

Recalage de modèle numérique par inférence Bayésienne

Jérôme ANTONI¹, Erliang ZHANG¹, Pierre FEISSEL¹

¹Laboratoire Roberval,
UMR 6253 – Université de Technologie de Compiègne
Centre de Recherche de Royallieu, BP20529, 60205 Compiègne, France.
antoni@utc.fr, erliang.zhang@utc.fr

Résumé— Le recalage de modèle (terminologie propre à la dynamique des structures) consiste à identifier les paramètres matériaux et géométriques d'un modèle numérique, c'est-à-dire d'une boîte « grise » dans la terminologie de l'identification. L'exercice est difficile en raison de la très grande taille des modèles numériques considérés (typiquement des modèles aux éléments finis). Il est par ailleurs essentiel que les paramètres à ajuster prennent des valeurs physiquement admissibles. Cette communication propose de lever ces difficultés au travers d'une approche bayésienne en considérant les aprioris physiques sous la forme de densités de probabilité. Dans ce but, un protocole expérimental spécifique est établi afin de faciliter la construction de la densité de probabilité a posteriori à partir d'un développement modal dans le domaine fréquentiel et l'utilisation d'excitations multi-sinus. De même, afin d'accélérer son exploration par les techniques de tirage intensif de type chaînes de Markov Monte Carlo, une solution est proposée qui consiste à « projeter la dynamique » du système sur un polynôme chaos dont les variables aléatoires primales sont en relation bijective avec les paramètres du modèle. La méthodologie est illustrée sur des exemples de simulation numériques ainsi que sur des données vibratoires issues de structures métalliques simples.

Mots-clés— Recalage de modèles, dynamique des structures, inférence bayésienne, polynôme chaos.

I. INTRODUCTION

Le recalage de modèle (terminologie propre à la dynamique des structures) consiste à identifier les paramètres matériaux et géométriques d'un modèle numérique, tel que typiquement un modèle aux éléments finis (MEF) -- c'est-à-dire d'une boîte « grise » dans la terminologie de l'identification -- afin que les simulations qui en découlent reproduisent aussi fidèlement que possible le comportement d'un système observé expérimentalement. Il s'agit d'un exercice difficile dans le domaine de la dynamique des structures en raison de la très grande taille des modèles numériques considérés (un MEF peut typiquement atteindre plusieurs centaines de milliers ou millions de degrés de liberté) et du grand nombre de paramètres à ajuster. Dans un contexte où la structure du modèle ne découle pas d'une approche « boîte noire », mais résulte d'une modélisation physique fine, il est par ailleurs essentiel que les paramètres à ajuster prennent des valeurs physiquement admissibles (par exemple positives et proches de valeurs tabulées pour la masse volumique et le module d'Young d'un matériau connu, comprise entre 0 et 0,5 pour le coefficient de Poisson etc.). Le problème de l'identification de paramètres étant mal posé par nature, cet objectif ne peut être atteint qu'en ajoutant des contraintes fortes au travers d'une fonctionnelle de pénalisation dont la formulation est un problème ouvert. Cette communication propose de lever ces

difficultés au travers d'une approche bayésienne, où la considération d'aprioris physiques sous la forme de densités de probabilité fournit le mécanisme de régularisation naturel pour restreindre l'espace des solutions au domaine physiquement admissible. Suivant le même principe, l'approche permet aussi de prendre en compte les inévitables erreurs de modèle. En comparaison des quelques travaux précurseurs qui préconisent l'utilisation de l'inférence bayésienne en dynamique des structures [1][2], un point clé de notre approche est d'autoriser une formulation simple de la densité de probabilité a posteriori en raison d'un protocole expérimental spécifique qui opère dans le domaine fréquentiel avec des excitations multi-sinus. De plus, afin d'accélérer les techniques de tirage intensif de type Chaînes de Markov Monte Carlo dédiées à l'exploration des densités de probabilité a posteriori, une solution est proposée qui consiste à « projeter la dynamique » du système sur un polynôme chaos dont les variables aléatoires primales sont en relation bijective avec les paramètres du modèle. Il en résulte une représentation du modèle numérique par une surface de réponse très parcimonieuse (quelques dizaines de degrés de libertés) qui peut être échantillonnée intensivement et à moindre coût dans une démarche de Monte Carlo.

