

Identifiabilité et estimation des paramètres du modèle de combustion d'un moteur diesel

El Hassane Brahmī[†], Lilianne Denis-Vidal[‡], Zohra Cherfi[†], Vincent Talon^{*}

[†] Université Technologique de Compiègne France

brahmie@utc.fr, zohra.cherfi@utc.fr

[‡] USTL, bat M2, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

lilianne.denis-vidal@math-univ.lille1.fr

^{*} Technocentre Renault TCR RUC T 65 1 av du golf 78288 Guyancourt

vincent.talon@renault.com

Résumé— Cet article présente une méthode originale d'estimation de paramètres basée sur l'utilisation des relations obtenues lors de l'analyse d'identifiabilité par morceaux d'un modèle phénoménologique de combustion d'un moteur diesel. Ce modèle est utilisé pour le design, la validation et le pre-tuning des lois de contrôle du moteur. Une méthode d'estimation algèbro-différentielle en cascade est utilisée pour l'étude de l'identifiabilité. Cette recherche est faite en utilisant les relations liant l'entrée, la sortie et les paramètres du modèle. Ensuite ces relations sont transformées en utilisant des intégrales itérées combinées avec une estimation numérique originale de dérivées et une méthode de moindre carrés.

Mots-clés— identifiabilité, estimation de paramètres, distribution, estimation de dérivées, optimisation, modèle de Wiebe, combustion.

I. INTRODUCTION

L'utilisation de modèles de prédiction du comportement d'un système pour faire des choix techniques ou pour comprendre son fonctionnement est devenu très important. Ceci est particulièrement vrai en ce qui concerne l'industrie automobile; En effet le durcissement des normes européennes antipollution et la volonté de minimiser la consommation conduisent à recourir de plus en plus à la modélisation.

Un modèle de combustion double phase de Wiebe est retenu et étudié [9], [10]. Ce modèle correspond à un modèle phénoménologique qui a l'avantage d'être simple et de représenter le phénomène observable. Par ailleurs, le modèle mathématique correspondant a l'avantage d'être rapide d'exécution et permet des simulations en temps réel comme pour HIL (Hardware In the Loop) [1]. Par contre, le fait que ce ne soit pas un modèle physique rend impossible toute forme d'exploitation en dehors de la zone d'apprentissage. Cependant, pour qu'il puisse être utilisé de manière satisfaisante il doit être calibré, c'est à dire que l'on doit estimer les paramètres qui le composent.

Avant d'estimer des paramètres il faut faire une analyse d'identifiabilité [6]. L'identifiabilité appartient à la catégorie des problèmes inverses. C'est une question a priori : est ce que deux paramètres distincts conduisent à des sorties distinctes? Si la réponse est négative il ne sera pas possible de conduire l'estimation de manière satisfaisante sans des connaissances a priori supplémentaires. Il faut reconsidérer le modèle. L'élimination algèbro-différentielle permet d'établir les relations qui lient l'entrée, la sortie et les paramètres. Ces relations permettent d'étudier l'identifiabilité [3], mais elles conduisent, dans une certaine mesure,

à une procédure d'estimation des paramètres sans aucune connaissance a priori sur ceux-ci. Peu d'études utilisent de manière efficace ces relations compte tenu des données bruitées que l'on a en pratique. L'élimination différentielle nécessite d'avoir des fonctions régulières, ce qui n'est pas le cas pour notre modèle de combustion. Aussi, une élimination par morceaux sera conduite. Par ailleurs, l'emploi de l'intégration itérée permettra de réduire l'ordre des dérivées qui apparaissent dans certaines relations. Pour les autres, une méthode originale d'estimation de dérivées basées sur la théorie des distributions sera utilisée [5]. Il sera enfin montré, comment les relations qui résultent de ces transformations, permettent de construire une procédure d'estimation des paramètres, pour ce type de modèle. Cet article est organisé de la manière suivante. La partie 2 présente le modèle phénoménologique et le système mathématique qui en résulte. La partie 3 présente l'analyse d'identifiabilité. Certaines définitions sont rappelées et l'étude de l'identifiabilité par morceaux ainsi que les relations qui en résultent sont montrées. La partie 4 traite de la transformation de ces relations et donne une procédure efficace d'estimation de dérivées de signaux bruités. La partie 5 est dédiée aux procédures numériques : estimation des dérivées, des paramètres et présentation des résultats. Finalement dans la dernière partie nous concluons.

II. LE MODÈLE DE COMBUSTION DIESEL

Cette partie donne la description du modèle de combustion ainsi que sa formulation mathématique.

A. Le modèle phénoménologique

Le modèle de Wiebe deux phases permet de modéliser la combustion diesel. Le modèle de la chambre de combustion est basé sur le premier principe de la thermodynamique. La variation de l'énergie interne suit l'équation suivante :

$$\frac{dU}{d\theta} = dQ + dW + \sum_i h_i dm_i \quad (1)$$

avec

U : Energie interne [J]

dQ : Echange d'énergie avec l'extérieur [J/s]

dW : Travail avec l'extérieur [J/s]

h_i : Enthalpie spécifique [J/kg]

dm_i : Transfert massique [kg/s]

Dans le cas de la chambre de combustion, nous pouvons identifier :

- Les échanges d'énergie avec l'extérieur qui sont égaux aux pertes aux parois mais aussi à l'apport d'énergie dû à la combustion.
 - Le travail est celui du piston sur les gaz
 - Les échanges de matières sont les flux massiques à travers les soupapes de l'échappement et de l'admission.
- Nous pouvons résumer le principe de ce modèle par le schéma suivant :

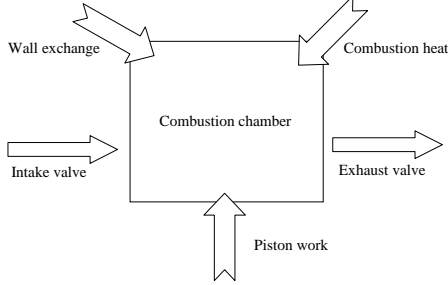


Fig. 1. illustration du modèle de combustion de Wiebe

Les phases de Wiebe représentent la combustion de pré-mélange et de diffusion. Ces deux combustions ont lieu chacune durant un cycle moteur. Ci-dessous nous décrivons rapidement le processus de combustion diesel.

