > 0$  et  $R > 0$  comme matrices de pondération, dans un problème d'optimisation du type min-max, la synthèse d'une lois de commande stabilisante  $u_k = K\xi_k$  peut être imposée en fonction de la faisabilité d'un problème LMI ([5] et [17]) :

$$\begin{aligned} &\min_{\gamma, S, Y} \gamma \\ &\text{sujet à :} \\ &\begin{bmatrix} S & SA_{\Delta_i}^T + Y^T B_\Delta^T & SQ^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_{\Delta_i} S + B_\Delta Y & S & 0 & 0 \\ Q^{1/2} S & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succeq 0, \\ &S \succeq I \\ &\forall i = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (14)$$

avec  $K = YS^{-1}$ .

### A.1 Ensembles admissibles robustes

Pour obtenir un ensemble admissible robuste, le premier pas est de réécrire les contraintes (9) en fonction d'une variable d'état augmenté  $\xi$  :

$$\Gamma \xi_k + D u_k \leq W. \quad (15)$$

En utilisant la lois de commande stabilisante  $u_k = K\xi_k = YS^{-1}\xi_k$  trouvé via la LMI (14), l'ensemble polyédral peut être défini dans l'espace augmenté comme suit :

$$P = \left\{ \xi \in \mathfrak{R}^{(n+d-m)} \mid (\Gamma + DK)\xi \leq W \right\}. \quad (16)$$

Nous nous intéressons maintenant au concept d'*ensemble admissible maximal* [13] pour des modèles polytopiques [20] par rapport à la lois de commande  $u_k = K\xi_k$ . Introduisons :

*Définition 1* : Pour un système avec incertitude polytopique :

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \Phi \xi_k \\ \Phi &\in \text{Co}\{(A_{\Delta_0} + B_\Delta K); \dots; (A_{\Delta_n} + B_\Delta K)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

et un ensemble  $P$  prédéfini, l'*ensemble admissible*  $O_\infty^\Omega$  *maximal* est défini comme la collection de tous les états initiaux  $\xi_0$  à partir desquels les trajectoires du système restent à l'intérieur de  $P$  pour tous les instants futurs  $k \geq 0$ ,  $k \in (\mathbb{N})$ . ■

En conclusion, l'ensemble maximal admissible de sorte peut être défini :

$$O_\infty^\Omega = \left\{ \xi_0 \mid \prod_{i=0}^k \Phi_i \xi_0 \in P, \forall \Phi_i \in \Omega_K, \forall k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (18)$$

L'étude d'un tel ensemble a été proposé en [20]. De plus, l'ensemble  $O_\infty^\Omega$  a les propriétés d'invariance robuste [3] et sera utilisé dans un schéma de commande prédictive.

### B. Approche de Lyapunov

Pour éviter une représentation d'état étendue l'objectif est d'obtenir une lois de commande du type retour d'état :

$$u_k = K x_k. \quad (19)$$

À partir de l'équation (4), le système en boucle fermé devient :

$$x_{k+1} = A x_k + \Delta K x_{k-d+1} + (B - \Delta) K x_{k-d}. \quad (20)$$

*Théorème 1* : Considérons le système discrétisé (20).

$$K = Y G_0^{-1}, \quad (21)$$

où  $G_0 = G_0^T > 0$  et  $Y$  sont obtenues en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} &\min_{\gamma, G_0, G_x, G_y, Y} \gamma \\ &\text{soumis à : (23)} \end{aligned} \quad (22)$$

*Preuve 1* : Pour le système (20) considérons la fonction Lyapunov candidate :

$$V_k = x_k^T P_0 x_k + \sum_{i=1}^{d-1} x_{k-i}^T P_1 x_{k-i} + x_{k-d}^T P_2 x_{k-d} > 0. \quad (24)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique, la fonction candidate doit satisfaire :

$$V_{k+1} - V_k \leq 0. \quad (25)$$

C'est à dire que la fonction décroît pour n'importe quel trajectoire du système. En utilisant les idées de [17], le critère de performance robuste suivant peut être proposée :

$$\begin{aligned} V_{k+1} &- V_k \leq \\ &- (x_k^T Q x_k + u_{k-d+1}^T R_1 u_{k-d+1} + u_{k-d}^T R_2 u_{k-d}) \\ &= - (x_k^T Q x_k + x_{k-d+1}^T K^T R_1 K x_{k-d+1} + \\ &+ x_{k-d}^T K^T R_2 K x_{k-d}). \end{aligned} \quad (26)$$