II. L'INFERENCE BAYESIENNE POUR LE RECALAGE DE MODELE

A. Généralités

Les modèles numériques qui décrivent le comportement dynamique d'une structure sont paramétrés par un certain nombre de variables qui caractérisent les propriétés du matériaux et la géométrie de la structure (par exemple le module d'Young E , la masse volumique ρ , le coefficient de Poisson ν , les dimensions, etc.). Les valeurs de ces variables ne sont généralement connues qu'avec un degré de précision limité et sont de plus susceptibles de varier d'un individu à un autre. Le recalage [3] consiste à ajuster les valeurs des paramètres du modèle numérique de manière à ce qu'il reproduise au mieux les données expérimentales observées. Une difficulté inhérente au recalage de modèle est qu'il possède généralement plusieurs solutions possibles (non-unicité) dont la plupart sont non-physiques. Afin de réduire l'espace des paramètres à une zone physiquement admissible, il est d'usage d'imposer des contraintes de type intervalles sur les valeurs autorisées. La formulation exacte de ces contraintes sous forme de fonctionnelles de coût est un problème ouvert.

B. Méthodologie

La méthodologie proposée se fonde sur une caractérisation du comportement de la structure à deux niveaux :

- a) au niveau d'une modélisation physique, à travers un modèle numérique de type MEF dépendant d'un jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ qui contiennent typiquement les grandeurs caractéristiques du matériau, tels que le module d'Young E , la masse volumique ρ , le coefficient de Poisson ν et des grandeurs caractéristiques de la géométrie de la structure,
- b) au niveau d'une modélisation de la relation entrée/sortie à travers des fonctions de transferts

$$H_{kl}(\omega; \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r^{kl}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\eta_r \omega_r \omega}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (1)$$

entre les degrés de liberté k et l , paramétrées par des pulsations propres ω_r , des taux d'amortissement η_r et des amplitudes A_r^{kl} (paramètres modaux $\boldsymbol{\alpha}$). Nous noterons $\mathbf{H}(\omega; \boldsymbol{\alpha})$ la matrice de transfert qui contient les éléments $H_{kl}(\omega; \boldsymbol{\alpha})$.

Les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ qui contiennent l'information physique sont ceux que l'on cherche à recalculer dans ce travail. Les paramètres $\boldsymbol{\alpha}$ sont les paramètres modaux généralement accessibles par l'expérience, par exemple via l'analyse modale expérimentale [4][5]. La dépendance de $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\theta}$, c'est-à-dire la fonction $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta})$ est entièrement décrite par le modèle numérique. L'objectif est donc d'identifier $\boldsymbol{\theta}$ à partir des données expérimentales \mathcal{D} « entrées-sorties » qui sont liées par $\boldsymbol{\alpha}$.

Afin de traduire l'incertitude sur les paramètres à recalculer (comme postulé dans l'approche bayésienne), nous introduisons au préalable les variables primales ξ_i , $i = 1, \dots, n$ qui traduisent au niveau le plus haut les aléas fondamentaux du problème. Ces variables seront rangées dans un vecteur colonne noté $\boldsymbol{\xi}$. La raison d'être de ces variables est de simplifier au maximum le problème d'inférence bayésienne en se permettant de supposer à ce niveau que les ξ_i sont mutuellement indépendants et identiquement distribués selon la loi normale centrée-réduite, c'est-à-dire :

$$p(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}'\right) \quad (2)$$

Le caractère aléatoire des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ est ensuite facilement formulé en introduisant une dépendance explicite en les variables primales ξ_i . Par exemple, la distribution log-normale sera souvent utilisée pour traduire l'incertitude du module d'Young E tout en assurant une contrainte de positivité de son support: $E = E(\xi_1) \sim \exp(\mu + \sigma \xi_1)$. De manière générale, nous poserons $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi})$, les densités de probabilité $p(\boldsymbol{\theta})$ ainsi construites constituant les aprioris qui serviront de point de départ à l'inférence bayésienne. De même, les paramètres modaux $\boldsymbol{\alpha}$ étant des fonctions implicites des variables primales ξ_i , ils en héritent le caractère aléatoire :

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3)$$

Finalement, les réponses du modèle exprimées dans le domaine fréquentiel s'expriment sous la forme

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \omega) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}, \omega) \mathbf{F}_0(\omega) \quad (4)$$

où les vecteurs $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \omega)$ et $\mathbf{F}_0(\omega)$ rassemblent respectivement les coefficients de Fourier des réponses et des forces agissant sur la structure aux degrés de liberté étudiés. La dépendance en $\boldsymbol{\alpha}$ rappelle que les sorties prédites par le modèle dépendent du bon recalage de ce dernier. De manière synthétique, les dépendances fonctionnelles entre les

différentes variables de travail introduites dans ce paragraphe s'énoncent:

$$\boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\theta} \mapsto \boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{H}(\omega) \mapsto \mathbf{X}(\omega) \quad (5)$$

Enfin, $\mathbf{Y}(\omega)$ désignera les observations bruitées des réponses $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \omega)$:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}, \omega) \cdot \mathbf{F}_0(\omega) + \mathbf{N}_Y(\omega) \quad (6)$$

où $\mathbf{N}_Y(\omega)$ est un vecteur de bruit qui rassemble aussi bien le bruit de mesure expérimental que les erreurs de modélisation liées à la qualité du modèle numérique. Dans le cas général, le vecteur de force (entrées) est également issu d'une mesure bruitée

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{F}_0(\omega) + \mathbf{N}_F(\omega) \quad (7)$$

où $\mathbf{N}_F(\omega)$ est un vecteur de bruit de mesure.