1. Après l'admission et la compression des gaz, le carburant est injecté dans la chambre de combustion. Ce carburant y est supposé sous forme vaporisée dans le cas de Wiebe. La compression surchauffe le carburant. Ce réchauffage entraîne l'allumage. Ceci marque le début des deux flammes de combustion de pré-mélange et de diffusion.

2. La première phase représente la flamme de pré-mélange. A ce stade, l'air et le carburant sont parfaitement mélangés. Quand l'instant de l'allumage est atteint, une combustion massique intervient. Il y a dans ce cas une multitude de points d'allumage dans la chambre de combustion. Nous disons que la combustion est contrôlée par la chimie.

3. La seconde phase représente la flamme de diffusion. Dans ce cas, la transformation est infiniment rapide à cause de l'augmentation de la température due à la flamme de pré-mélange. La combustion est alors contrôlée par la vitesse de fusion de l'air et du carburant. Ceci justifie le terme de "flamme de diffusion".

Le modèle de Wiebe permet ainsi de modéliser ces deux flammes. Nous avons besoin d'associer à ce modèle de dégagement de chaleur, le travail du piston sur les gaz et les échanges aux parois.

- Le travail dans sa forme traditionnelle $-P.dV$, où P_{cyl} est la pression dans la chambre et dV est la variation de volume
- Les échanges avec les parois sont de la forme $h.S.(T - T_w)$, où H, S, T et T_w sont respectivement, un coefficient d'échange, la surface d'échange, la température des gaz dans la chambre de combustion et la température aux parois.

Avec (U) l'énergie interne et (M) la masse dans la chambre, nous pouvons calculer la pression et la température des gaz. Cette température est obtenue grâce à la première loi de Joules :

$U = C_v.M.T$, C_v = Capacité calorifique pour un volume constant [$J/kg/K$], T = température [K].

La pression est calculée avec la loi des gaz parfaits :

$$P_{cyl} = \frac{M.r.T}{V}$$

où :

P_{cyl} : pression cylindre [Pa]

r : constante des gaz parfaits [$J/kg/K$]

V : volume [m^3]

B. Le modèle mathématique

Ce modèle peut être décrit comme suit.

$$(\Sigma_{p,\nu}) = \begin{cases} \frac{dX}{d\theta} = F(X, \theta, p) + C\nu(\theta) \\ X(\theta_0) = X_0 \\ Y = h(X, \theta) \end{cases} \quad (2)$$

X représente le vecteur d'état dans le modèle décrit dans la partie II - A :

$$-X = (M, U)^t, (M, U) \in (\mathbb{R}^+)^2$$

$-Y = X$ représente la sortie $\theta \in [0, \Theta]$

$-p = (p_1, \dots, p_l) \in \mathbb{E}$ représente le vecteur des paramètres, où \mathbb{E} est l'ensemble des paramètres admissibles qui est une partie de $(\mathbb{R}^+)^l$, $l \in \mathbb{N}$.

Pour le modèle décrit dans la partie II - A le vecteur des paramètres est : $p = (\alpha_{pp}, f_{pre}, \delta_p, m_p, \delta_d, m_d)$ et $p \in \mathbb{E} \subset (\mathbb{R}^+)^6$

$-\nu$ est une entrée créneau,

$$\nu(\theta) = Q_{injmax} (H(\theta - ADV) - H(\theta - ADV - \theta_{inj}))$$

avec $Q_{injmax} > 0$ et $\theta_{inj} > 0$. Nous notons Ω_{ad} l'ensemble de ces entrées.

H est la fonction de Heaviside :

Nous posons :

$$-C = (1, C_{carb}T_{carb} - L_{vap})^t$$

$$-F = (F_1, F_2)^t, \text{ avec :}$$

$$-F_1(X, \theta, p) = 0 \text{ et}$$

$$-F_2(X, \theta, p) =$$

$$k_1(U) - Q_{parois}(\alpha_{pp}, X) + K\omega(f_{pre}f_1(p, \theta)H(\theta - ADV_p)) + K\omega((1 - f_{pre})f_2(p, \theta)H(\theta - ADV_d))$$

où :

$$-k_1(U) = -(\gamma - 1) \left(\frac{dU}{d\theta} - \frac{U}{P_{cyl}} \frac{dP_{cyl}}{d\theta} \right) - K = PCI.M_{inj}.$$

$$-f_1(p, \theta) = -\frac{d}{d\theta} \left[\exp \left(-\frac{\alpha_p}{\Delta_p^{m_p+1}} (\theta - ADV_p)^{1+m_p} \right) \right]$$

$$-f_2(p, \theta) = -\frac{d}{d\theta} \left[\exp \left(-\frac{\alpha_d}{\Delta_d^{m_d+1}} (\theta - ADV_d)^{1+m_d} \right) \right]$$

$-Q_{parois}(\alpha_{pp}, X) = \alpha_{pp}S_p k_2(M, U)$ où S_p est une fonction connue.

$$-k_2(M, U) = \left(\frac{(g-1)^{\frac{2}{3}}}{C^{\frac{1}{3}}} \frac{U}{M^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{(g-1)U}{C_v M} - T_p \right) (1 + 1, 24V_{pmoy}) \right)$$

est une fonction connue de l'état et α_{pp} est un paramètre à identifier.