En vérifiant la convergence, nous avons :

$$\begin{aligned} V_{k+1} &- V_k = \\ &[A x_k + (B - \Delta) K x_{k-d} + \Delta K x_{k-d+1}]^T P_0 \\ &[A x_k + (B - \Delta) K x_{k-d} + \Delta K x_{k-d+1}] + \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} x_{k-i+1}^T P_1 x_{k-i+1} + \\ &+ x_{k-d+1}^T P_2 x_{k-d+1} - x_k^T P_0 x_k - \\ &- \sum_{i=1}^{d-1} x_{k-i}^T P_1 x_{k-i} - x_{k-d}^T P_2 x_{k-d}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} G_0 & 0 & 0 & G_x & 0 & G_0 A^T & G_0 Q^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & G_x & 0 & 0 & G_y & Y^T \Delta^T & 0 & Y^T R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & G_y & 0 & 0 & Y^T (B - \Delta)^T & 0 & 0 & Y^T R_2^{\frac{1}{2}} \\ G_x & 0 & 0 & G_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_y & 0 & 0 & G_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ AG_0 & \Delta Y & (B - \Delta)Y & 0 & 0 & G_0 & 0 & 0 & 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} G_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I & 0 & 0 \\ 0 & R_1^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I & 0 \\ 0 & 0 & R_2^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

En simplifiant les termes de (27) et en utilisant la notation :

$$\xi_k^T = [x_k^T \quad x_{k-d+1}^T \quad x_{k-d}^T]^T, \quad (28)$$

on obtient que (27) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$V_k - V_{k+1} = \xi_k^T A_\Delta \xi_k. \quad (29)$$

De plus (26) devient :

$$\xi_k^T (A_\Delta - Q_\Delta) \xi_k \geq 0, \quad (31)$$

où :

$$Q_\Delta = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & K^T R_1 K & 0 \\ 0 & 0 & K^T R_2 K \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Cette équation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} P_0 - Q & 0 & 0 \\ 0 & P_1 - K^T R_1 K & 0 \\ 0 & 0 & P_2 - K^T R_2 K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ P_0 A & P_0 \Delta K & P_0 (B - \Delta) K \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & P_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ P_0 A & P_0 \Delta K & P_0 (B - \Delta) K \end{bmatrix} \geq 0. \quad (33)$$

Maintenant on considère que  $P_0 = \gamma G_0^{-1}$ ,  $P_1 = \gamma G_1^{-1}$  et  $P_2 = \gamma G_2^{-1}$ , on multiplie (33) par  $\frac{1}{\gamma}$  et on applique le complément de Schur. Vue la nouvelle inégalité, par congruence avec  $\text{diag}(G_0, G_0, G_0, G_0, G_0, G_0)$  et avec les notations  $Y = K G_0$ ,  $G_x = G_0 G_1^{-1} G_0$ ,  $G_y = G_0 G_2^{-1} G_0$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_0 & 0 & 0 & G_x & 0 & G_0 A^T \\ 0 & G_x & 0 & 0 & G_y & Y^T \Delta^T \\ 0 & 0 & G_y & 0 & 0 & Y^T (B - \Delta)^T \\ G_x & 0 & 0 & G_x & 0 & 0 \\ 0 & G_y & 0 & 0 & G_y & 0 \\ AG_0 & \Delta Y & (B - \Delta)Y & 0 & 0 & G_0 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} GQ^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & Y^T R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & Y^T R_2^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_X \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{bmatrix} X^T \geq 0. \quad (34)$$

En utilisant le complément de Schur, on obtient la LMI finale (23) où  $G_0$ ,  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $\gamma$  et  $Y$  sont les variables de décision. Pour compléter la preuve il faut dire que  $K$  est obtenu via  $K = Y G_0^{-1}$ . ■

## B.1 Ensemble d'état admissible par rapport au retard

Considérons le système autonome :

$$\xi_{k+1} = \tilde{A}_i \xi \text{ for } i = 1, \dots, d, \quad (35)$$

où le vecteur d'état étendue  $\xi$  est le même que (28) et  $\tilde{A}_i$  est obtenue en utilisant la relation suivante :

$$\xi = \begin{bmatrix} x_k \\ \vdots \\ x_{k-d} \end{bmatrix}; \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times (i-1)n} & BK & 0_{n \times (d-i)n} \\ I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\tilde{A}_i = \left[ \begin{array}{c|ccc} A & 0_{n \times (i-1)n} & BK & 0_{n \times (d-i)n} \\ \hline I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I \end{array} \right] \quad (37)$$

Le terme  $BK$  se déplace dans la première ligne de la matrice  $\tilde{A}_i$  pour  $i = 1, \dots, d$  de façon à couvrir toutes les réalisations du retard  $d$ .