C. Inférence bayésienne

Le principe de l'inférence bayésienne consiste à accéder à la connaissance des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ inconnus par le biais de leur densité de probabilité a posteriori $p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D})$. Etant donné les données expérimentales $\mathcal{D} = \{\mathbf{F}(\omega_k), \mathbf{Y}(\omega_k)\}$ obtenues sur un ensemble de canaux de fréquences $\omega_k \in \mathcal{W}$, celle-ci s'exprime, selon la règle de Bayes :

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}) = p(\mathcal{D} | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) / p(\mathcal{D}) \quad (8)$$

Il s'agit d'une forme séparable qui a l'avantage de faire apparaître des probabilités plus facilement accessibles à l'utilisateur :

- la probabilité a priori $p(\boldsymbol{\theta})$ des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ du modèle, dont nous avons détaillé la construction dans le paragraphe précédant à l'aide des variables primales $\boldsymbol{\xi}$,
- la probabilité $p(\mathcal{D} | \boldsymbol{\theta})$ d'observer les données expérimentales étant donné un modèle numérique paramétré par $\boldsymbol{\theta}$ (vraisemblance), dont la formulation exacte est détaillée ci-dessous,
- la probabilité $p(\mathcal{D})$ d'observer les données expérimentales (l'évidence) qui ne jouera plus de rôle par la suite, car indépendante des paramètres $\boldsymbol{\theta}$.

La formulation de la vraisemblance découle de la relation qui lie les données expérimentales aux sorties prédites par le modèle (cf. figure 1 et Eqs. 6 et 7). En pratique, le choix a priori des densités de probabilité du bruit sur les réponses et sur les forces mesurées constitue une difficulté de l'approche bayésienne que nous détournons dans ce travail en nous plaçant dans le domaine fréquentiel. En effet, d'après le théorème de la Limite Centrale qui prévaut pour les coefficients de Fourier, la densité de probabilité du bruit converge très rapidement vers la loi normale complexe, ce qui permet d'obtenir finalement :

$$P(\mathcal{D} | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{F}_0) = \prod_{\omega_k \in \mathcal{W}} \frac{1}{\pi^{2M} |\mathbf{C}_N(\omega_k)|} \times \exp\left(-(\mathbf{Z}(\omega_k) - \mathbf{Z}_0(\omega_k))^H \mathbf{C}_N^{-1}(\omega_k) (\mathbf{Z}(\omega_k) - \mathbf{Z}_0(\omega_k))\right) \quad (9)$$

avec $\mathbf{Z}(\omega_k) = [\mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}, \omega_k) \mathbf{F}(\omega_k) \quad \mathbf{F}(\omega_k)]^T$,
 $\mathbf{Z}_0(\omega_k) = [\mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}, \omega_k) \mathbf{F}_0(\omega_k) \quad \mathbf{F}_0(\omega_k)]^T$ et $\mathbf{C}_N(\omega_k)$ la matrice de covariance du bruit telle que

$$\mathbf{C}_N(\omega_k) = \begin{bmatrix} \sigma_Y^2(\omega_k) & \sigma_{YF}^2(\omega_k) \\ \sigma_{YF}^2(\omega_k) & \sigma_F^2(\omega_k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dans l'expression (9), les seuls hyper-paramètres qui restent à fixer sont les éléments de la matrice de covariance $\mathbf{C}_N(\omega_k)$. Ceux-ci sont estimés à l'aide d'un protocole expérimental basé sur des excitations multi-sinus tel que décrit dans la référence [10].

Nous avons établi comment, dans le principe, l'inférence bayésienne donne accès à la connaissance des paramètres inconnus via la densité de probabilité a posteriori $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D})$. Dans la pratique, l'obtention de cette dernière dans sa forme complète n'est pas forcément souhaitée, car il s'agit d'une fonction de plusieurs variables dont la représentation n'est pas aisée. Nous nous intéresserons essentiellement à déterminer son mode, c'est-à-dire le maximum a posteriori (MAP).