Ici nous supposons que :

$$-H_1 : 0 < ADV < ADV_p < ADV_d < \Theta$$

$$-H_2 : k_2(M, U) \neq 0$$

III. IDENTIFIABILITÉ

A. Définitions

Nous rappelons ici quelques définitions où nous posons $p = (p_1, \dots, p_l)$.

Définition III.1 : Le paramètre p_i est globalement identifiable si, pour tout $(\hat{p}, \tilde{p}) \in \mathbb{E}$ et $\hat{p}_i \neq \tilde{p}_i$, il existe une entrée ν telle que les systèmes $\Sigma_{\hat{p}, \nu}$ et $\Sigma_{\tilde{p}, \nu}$ conduisent à des sorties différentes.

Définition III.2 : Le modèle est dit globalement identifiable si tous les paramètres sont globalement identifiables.

B. Analyse d'identifiabilité

Dans cette section, une étude d'identifiabilité en série est proposée. Elle utilise successivement des relations qui lient des fonctions connues et des paramètres. Les principaux résultats d'identifiabilité sont donnés et établis dans la suite

Théoreme III.1 : Le modèle de combustion diesel $\Sigma_{p, \nu}$ est globalement identifiable.

Ce résultat est une conséquence des propositions suivantes :

Proposition III.1 : Les relations entrée-sortie-paramètres sont données successivement par :

1. If $\theta \in J_1 = [0, ADV]$

$$\frac{dU}{d\theta}(\theta, p) = k_1(U(\theta, p)) - \alpha_{pp} S_p k_2(M(\theta, p), U(\theta, p)) \quad (3)$$

2. If $\theta \in J_2 = [ADV_p, ADV_d]$

$$\left(\left(\frac{dy_1}{d\theta} \right)^2 - y_1 \frac{d^2 y_1}{d\theta^2} \right) (\theta - ADV_p) = -m_p \frac{dy_1}{d\theta} y_1 - f_{pre} \frac{d^2 y_1}{d\theta^2} (\theta - ADV_p) + m_p \cdot f_{pre} \frac{dy_1}{d\theta} \quad (4)$$

$$\frac{dy_1}{d\theta} = -\frac{\alpha_p}{\Delta \theta_p^{m_p+1}} z_2 (m_p + 1) (y_1 + f_{pre}) \quad (5)$$

3. If $\theta \in J_3 = [ADV_d, \Theta]$

$$\left[\left(\frac{dy_2}{d\theta} \right)^2 - (1 - y_2 - f_{pre}) \frac{d^2 y_2}{d\theta^2} \right] (\theta - ADV_d) = -m_d \frac{dy_2}{d\theta} (y_2 - 1 - f_{pre}) \quad (6)$$

$$\frac{dy_2}{d\theta} = -\frac{\alpha_d}{\Delta \theta_p^{m_d+1}} z_4 (m_d + 1) (y_2 + f_{pre} - 1) \quad (7)$$

où :

$$\begin{aligned} -y_1(M, U, p) &= \\ \frac{dU}{d\theta} - k_1(U) - \alpha_{pp} S_p k_2(M, U) - Q_{in jmax} (C_{carb} T_{carb} - Lvap) & \\ -y_2(M, U, p) &= y_1(M, U, p) + K \omega f_{pre} f_1(\theta, p) \\ -z_2(\theta, p) &= (\theta - ADV_p)^{m_p} \text{ et} \\ -z_4(\theta, p) &= (\theta - ADV_d)^{m_d} \end{aligned}$$

Proposition III.2 : $Y(\theta, p)$ représente la sortie du système $\Sigma_{p, \nu}$. Alors pour tout $(\hat{p}, \tilde{p}) \in \mathbb{E}$ si $Y(\theta, \hat{p}) = Y(\theta, \tilde{p})$ pour tout θ de $[0, \Theta]$ et p dans Ω_{ad} alors successivement $\hat{\alpha}_{pp} = \tilde{\alpha}_{pp}$, $(\hat{m}_p, \hat{f}_{pre}) = (\tilde{m}_p, \tilde{f}_{pre})$, $\hat{\Delta \theta}_p = \tilde{\Delta \theta}_p$, $\hat{m}_d = \tilde{m}_d$, $\hat{\Delta \theta}_d = \tilde{\Delta \theta}_d$

Preuve de ces deux propositions :

Dans la suite, nous supposons que $Y(\theta, \hat{p}) = Y(\theta, \tilde{p})$ pour tout θ dans $[0, \Theta]$ et p dans Ω_{ad}

1) Relation (3) et identifiabilité globale de α_{pp} :

-l'entrée ν est égale à zéro sur $[0, ADV]$, la fonction $f_1(p, \theta) H(\theta - ADV_p) + (1 - f_{pre}) f_2(p, \theta) H(\theta - ADV_d)$ aussi. Ceci conduit à (3). Les sorties sont égales sur $[0, \Theta]$ et donc sur $[0, ADV]$. (3) peut être utilisé et donne : $(\hat{\alpha}_{pp} - \tilde{\alpha}_{pp}) S_p k_2(M(\theta, p), U(\theta, p)) = 0$ pour tout θ dans $]0, ADV[$ et sous l'hypothèse $k_2(M(\theta, p), U(\theta, p)) \neq 0$ ceci

conduit à $\hat{\alpha}_{pp} = \tilde{\alpha}_{pp}$.