## B.2 L'utilisation de la théorie classique "Maximal Output Admissible Sets"

En utilisant la théorie classique des ensembles admissibles maximaux, considérons l'ensemble de contraintes donné par le domaine polyédral :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H_x x \leq h_x\} \quad (38)$$

et les contraintes de commande :

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m \mid H_u u \leq h_u\}, \quad (39)$$

on peut utiliser l'expression de la boucle fermée  $u_k = K x_k$  pour obtenir une forme compacte :

$$P_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\begin{bmatrix} H_x \\ H_u \end{bmatrix}}_H x \leq \underbrace{\begin{bmatrix} h_x \\ h_u \end{bmatrix}}_h \right\}. \quad (40)$$

Par le produit croisé des régions  $P_x$  dans un espace étendu, le polyèdre peut être défini :

$$P = \underbrace{P_x \times P_x \times \dots \times P_x}_{d+1} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{(d+1)n} \mid H \xi \leq h \right\}. \quad (41)$$

*Définition 2* : étant donné une dynamique discrète linéaire (comme (35)) et un ensemble polyédral  $P$ ,

$$A_\Delta = \begin{bmatrix} P_0 - A^T P_0 A - P_1 & -A^T P_0 \Delta K & -A^T P_0 (B - \Delta) K \\ -K^T \Delta^T P_0 A & P_1 - K^T \Delta^T P_0 \Delta K - P_2 & -K^T \Delta^T P_0 (B - \Delta) K \\ -K^T (B - \Delta)^T P_0 A & -K^T (B - \Delta)^T P_0 \Delta K & P_2 - K^T (B - \Delta)^T P_0 (B - \Delta) K \end{bmatrix} \quad (30)$$

l'ensemble admissible  $\Omega$  maximal est défini comme la collection de tous les états initiaux  $\xi_0$  pour lesquels les trajectoires du système restent dans  $P$  pour tous les instants futurs  $k \geq 0$ . ■

Pour chaque dynamique  $\tilde{A}_i, \forall i = 1, \dots, d$  l'ensemble maximal des états admissibles [13] est défini comme :

$$\Omega_i = \left\{ \xi_0 \mid \bigcup_{j=0}^k \tilde{A}_i^j \xi_0 \in P, \forall k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (42)$$

Autrement dit, l'ensemble maximal admissible est décrit comme l'intersection de  $\Omega_i$  pour  $i = 1, \dots, d$  :

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^d \Omega_i \quad (43)$$

Par construction  $\Omega \subset P \subset \mathbb{R}^{(d+1)n}$ .

### B.3 Algorithme

En utilisant la représentation de  $P$  en (41) et la séquence suivante :

$$\Omega_i^t = \left\{ \xi_0 \mid \bigcup_{i=0}^k \tilde{A}_i^i \xi_0 \in P, \forall 0 \leq k \leq t \right\}, \quad (44)$$

une construction algorithmique est proposée :

---

#### Algorithm 1 Obtention algorithmique de $\Omega_i^\infty$

---

**Require:**  $\tilde{A}, \bar{x}, t_{max}$

**Ensure:**  $\Omega_i^\infty$

- 1: Définir  $t = 0$ .
  - 2: Si  $\Omega_i^{t+1} = \Omega_i^t$ , arrêter. Définir  $t^* = t$  et  $\Omega_i = \Omega_i^\infty = \Omega_i^{t^*}$ .  
Si  $\Omega_i^{t+1} \neq \Omega_i^t$ , continuer. Si  $t \geq t_{max}$  arrêter.
  - 3: Remplacer  $t$  par  $t + 1$  et retourner au pas 2.
- 

## IV. COMMANDE PRÉDICTIVE

Une application des techniques décrites dans cet article peut être trouvée dans les schémas prédictifs, qui impliquent la résolution d'un problème d'optimisation :

$$\mathbf{k}_u^* = \underset{\mathbf{k}_u}{\arg \min} \xi_{k+N}^{\{0\}T} P \xi_{k+N}^{\{0\}} + \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \xi_{k+j}^{\{0\}T} Q \xi_{k+j}^{\{0\}} + u_{k+j}^T R u_{k+j} \right] \quad (45)$$

soumis à :

$$\begin{cases} \xi_{k+j+1} = A_{\Delta_i} \xi_{k+j} + B_{\Delta} u_{k+j}, i = 1, \dots, n \\ \Gamma \xi_{k+j} + D u_{k+j} \leq W, j = 1, \dots, N-1 \\ \xi_{k+N} \in O_\infty^\Omega \end{cases} \quad (46)$$

La première composante de la séquence optimale de commande  $k_u^*$  est appliquée comme entrée de commande, et l'optimisation recommence avec les nouvelles valeurs mesurées.