C. Maximum a posteriori

Le maximum a posteriori correspond au vecteur de paramètres du modèle le plus probable étant donné l'observation des mesures :

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}) \quad (11)$$

Etant données les variables utilisées dans ce travail, le MAP s'obtient directement à partir de la relation $\boldsymbol{\theta}_{\text{MAP}} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}^0)$ où

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \arg \max_{\boldsymbol{\xi}} p(\mathcal{D} | \boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) p(\boldsymbol{\xi}) \quad (12)$$

et où $J(\boldsymbol{\xi})$ est le jacobien de la transformation $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$. L'expression (12) est conceptuellement plus simple que (11) dans le sens où elle ne dépend que des variables primales $\boldsymbol{\xi}$ qui sont les plus en amont du problème. D'un point de vue pratique, il reste par contre à résoudre le problème de l'échantillonnage de la densité $p(\mathcal{D}|\boldsymbol{\xi})J(\boldsymbol{\xi})p(\boldsymbol{\xi})$ que nous proposons de résoudre par une approche fondée sur le chaos polynomial et l'algorithme de Metropolis-Hasting.

D. Chaos polynomial et MCMC

Le principal obstacle à l'échantillonnage de la vraisemblance $p(\mathcal{D}|\boldsymbol{\xi})$ dans la formule (12) provient du temps de calcul nécessaire à l'évaluation des sorties du modèle $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \omega_k)$ à partir des réalisations des variables primales $\boldsymbol{\xi}$ -- cf. Eq. (9) : à chaque tirage de $\boldsymbol{\xi}$ est associé un jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ et un nouveau modèle numérique doit être calculé pour obtenir les sorties $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \omega_k) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \omega_k) \mathbf{F}(\omega_k)$ à chaque fréquence de mesure ω_k . Dans le cas d'un modèle numérique de type MEF cette approche directe représente un temps de calcul tellement considérable qu'elle est inconcevable. Nous proposons de contourner le problème en approchant la relation

$\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}$ par une surface de réponse de type chaos polynomial [8] dont l'évaluation, même répétée un grand nombre de fois, reste extrêmement rapide. De plus, comme évoqué plus haut, l'utilisation du chaos polynomial permet d'envisager des densités de probabilité quelconques dans un cadre très général, puisqu'il s'appuie sur la représentation de n'importe quelle variable aléatoire à partir de variables gaussiennes centrées réduites et indépendantes. L'approximation par chaos polynomial consiste à approcher la relation fonctionnelle entre les vecteurs stochastiques $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\alpha}_p(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=0}^P a_k \Phi_k(\boldsymbol{\xi}) \quad (13)$$

où les $\Phi_k(\boldsymbol{\xi})$ sont les polynômes d'Hermite multidimensionnels et où P représente le nombre total de termes dans le développement. En théorie, l'approximation du chaos polynomial peut être rendue arbitrairement précise en fixant l'ordre P suffisamment grand. Elle fonctionne donc comme une surface de réponse équivalente au modèle numérique qui permet de propager l'incertitude de l'espace des variables primales à l'espace des paramètres modaux.

Les coefficients du chaos polynomial s'évaluent en utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes d'Hermite par rapport à la mesure gaussienne :

$$a_k = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \Phi_k \rangle}{\|\Phi_k\|^2} = \frac{1}{M_k} \int \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \Phi_k(\boldsymbol{\xi}) p(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (14)$$

où $p(\boldsymbol{\xi})$ a été donné dans l'Eq.(2). L'évaluation des intégrales (14) est réalisée numériquement selon la méthode de quadrature de Gauss-Hermite ou par échantillonnage hypercube latin [7].

Une fois les coefficients du chaos polynomial déterminés, l'évaluation du MEF est remplacée par celle du chaos polynomial. Le changement de variable se fait logiquement de $\boldsymbol{\theta}$ à $\boldsymbol{\xi}$. Il est évident que $p(\boldsymbol{\xi}|\mathcal{D})$ est une fonction non-linéaire en $\boldsymbol{\xi}$ et, par conséquent, une stratégie robuste d'échantillonnage doit être adoptée. Nous avons choisi l'algorithme de Metropolis-Hastings qui, en tant que méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov, réalise des tirages à partir d'une loi de proposition arbitraire q au lieu de $p(\boldsymbol{\xi}|\mathcal{D})$. Grâce à cet algorithme, les tirages obtenus sont concentrés dans la zone de plus haute probabilité. La loi de proposition est choisie arbitrairement pourvue qu'elle satisfasse aux propriétés d'invariance et de réversibilité. Dans notre approche, l'algorithme de Metropolis-Hastings a été modifié pour faire fonctionner en parallèle plusieurs chaînes de Markov avec possibilité de mutation de l'une à l'autre selon le principe des algorithmes génétiques ; cette stratégie améliore grandement l'exploration du support de la densité de probabilité [6].