2) Relation (4) et (5) et identifiabilité globale de m_p et f_{pre} :

Maintenant nous considérons $]ADV_p, ADV_d[$ et notons $z_1 = \exp\left(-\frac{\alpha_p}{\Delta \theta_p^{m_p+1}} (\theta - ADV_p)^{1+m_p}\right)$ et

$$z_2(\theta, p) = (\theta - ADV_p)^{m_p}.$$

Si $\theta \in [ADV_p, ADV_d[$ la fonction $f_2(p, \theta) H(\theta - ADV_d)$ est égale à zéro, en utilisant les notations de la proposition (III.1) le système suivant est obtenu :

$$(S1) = \begin{cases} y_1 = f_{pre} (1 - z_1) \\ \frac{dz_1}{d\theta} = -\frac{\alpha_p}{\Delta \theta_p^{m_p+1}} z_2 (m_p + 1) z_1 z_2 \\ \frac{dz_2}{d\theta} (\theta - ADV_p) = m_p z_2 \end{cases} \quad (8)$$

Nous dérivons la première équation du système (8) par rapport à θ , l'équation résultante combinée à cette même équation donne z_1 et $\frac{dz_1}{d\theta}$ comme fonction de y_1 et $\frac{dy_1}{d\theta}$. Puis en substituant les résultats dans la deuxième équation du système S_1 , z_2 est obtenu comme fonction de y_1 et $\frac{dy_1}{d\theta}$ et ainsi la relation (5) est obtenue. Ensuite en substituant les résultats dans la troisième équation de (S_1) , la relation (4) est obtenue. Ce résultat a été vérifié avec le package Diffalg dans MAPLE 11 [2] qui est une collection de commandes permettant de manipuler des systèmes d'équations et inéquations différentielles polynomiales (ODEs and PDEs). L'élimination différentielle fait partie de ses fonctionnalités.

Les sorties sont égales sur $[0, \Theta]$ donc sur $[0, ADV_p]$ et avec le résultat $\hat{\alpha}_{pp} = \tilde{\alpha}_{pp}$ obtenu dans 1) nous avons :

$y_1(M, U, \hat{p}) = y_1(M, U, \tilde{p})$, $\frac{dy_1}{d\theta}(M, U, \hat{p}) = \frac{dy_1}{d\theta}(M, U, \tilde{p})$ et $\frac{d^2 y_1}{d\theta^2}(M, U, \hat{p}) = \frac{d^2 y_1}{d\theta^2}(M, U, \tilde{p})$ pour θ dans $]ADV_p, ADV_d[$. En utilisant (4) et θ dans $]ADV_p, ADV_d[$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} -(\hat{m}_p - \tilde{m}_p) \frac{dy_1}{d\theta} y_1 - (\hat{f}_{pre} - \tilde{f}_{pre}) \frac{d^2 y_1}{d\theta^2} y_1 (\theta - ADV_p) + \\ (\hat{m}_p f_{pre} - \tilde{m}_p f_{pre}) \frac{dy_1}{d\theta} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Considérons : $D(\theta, y_1)$ le Wronskien de $\left\{ \frac{dy_1}{d\theta} y_1, \frac{d^2 y_1}{d\theta^2} y_1 (\theta - ADV_p), \frac{dy_1}{d\theta} \right\}$

L'équation (9) est deux fois dérivable par rapport à θ sur $]ADV_p, ADV_d[$, ce qui donne :

$$D(\theta) \cdot ((\hat{m}_p - \tilde{m}_p), \hat{f}_{pre} - \tilde{f}_{pre}, \hat{m}_p \hat{f}_{pre} - \tilde{m}_p \tilde{f}_{pre})^t = 0 \quad (10)$$

D n'est pas identiquement nul sur $]ADV_p, ADV_d[$, (10) conduit à $\hat{m}_p = \tilde{m}_p$ et $\hat{f}_{pre} = \tilde{f}_{pre}$

3) Identifiabilité globale de $\Delta \theta_p$:

Puisque $\hat{m}_p = \tilde{m}_p$ nous avons $z_2(\theta, \hat{p}) = z_2(\theta, \tilde{p})$ et, en utilisant (5) nous obtenons : $\left(\frac{-\alpha_p}{\Delta \theta_p^{m_p+1}} - \frac{-\alpha_p}{\tilde{\Delta \theta}_p^{m_p+1}} \right) z_2 (m_p +$

$1) (y_1 + f_{pre}) = 0$. Ceci conduit à $\frac{-\alpha_p}{\Delta \theta_p^{m_p+1}} = \frac{-\alpha_p}{\tilde{\Delta \theta}_p^{m_p+1}}$ et

puisque $\hat{m}_p = \tilde{m}_p$, nous obtenons $\hat{\Delta \theta}_p = \tilde{\Delta \theta}_p$

4) Relation (6) et (7) et identifiabilité globale de m_d :

Maintenant, nous considérons $\theta \in [ADV_p, \Theta]$ et notons $z_3 = \exp\left(-\frac{\alpha_d}{\Delta \theta_p^{m_d+1}} (\theta - ADV_d)^{1+m_d}\right)$ et

$$z_4(\theta, p) = (\theta - ADV_d)^{m_d}.$$

Alors en utilisant les notations données dans la proposition III.1 le système suivant est obtenu :

$$(S2) = \begin{cases} y_2 = (1 - f_{pre})(1 - z_3) \\ \frac{dz_3}{d\theta} = -\frac{\alpha_d}{\Delta\theta_p^{m_d+1}} z_2(m_d + 1) z_3 z_4 \\ \frac{dz_4}{d\theta}(\theta - ADV_p) = m_p z_4 \end{cases} \quad (11)$$

En utilisant la même procédure que précédemment c'est à dire en éliminant successivement z_4 et z_3 , nous obtenons (6) et (7).