## V. EXEMPLE D'APPLICATION

L'exemple considéré est représenté par le problème de synchronisation développé par [7], où deux systèmes robotiques à un degré de liberté sont interconnectés à travers un réseau. La présence du retard est intrinsèque au processus de communication. Les dynamiques des systèmes sont données par :

$$J_n \ddot{\theta} + b_n \dot{\theta} = \tau_c, \quad (47)$$

où  $J_n$ ,  $b_n$  et  $\theta$  sont respectivement, l'inertie, le coefficient d'amortissement et l'angle de la liaison.

Pour simplifier l'analyse, deux systèmes identiques ( $P_1(s) = P_2(s)$ ) seront considérés. Les fonctions de transfert sont les suivantes :

$$P_1(s) = P_2(s) = \frac{1}{0.1148s^2 + 0.1912s}. \quad (48)$$

Pour une période d'échantillonnage  $T_e = 0.002s$ , la représentation discrète dans l'espace d'état de (48) est :

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} 1.9672 & -0.9672 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Le retard maximal, ou RTT, est de  $h = 0.01s$ . Donc le retard maximal discret est de  $d = 5$  périodes d'échantillonnage.

Pour obtenir le gain de retour d'état, les matrices de pondération choisies sont  $Q = I$  et  $R = 1$ , et en résolvant la LMI (23), on obtient :

$$K = 10^{-4} [0.8687 \quad -0.3202].$$

Pour déterminer l'ensemble maximal admissible, l'ensemble de contraintes de l'état a été utilisé :

$$-5 \leq x_k \leq 5.$$

Les forces exercées par l'opérateur sont  $F_1(t) = 2 * \sin(2\pi t)$  et  $F_2 = 0$ . La loi de commande est prédictive, déterminée par l'optimisation (45), en utilisant l'ensemble maximal admissible comme contraintes terminales d'optimisation. L'évolution temporelle est montrée dans la Fig. 2. Les états sont parfaitement synchronisés en respectant les contraintes, malgré la force d'interaction humaine et le retard variable.

Les forces exercées par l'opérateur sont  $F_1(t) = 0$  et  $F_2 = 0$ , par contre les conditions initiales pour le maître sont  $x_1(0) = [-1; 1]$  et pour l'esclave  $x_2(0) = [0.5; -0.5]$ . La loi de commande prédictive optimise (45), en utilisant l'ensemble maximal admissible (43) comme contraintes terminales d'optimisation. L'évolution temporelle est montrée dans la Fig. 3. Les états sont synchronisés en respectant les contraintes, malgré les conditions initiales non-nulles et le retard variable.

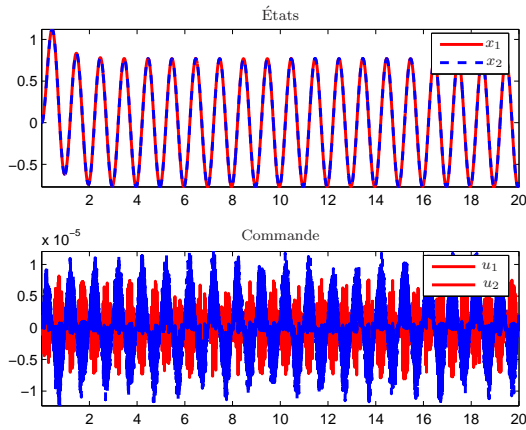


Fig. 2. Évolution des états et de la commande pour les deux systèmes. Les forces d'itération humaines sont  $F_1(t) = 2 \cdot \sin(2\pi t)$  et  $F_2 = 0$ .

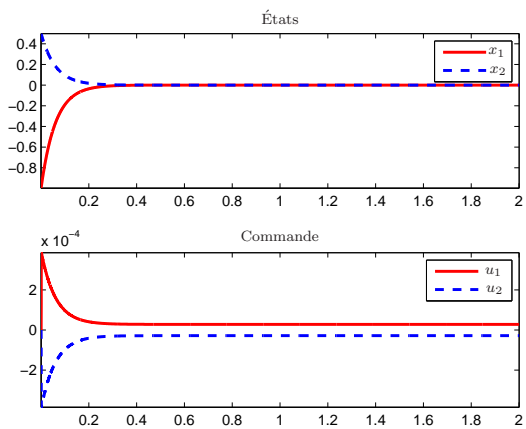


Fig. 3. Évolution des états et de la commande pour les deux systèmes. Les conditions initiales pour le maître sont  $x_1(0) = [-1; 1]$  et pour l'esclave  $x_2(0) = [0.5; -0.5]$ .