III. APPLICATIONS

A. Exemple numérique

Une poutre cantilever constitue un exemple élémentaire de structure pour tester notre méthodologie de recalage – cf figures 2-3. Dans ce cas, le module d'Young E et la densité ρ de la poutre sont les paramètres du modèle numérique qu'il s'agit de recalcr. Rappelons que ces variables sont considérées aléatoires au niveau du modèle structurel dans l'approche bayésienne. Les informations a priori sont les suivantes :

$$E \sim \mathcal{N}(180;30) \text{ GPa,}$$

$$\rho \sim \mathcal{N}(7000;300) \text{ Kg/m}^3,$$

Un modèle d'amortissement visqueux proportionnel à la masse et à la raideur est utilisé pour décrire la dissipation structurelle : $\eta_r = 0,5(a/\omega_r + b\omega_r)$ où a et b sont deux variables aléatoires qui suivent une loi uniforme $U(0,1)$. Ainsi l'ensemble des paramètres aléatoires du modèle numérique est finalement $\theta = \{E, \rho, a, b\}$.

Pour prendre en compte l'effet des erreurs de modélisation deux modèles différents ont été créés ; le premier modèle pour fournir les données expérimentales \mathcal{D} , le second comme modèle numérique à identifier :

- modèle 1 : 20 éléments, amortissement visqueux,
- modèle 2 : 10 éléments, amortissement structural.

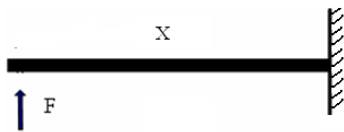


Fig. 2. : Poutre cantilever.

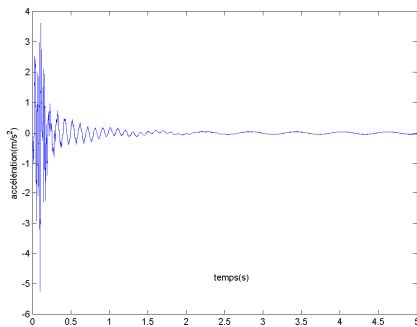


Fig. 3. Réponse impulsionnelle du modèle numérique.

La figure 4.a compare les valeurs de la pulsation propre ω_4 (4ième mode) pour différents tirages obtenus d'une part par le MEF et d'autre part par le chaos polynomial. La surface de réponse de type chaos polynomial s'avère donner ici une excellente approximation : comme indiqué en figure 4.b, l'erreur relative est en moyenne de l'ordre de 0,01%. A noter que le temps de calcul associé à chaque tirage est plus rapide pour le chaos polynomial que pour le MEF (deux ordres de grandeur de différence). Le chaos polynomial apparaît donc ici comme une solution viable et prometteuse.

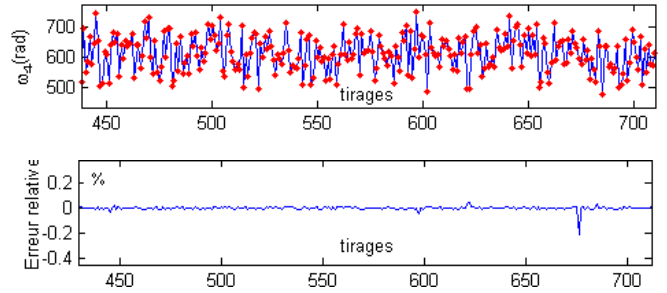


Fig. 4. Tirages aléatoires de la 4ième pulsation propre (rouge : solution éléments finis, bleu : approximation par chaos polynomial).

La représentation du chaos polynomial est utilisée pour propager l'incertitude de l'espace des paramètres structuraux vers l'espace des paramètres modaux. Etant donné le grand nombre de tirages à faible coût de calcul que cette stratégie autorise, il est facile de construire les histogrammes associés aux densités de probabilité a priori des paramètres modaux. Ceux-ci sont montrés à la figure 5 dans le cas des quatre premières pulsations propres. A noter que les résultats ont été lissés par la méthode des noyaux. Par comparaison aux vraies valeurs (qui sont ici connues puisqu'il s'agit d'une expérience numérique), les moyennes des histogrammes présentent toutes un léger biais négatif (sous-estimation) en raison de la faiblesse de l'information a priori.