Les sorties sont égales sur $[0, \Theta]$ et puisque $\hat{\alpha}_{pp} = \tilde{\alpha}_{pp}$, $\hat{m}_p = \tilde{m}_p$ et $\hat{f}_{pre} = \tilde{f}_{pre}$ on a $y_2(M, U, \hat{p}) = y_2(M, U, \tilde{p})$ ainsi que l'égalité de leurs dérivées successives (par rapport à θ) sur $]ADV_d, \Theta[$

En utilisant (6) $\theta \in]ADV_d, \Theta[$ nous obtenons : $-(\hat{m}_d - \tilde{m}_d) \frac{dy_2}{d\theta} (y_2 - 1 - f_{pre}) = 0$. Ceci conduit à $\hat{m}_d = \tilde{m}_d$

5) Identifiabilité globale de $\Delta\theta_d$:

Puisque $\hat{m}_d = \tilde{m}_d$, $z_4(\theta, \hat{p}) = z_4(\theta, \tilde{p})$ alors l'équation (7), mène à : $(\frac{-\alpha_d}{\Delta\theta_d^{m_d+1}} - \frac{-\alpha_d}{\Delta\theta_d^{m_d+1}}) z_4(m_d + 1)(y_2 + f_{pre} - 1) = 0$. Ce qui conduit à $\frac{-\alpha_d}{\Delta\theta_d^{m_d+1}} - \frac{-\alpha_d}{\Delta\theta_d^{m_d+1}}$ et $\widehat{\Delta\theta}_d = \widetilde{\Delta\theta}_d$. L'identifiabilité globale du modèle est ainsi montrée.

IV. INTÉGRATION ITÉRÉE, RELATIONS ENTRÉE-SORTIE-PARAMÈTRES ET ESTIMATION DE DÉRIVÉES.

Le but de cet article est de donner une procédure efficace pour l'estimation numérique de paramètres. Cette procédure commence avec les relations entrée-sortie-paramètres. Ces relations peuvent contenir des dérivées de premier ordre mais aussi des dérivées d'ordre supérieur. Les observations étant bruitées, estimer les dérivées devient un problème mal posé. Pour éviter ceci une approche en deux étapes est utilisée. C'est ce que nous décrivons dans les deux paragraphes qui suivent.

A. Intégration itérée et relations entrée-sortie-paramètres

La première étape consiste à intégrer aussi loin que possible, les relations entrée-sortie-paramètres en utilisant des intégrations par partie et des intégrales itérées avec la formule de Cauchy :

$\int_a^x \dots \int_a^t f(u) du = \int_a^x f(t) \frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!} dt$. Ceci conduit à des relations intégro-différentielles. Nous appliquons cette démarche à notre modèle de combustion en considérant les relations (3),(4),(5),(6),(7). Ce qui donne les résultats suivants.

Proposition IV.1 : Notons $Y_i(\theta) = y_i(M(\theta, p), U(\theta, p))$ pour $i = 1, 2$ alors les relations intégro-différentielles entrée-sortie-paramètres sont données par :

1. Si $\theta \in [0, ADV]$

$$U(\theta, p) - U_0 - \int_0^\theta k_1(U(t, p)) dt = \alpha_{pp} \int_0^\theta S_p k_2(X(t, p)) dt \quad (12)$$

2. Si $\theta \in [ADV_p, ADV_d]$

$$-\frac{m_p + 1}{2} I_1(\theta) + m_p \cdot f_{pre} I_3(\theta) = R_1(\theta) \quad (13)$$

$$-\frac{\alpha_p(m_p + 1)}{\Delta\theta_p^{m_p+1}} I_4(\theta) = I_3(\theta) \quad (14)$$

3. Si $\theta \in [ADV_d, \Theta[$

$$-\frac{m_d + 1}{2} I_5(\theta) = R_2(\theta) \quad (15)$$

$$-\frac{\alpha_d(m_d + 1)}{\Delta\theta_d^{m_d+1}} I_5(\theta) = R_3(\theta) \quad (16)$$

Avec :

$$I_1(\theta) = \int_{ADV_p}^\theta Y_1^2(t) dt; \quad I_2(\theta) = -2 \int_{ADV_p}^\theta Y_1(t) dt + Y_1(\theta) (\theta - ADV_p).$$

$$I_3(\theta) = \int_{ADV_p}^\theta Y_1(t) dt$$

$$R_1(\theta) = -\frac{Y_1^2(\theta)}{2} (\theta - ADV_p) + \frac{1}{2} \int_{ADV_p}^\theta Y_1^2(t) dt + \int_{ADV_p}^\theta (\theta - t)(t - ADV_p) \left(\frac{dY_1}{dt}(t)\right)^2 dt; \quad I_4(\theta) = \int_{ADV_p}^\theta (\theta - t)(t - ADV_p)(Y_1(t) + f_{pre}) dt;$$

$$I_5(\theta) = \int_{ADV_d}^\theta Y_1^2(t) dt + 2(f_{pre} + 1) \int_{ADV_d}^\theta Y_1(t) dt$$

$$R_2(\theta) = \int_{ADV_d}^\theta (\theta - t)(t - ADV_d)(Y_1(t) + f_{pre} - 1) dt; \quad \text{et}$$

$$R_3(\theta) = \int_{ADV_d}^\theta Y_2(t) dt$$

Ces relations seront utilisées pour construire notre procédure d'estimation. Cependant, il reste des dérivées premières et secondes de U dans certains termes de ces relations, que nous devons estimer.