## VI. CONCLUSIONS

Cet article a proposé la synchronisation du mouvement de deux systèmes interconnectés à travers un réseau de communication. Une attention spéciale est accordée à la problématique du retard variable dans la chaîne de communication causé par la discrétisation. Deux méthodes de stabilisation ont été proposées : une par approximation polytopique et l'autre par une fonction de Lyapunov.

## RÉFÉRENCES

- [1] A. Alfí and M. Farrokhi. Force reflecting bilateral control of master—slave systems in teleoperation. *J. Intell. Robotics Syst.*, 52(2) :209–232, 2008.
- [2] P. Arcara and C. Melchiorri. Control schemes for teleoperation with time delay : A comparative study. *Robotics and Autonomous Systems*, 38(1) :49–64, 2002.
- [3] F. Blanchini. Set invariance in control. *Automatica*, 35 :1747–1467, 1999.
- [4] E.-K. Boukas. Discrete-time systems with time-varying time delay : Stability and stabilizability. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006 :42489, 2006.
- [5] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, June 1994.
- [6] J. Cheong and S.-I. Niculescu. Robust motion synchronization

- control for interconnected systems with human interaction. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008.
- [7] J. Cheong, S.-I. Niculescu, and C. Kim. Motion synchronization control of distributed multisubsystems with invariant local natural dynamics. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(2) :382–398, 2009.
- [8] M. B. G. Cloosterman, N. van de Wouw, W. M. P. H. Heemels, and H. Nijmeijer. Robust stability of networked control systems with time-varying network-induced delays. In *45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4980–4985, 2006.
- [9] M. B. G. Cloosterman, N. van de Wouw, W. M. P. H. Heemels, and H. Nijmeijer. Stability of networked control systems with large delays. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5017–5022, 2007.
- [10] E. Fridman. Stability of systems with uncertain delays : A new "complete" lyapunov-krasovskii functional. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5) :885–890, 2006.
- [11] E. Fridman and S. Niculescu. On complete lyapunov-krasovskii functional techniques for uncertain systems with fast-varying delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(3) :364–374, 2008.
- [12] R. Gielen, S. Oлару, and M. Lazar. On polytopic approximations as a modelling framework for networked control systems. In *NMPC Workshop*, Pavia, Italy, 2008.
- [13] E.G. Gilbert and K.T. Tan. Linear systems with state and control constraints, the theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 36 :1008–1020, 1991.
- [14] B. Hannaford. A design framework for teleoperators with kinesthetic feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(4) :426–434, 1989.
- [15] S. M. V. Lunel J. K. Hale. *Introduction to functional differential equations*. Springer, 1993.
- [16] V. Kharitonov. Complete type lyapunov-krasovskii functionals. In S. Niculescu and K. Gu, editors, *Advances in Time-Delay Systems*. Springer-Verlag, 2004.
- [17] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10) :1361–1379, 1996.
- [18] D. A. Lawrence. Stability and transparency in bilateral teleoperation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(5) :624–637, 1993.
- [19] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proceedings of the American Control Conference*, Boston, Massachusetts, 2004.
- [20] W. Lombardi, S. Oлару, and S.-I. Niculescu. Invariant sets for a class of linear systems with variable time-delay. In *Proceedings of the European Control Conference*, 2009.
- [21] W. Lombardi, S. Oлару, and S.-I. Niculescu. Robust invariance for a class of time-delay systems with repeated eigenvalues. In *Proceedings of the IFAC TDS*, 2009.
- [22] S. Oлару and S.-I. Niculescu. Predictive control for systems with delay and constraints. In *Proceedings of IFAC World Congress*, 2008.
- [23] P. Park. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4) :876–877, 1999.
- [24] J.P. Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10) :1667–1694, 2003.
- [25] J. Skaf and S. Boyd. Analysis and synthesis of state-feedback controllers with timing jitter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(3) :652–657, 2009.
- [26] Y. Yokokohji and T. Yoshikawa. Bilateral control of master-slave manipulators for ideal kinesthetic coupling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(5) :605–620, 1994.