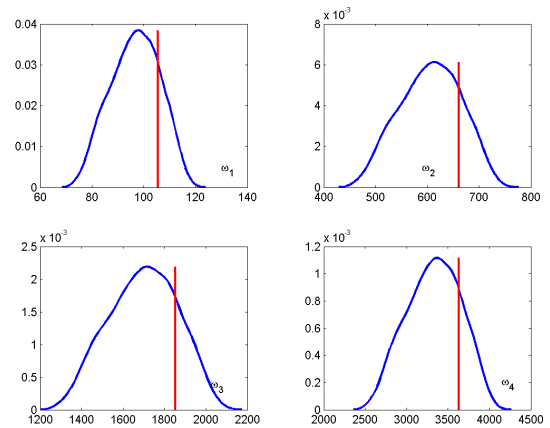


Fig. 5. Densités de probabilité a priori des 4 premières pulsations propres estimées par la méthode des noyaux et comparées aux vraies valeurs (traits verticaux rouges).

Les densités de probabilité a posteriori marginales des paramètres modaux sont représentées à la figure 6. En ce qui concerne les pulsations propres, ces résultats sont à comparer aux densités de probabilités a priori de la figure 5 : l'apport d'information issue des données expérimentales a permis de correctement resserrer les densités autour des vraies valeurs. En ce qui concerne les taux d'amortissement dont l'identification est de manière générale plus difficile, l'apport des données expérimentales est illustré à la figure 7 : alors que l'amortissement du premier mode est mal estimé car produisant peu d'effet sur les données, ceux des autres modes dont le rôle plus important est mieux identifié. Les résultats sont synthétisés dans le tableau 2 sous la forme de MAP et d'écart-types a posteriori.

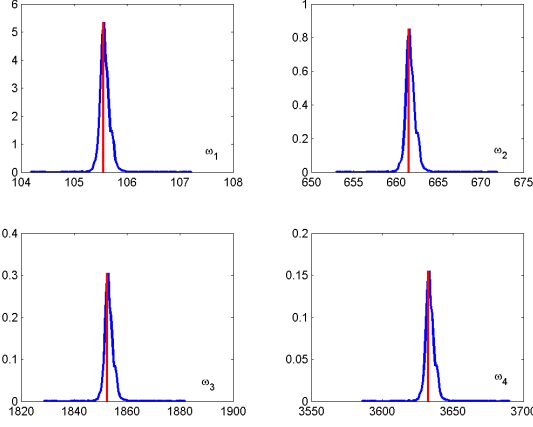


Fig. 6. Densités de probabilité a posteriori des 4 premières pulsations propres estimées par la méthode des noyaux comparées aux vraies valeurs (traits verticaux rouges).

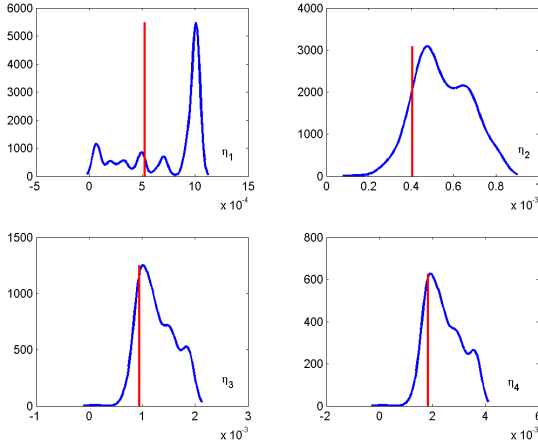


Fig. 7. Densités de probabilité a posteriori des 4 premiers taux d'amortissement estimées par la méthode des noyaux comparées aux valeurs vraies (traits verticaux rouges).

A. Exemple expérimental

L'inférence bayésienne est à présent illustrée sur des données expérimentales. Le système étudié est une plaque quasi-carrée en acier excitée par une force pseudo-aléatoire générée par un pot vibrant – cf. figure 8. La force d'excitation ainsi que cinq réponses vibratoires (accélération) sont simultanément mesurées par des capteurs piézoélectriques et acquis avec une fréquence d'échantillonnage de 3200Hz. Le MEF de la plaque est constitué de 1500 éléments coques. Le logiciel d'éléments finis actuel ne calcule que la structure non-amortie ou la structure amortie avec amortissement proportionnel. La loi d'atténuation réelle n'étant pas connue, un amortissement de type structural s'est avéré être l'hypothèse la plus appropriée dans ce cas d'étude. Par ailleurs, les taux d'amortissement inconnus étant très nombreux dans la bande de fréquence d'intérêt et les informations aprioris les concernant étant assez imprécises, il a été décidé de les déterminer par analyse modale expérimentale au lieu de les inclure dans le vecteur θ des paramètres à recalculer. Cette manière de faire ne pose aucun problème conceptuel dans notre méthodologie dès lors qu'elle concerne des variables qui ne sont pas implicitement fonctions des paramètres du modèle numérique. Un taux