B. Une méthode pour estimer les dérivées

B.1 Description de la méthode

La deuxième étape consiste en une méthode originale d'estimation de dérivées basée sur la théorie des distribution proposée dans ([5]). Dans cette même référence une comparaison avec la méthode développée dans [4] a été effectuée. Nous signalons que notre application ne nécessite que l'utilisation de fonctions tests. Ces fonctions sont indéfiniment différentiables avec un support compact. Dans cet article, les fonctions tests sont construites à partir de la fonction suivante :

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1 \end{cases}$$

qui est indéfiniment différentiable et à support dans $[-1; 1]$. Les autres fonctions tests ψ_{I_ϵ} sont générées à partir de $\psi(x)$, par translation et changement d'échelles. Ce qui permet d'obtenir ψ_{I_ϵ} dont le support est inclus dans I_ϵ . Elles jouent le rôle de fenêtres glissantes. La méthode est basée sur la combinaison d'un développement de Taylor tronqué du signal et de fonctions tests.

L'utilisation du développement de Taylor tronqué est classique différences finies. Ce qui change, c'est la manière de l'employer. Considérons une fonction analytique y dans $]a; b[\subset \mathbb{R}$. $\theta_0 \in I_\epsilon \subset]a, b[$, telle que la longueur de I_ϵ soit ϵ . Le développement de Taylor tronqué y_N de y , qui est une approximation de y quand ϵ tend vers zéro, est donné par : $y_N(\theta) = \sum_{n=0}^N y^{(n)}(\theta_0) \frac{(\theta - \theta_0)^n}{n!}$ et pour $k = 1, \dots, N$

$$y(k)_N(\theta) = \sum_{n=k}^N y^{(n)}(\theta_0) \frac{(\theta - \theta_0)^{n-k}}{(n-k)!} \quad (17)$$

Alors, en multipliant cette égalité par ψ_{I_ϵ} et en intégrant

sur I_ϵ , puisque le support de ψ_{I_ϵ} est inclus dans I_ϵ et en utilisant une intégration par partie, le système linéaire triangulaire suivant est obtenu : pour $k = 1, \dots, N$

$$\sum_{n=k}^N y^{(n)}(\theta_0) \alpha_{n-k} = (-1)^k \int_{I_\epsilon} y_N(t) \psi_{I_\epsilon}^{(k)}(t) dt \quad (18)$$

Avec $\alpha_{n-k} = \int_{I_\epsilon} \frac{(t-\theta_0)^{n-k}}{(n-k)!} \psi_{I_\epsilon}^{(k)} dt$ les inconnues sont $y^k(\theta_0)$ pour $k = 0, \dots, N$ et le déterminant du système est α_0^N qui n'est pas égal à zéro. Alors $y^k(\theta_0)$ pour $k = 0, \dots, N$ peut être obtenu comme solution de ce système. Si on remplace y_N par y dans (18) une estimation numérique $y_{\epsilon, N}^k(\theta_0)$ de $y^k(\theta_0)$ est obtenue.

B.2 La méthode et les données bruitées

Considérons un signal expérimental soumis à un bruit additif $\eta(t)$ qui peut se décomposer de la manière suivante : ([4]) : $\eta(t) = \eta_0(t) + \delta$, où $\eta_0(t)$ est un bruit de moyenne nulle et δ est une constante égale à la moyenne de $\eta(t)$.

Alors ,
 $\int_{I_\epsilon} \eta(t) \psi_{I_\epsilon}^{(k)}(t) dt = \int_{I_\epsilon} \eta_0(t) \psi_{I_\epsilon}^{(k)}(t) dt + \delta \int_{I_\epsilon} \psi_{I_\epsilon}^{(k)}(t) dt = \int_{I_\epsilon} \eta_0(t) \psi_{I_\epsilon}^{(k)}(t) dt$ car le support de $\psi_{I_\epsilon}^{(k)}$ est inclus dans I_ϵ . L'intégration et l'utilisation d'une fonction test avec un support adéquat réduit l'effet des bruits non structurés qui correspondent aux perturbations haute fréquence et annule les bruits structurés.

Cette méthode d'estimation de dérivée réduit donc le bruit additif d'un signal soumis à une perturbation.

C. Méthodologie d'estimation des paramètres du Modèle de Wiebe

Dans cette section, nous présentons les deux approches utilisées pour l'estimation des paramètres du modèle de Wiebe à double phases.

Ces deux approches possèdent une étape commune qui consiste à donner une première estimation globale des paramètres par morceaux, en utilisant les équations intégrodifférentielles de la proposition IV.1 combinées avec la technique d'estimation des dérivées de la section IV – B. La différence entre ces deux approches réside dans le choix de la méthode d'optimisation utilisée pour raffiner l'estimation des paramètres.

Remarque IV.1 : Pour l'étude numérique nous avons utilisé P_{cyl} et M de préférence à M et U puisque les données observées dont on dispose est la quantité P_{cyl} .