d'amortissement $\eta = 0,005$ a été choisi pour tous les modes. La plaque étant supposée homogène en matériau et épaisseur, le vecteur des paramètres à recalculer se résume alors simplement à $\theta = \{E, \rho, t\}$. Les connaissances a priori sont :

$$\begin{aligned} E &\sim \mathcal{N}(240;30) \text{ GPa,} \\ \rho &\sim \mathcal{N}(7500;300) \text{ Kg/m}^3, \\ t &\sim \mathcal{N}(2,7;0,1) \text{ mm.} \end{aligned}$$

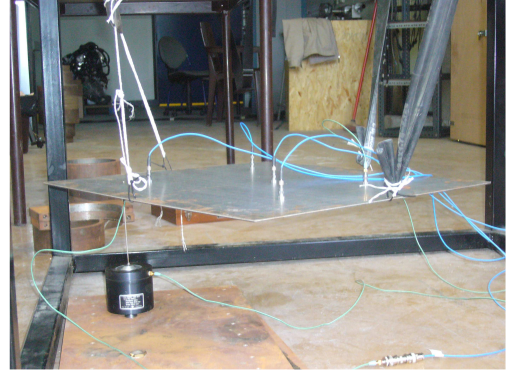


Fig. 8. Dispositif expérimental.

Afin de formuler la fonction de vraisemblance $p(\mathcal{D}|\xi)$, les bruits de mesure en entrée et en sortie doivent être évalués. Dans cette optique, une excitation multi-sinus périodique est utilisée qui, en régime établi, produit des réponses également périodiques. La différence entre les périodes successives des signaux est dans ce cas directement liée au bruit de mesure. Afin de couvrir une large bande de fréquence, l'excitation a été conçue par périodisation d'une séquence aléatoire (multi-sinus aléatoire [10]) :

$$u(t_n) = \sum_{k=1}^K A_k \sin(\omega_k t_n + \varphi_k) \text{ avec } \mathbb{E}\{e^{j\varphi}\} = 0 \quad (12)$$

avec $K = 675$ et 52 périodes pour chaque signal. Chaque période dure 1,28 secondes et est échantillonnée à 3200 Hz. Le bruit de mesure en sortie est alors évalué en faisant :

$$n_y(t_n) = y(t_n) - 2\Re\left(\sum_{k=1}^K c_k^y \exp(j\omega_k t_n)\right) \quad (12)$$

où $c_k^y = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} y(t_n) \exp(-j\omega_k t_n)$ sont les coefficients de

Fourier des réponses mesurées. De même, en travaillant sur les entrées, il est possible d'évaluer le bruit de mesure $n_F(t_n)$. Les densités spectrales $\sigma_F^2(\omega_k)$ et $\sigma_y^2(\omega_k)$ qui interviennent dans l'Eq.(10) s'en déduisent alors aisément par la méthode du périodogramme moyenné – cf. figure 9.

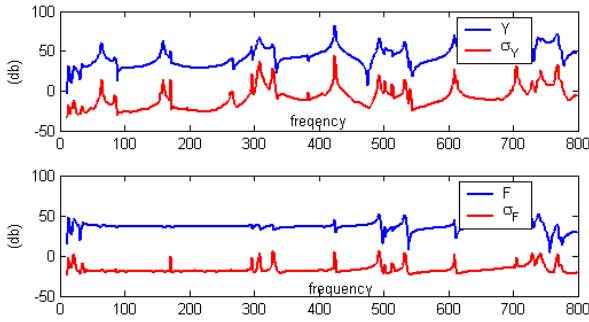


Fig. 9. Les mesures d'entrée et de sortie ainsi que leurs écart-types.

Des résultats similaires à ceux obtenus dans l'exemple de la poutre ont été obtenus pour l'identification des paramètres modaux de la plaque. Ils ne sont donc pas reportés ici et nous présentons seulement les résultats relatifs à l'estimation des fonctions de transfert. Par le jeu de la propagation des incertitudes de θ à $H_{kl}(\omega; \alpha)$, il est en effet facile d'évaluer la dispersion a priori de n'importe quelle fonction de transfert, comme illustré à la figure 10. De la même manière, l'évaluation de la dispersion a posteriori est une conséquence immédiate de notre approche, comme illustré à la figure 11. L'observation de ces résultats démontre que l'estimation des fonctions de transfert s'améliore considérablement en fusionnant l'information expérimentale avec la connaissance a priori, ceci au travers du MEF adopté.