D'autre part, nous utilisons une quantité thermodynamique de nature différente de P_{cyl} pour construire notre fonction coût. Ceci est justifié par le fait que cette quantité est en étroite relation avec certains paramètres qu'on cherche à estimer ce qui permettra l'amélioration de l'estimation. cette quantité thermodynamique est $\frac{dQ_{cyl}}{d\theta}$ les dégagements de chaleur qu'on peut obtenir à partir de la pression cylindre P_{cyl} en utilisant la loi du taux de dégagement de chaleur donnée par :

$$\frac{dQ_{cyl}}{d\theta} = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_{cyl} \cdot \frac{dV}{d\theta} + \frac{1}{\gamma-1} V \cdot \frac{dP_{cyl}}{d\theta} \quad (19)$$

C.1 Utilisation des équations intégrodifférentielles

L'estimation du vecteur des paramètres $p = (\alpha_{pp}, f_{pre}, \Delta\theta_p, m_p, \Delta\theta_d, m_d)$, est obtenue d'une façon

successive. En effet, Nous estimons tous les paramètres qui figurent dans les équations intégrodifférentielles de l'intervalle J_1 . nous injectons cette connaissance de ces paramètres afin d'estimer les paramètres existant dans l'intervalle J_2 . La même procédure est appliquée pour estimer les paramètres de l'intervalle J_3 . Cela se traduit mathématiquement par la résolution des 3 problèmes des moindres carrés suivants :

$$\min_{\gamma_{1,l}(\theta), \dots, \gamma_{d_l,l}(\theta)} \sum_{k=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^{d_l} A_{k,j,l} \gamma_{j,l}(\theta) - b_{k,l} \right)^2, l \in \{1, 2, 3\} \text{ avec}$$

- d_l est le nombre de bloc de paramètres existant dans l'intervalle J_l .

- $A_{k,j,l}$ est le coefficient correspondant à chaque bloc de paramètres sur l'intervalle J_l , $l = 1, 2, 3$. l'expression de ces coefficients est donnée par les équations de la proposition IV.1

- $b_{k,l}$ le second membre des équations qui correspond à chaque intervalle J_l .

Ces problèmes étant linéaires en les blocs de paramètres sont résolus par la méthode QR

première approche :

La première approche consiste à utiliser la méthode d'optimisation de Levenberg-Marquardt en utilisant la première estimation obtenue à partir des équations intégrodifférentielles comme un point initial. Elle consiste à minimiser un critère de type moindres carrés, ce critère est construit sous forme d'une combinaison linéaire des erreurs quadratiques commises sur la reconstruction de la pression cylindre P_{cyl} et le dégagement de chaleur $\frac{dQ_{cyl}}{d\theta}$, d'où le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{\theta} [\omega_1 F_1(\theta) + \omega_2 F_2(\theta)] \\ \theta \in [a_j, b_j]^6 \text{ avec } a_j \text{ and } b_j > 0 \end{cases} \quad (20)$$

où :

- a_j et b_j sont les bornes inférieures et supérieure de chaque paramètres j .

$$-F_1 = \sum_{i=1}^N \left(\hat{P}_{cyl}(\theta_i, p) - P_{cyl}(\theta_i) \right)^2$$

$$-F_2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\hat{Q}_{cyl}(\theta_i, p)}{d\theta} - \frac{dQ_{cyl}}{d\theta} \right)^2$$

- $\hat{P}_{cyl}(\theta_i, p)$ et $\frac{d\hat{Q}_{cyl}(\theta_i, p)}{d\theta}$ sont les solutions du modèle correspondantes à p .

- $P_{cyl}(\theta_i)$ et $\frac{dQ_{cyl}(\theta_i)}{d\theta}$ sont les signaux mesurés ou déductibles.

Deuxième approche :

Dans ce cas, on a considéré une optimisation multi-objectifs pour estimer les paramètres du modèle. Cela est justifié par le fait que la fonction coût à minimiser est une somme pondérée de deux critères de moindres carrés portant sur les variables d'états P_{cyl} et $\frac{dQ_{cyl}}{d\theta}$. Le choix de ces pondérations peut influencer l'estimation des paramètres et la bonne reconstruction des variables d'états observées. Cependant fixer la valeur de ces pondérations est trop difficile et demande des connaissances a priori sur le phénomène physique qu'on ne possède pas.

Pour estimer les paramètres du modèle, l'algorithme NSGA-II proposé par Deb [7], [8] est utilisé pour résoudre le problème d'optimisation multi-objectif suivant :

$$\begin{cases} \min_{\theta} (F_1, F_2) \\ \theta \in [a_j, b_j]^6 \text{ avec } a_j \text{ and } b_j > 0 \end{cases} \quad (21)$$

- a_j et b_j sont ,dans ce cas , obtenus à partir des résultats de la méthode des équations intégro-différentielles.

C.2 Résultats

Dans cette section, les résultats numériques obtenus en utilisant les deux méthodes précédentes sont présentés :
-dans le tableaux 1 sous forme de l'erreur relative commise pour reconstruire les courbes expérimentales.

-dans les figures 2 et 3, on représente les sorties expérimentales et reconstruites correspondant à la première et la deuxième méthode.

Les résultats obtenus en combinant l'estimation globale des paramètres suivie par une méthode d'optimisation locale semble intéressante. En effet, elle a permis d'avoir de bons résultats en termes de précision (la valeur de l'erreur relative est petite) et surtout en terme de temps d'exécution. Par contre, l'obtention d'un bon résultat par cette méthode est fortement liée à la première estimation fournie par la méthode globale et dépend aussi de la valeur attribuée aux pondérations de la fonction objectif du problème d'optimisation.

La deuxième méthode a permis d'améliorer les résultats donnés par la première méthode en terme de précision (une erreur relative plus petite) mais au détriment d'un temps considérable d'exécution de l'algorithme. Ce temps est dû au fait que l'algorithme génétique évalue ($3 * N * M$) fois la valeur de la fonction objective, où M est la taille de la population et N est le nombre d'itérations. D'autre part, la qualité des résultats de cette méthode n'est pas fortement liée à la première estimation fournie par la méthode globale et permet de résoudre le problème de fixation des pondérations.

V. CONCLUSION

Dans cet article, nous proposons une preuve de l'identifiabilité par morceaux du modèle de combustion de Wiebe à double phases. Les relations entrée-sortie-paramètres issues de l'étape de l'identifiabilité ont été exploitées d'une façon originale pour mener l'étape de l'estimation des paramètres du modèle. Ces relations contiennent des dérivées supérieures des observations qui sont souvent bruitées. Cela constitue un réel problème pour obtenir une estimation efficace des paramètres. Pour y faire face, des intégrations successives de ces relations sont considérées et combinées avec une méthode d'estimation de dérivées basée sur les distributions. Ceci permet de réduire les dérivées d'ordre supérieur et de filtrer le bruit. Cette estimation est utilisée comme point initial pour un algorithme d'optimisation local et un algorithme d'optimisation multi-objectifs afin d'améliorer les résultats. Cette méthodologie a prouvé son efficacité et a donné des résultats satisfaisants qui représentent bien les observations réelles.

méthode	(e.r) de P_{cyl}	(e.r) de dQ_{cyl}
GM+L.M	0.0021	0.13
GM+NSGA.II	0.0011	0.0617

TABLE I

ERREUR RELATIVE(E.R) DE LA RECONSTRUCTION DES SORTIES.

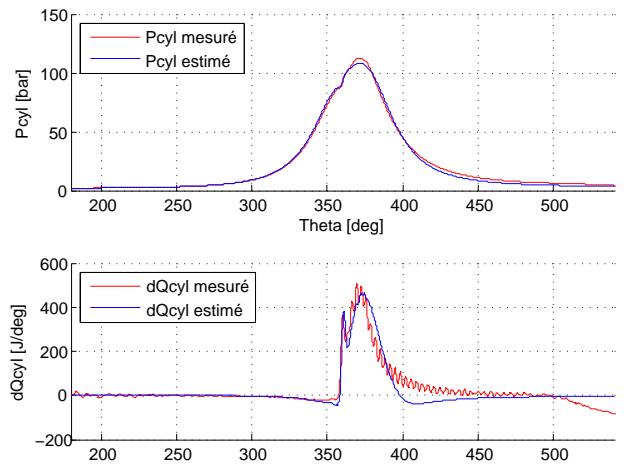


Fig. 2. Reconstruction des signaux mesurés en utilisant GM+L.M

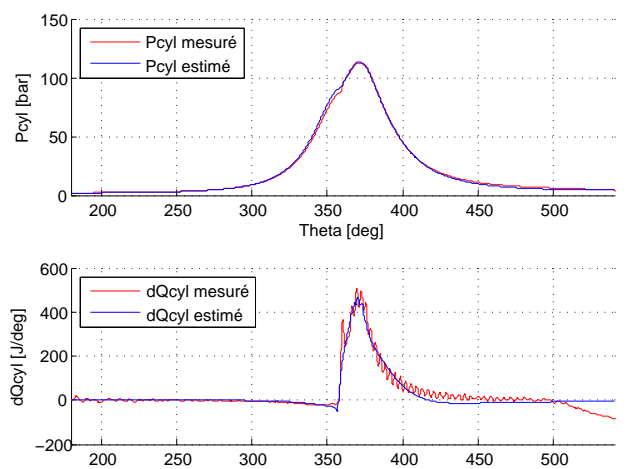


Fig. 3. Reconstruction des signaux mesurés en utilisant GM+NSGA.II

RÉFÉRENCES

- [1] Gehring, J. Schutte, H. A Hardware-In-The-Loop Test Bench for the Validation of Complex Ecu Networks, SAE paper 2002-01-0801.
- [2] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, M. Petitot, "Computing representations for the radicals of a finitely generated differential ideals" , *Technical report, LIFL*, University of Lille I, 1997.
- [3] L. Denis-Vidal, G. Joly-Blanchard, C. Noiret, "System identifiability (symbolic computation) and parameter estimation (numerical computation)", *Numerical Algorithms*, 34, pp 282-292 (2003)
- [4] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramirez. Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples, in algebraic methods in flatness, signal processing and state estimation H. Sira-Ramirez, G. Silva-Navarro (Eds), Editorial Lagares, Mexico, 2003, pp1-21.
- [5] N. Verdière, L. Denis-Vidal, G. Joly-Blanchard "Distributions et estimation de dérivées.", *Proc. CIFA*, Bucarest, sept 2008
- [6] E. Walter, "Identifiability of state space models", *Lecture Notes Biomath*, **46**, 1982.
- [7] Deb, K. and Agrawal, S. and Pratap, A. A fast Elitist non-dominated sorting Genetic Algorithm for Multi-objective optimization : NSGA-II, In Proceedings of the 6th Conference on Parallel Problem Solving from Nature, Springer Verlag pp. 849-858 2000 .
- [8] Deb, K. and Agrawal, R.W. Simulated Binary Crossover for Continuous Search Space. *Complex Systems*, vol. 9, pp. 115-148 ,1995.
- [9] Talent, V. Modélisation 0-1D des Moteurs à allumage commandé. *Thèse de l'Université d'Orléans*, 2004.
- [10] Jain, T. and Higelin, P. Modélisation du cycle moteur, Moteur à allumage par compression. *Techniques de l'ingénieur BM 2 516*, 2001.