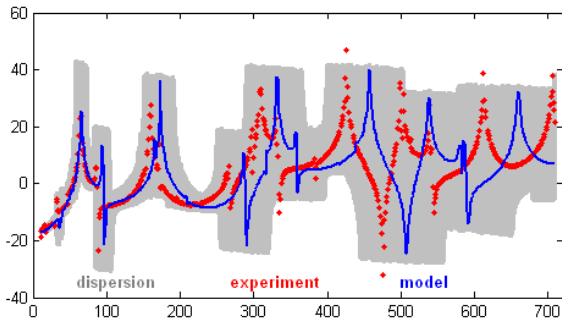


Fig. 10. Dispersion a priori de la fonction de transfert (zone grisée : intervalle de dispersion, points rouges : mesures, ligne bleu : prédiction du MEF avant recalage).

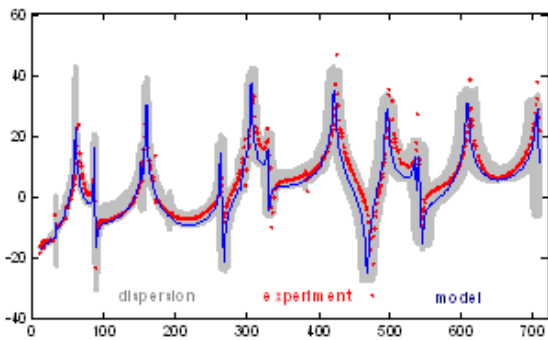


Fig. 11. Dispersion a posteriori de la fonction de transfert (zone grisée : intervalle de dispersion, points rouges : mesures, ligne bleu : prédiction du MEF après recalage).

IV. CONCLUSION

Une méthodologie de recalage de modèle numérique par inférence bayésienne a été proposée et illustrée. Il s'avère que l'inférence bayésienne est un cadre approprié pour prendre en compte des aprioris physiques. Les trois points clés qui rendent possibles cette approche dans le contexte étudié sont:

- l'estimation des bruits de mesure en utilisant des excitations multi-sinus de sorte que les hyper-paramètres entrant dans la vraisemblance puissent être déterminés empiriquement,
- l'utilisation du chaos polynomial afin d'accélérer l'inférence bayésienne sur la base d'un échantillonnage de type MCMC,
- le couplage de l'algorithme de Metropolis-Hasting à un algorithme génétique afin d'améliorer l'échantillonnage de la densité de probabilité a posteriori.

Les résultats expérimentaux obtenus valident la faisabilité de l'inférence Bayésienne sur une structure réelle simple de type plaque. Dans cet exemple, la méthode ne nécessite évidemment que le recalage d'un nombre limité (trois) de paramètres. Dans le cas plus général, la prise en compte de propriétés hétérogènes des matériaux ou de la géométrie au travers de champs stochastiques semble être une extension triviale de la méthode susceptible pour affiner les résultats.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Beck, L. James and S.-K. Au, Bayesian Updating of Structural Models and Reliability using Markov Chain Monte Carlo Simulation, *Journal of engineering mechanics*, Vol. 128, No4, pp. 380-391, 2002.
- [2] J. Ching and Y.-C. Chen, Transitional markov chain monte carlo method for bayesian model updating, model class selection, and model averaging, *Journal of engineering mechanics*, Vol. 133, No7, pp. 816-832, 2007.
- [3] J.E. Mottershead, M.I. Friswell, Model updating in structural dynamics: a survey, *Journal of sound and vibration*, Vol. 167, No. 2, pp. 347-375, 1993.
- [4] J. He and Z.F. Fu, *Modal analysis*, Butterworth-Heinemann, MA, USA (2001).
- [5] D.J. Ewins, *Modal testing: theory, practice and application*, Research Studies Press Ltd. 2000.
- [6] F. Liang and W. H. Wong, Real-Parameter Evolutionary Monte Carlo With Applications to Bayesian Mixture Models, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 96, No. 454, pp. 653-666, 2001.
- [7] S.K. Choi and R.V. Grandhi, Polynomial Chaos Expansion with Latin Hypercube Sampling for Estimating Response Variability, *AIAA JOURNAL*, Vol. 42, No. 6, pp. 1191-1198, 2004.
- [8] N. Wiener, *The Homogeneous Chaos*, *American Journal of Mathematics*, Vol. 60, No. 4. pp. 897-936. 1938.
- [9] B. Sudret, M. Berveiller, M. Lemaire, *Approches non intrusives des éléments finis stochastiques*, Séminaire « Mécanique numérique probabiliste », Paris, 2005.
- [10] J.Schoukens, J.Swevers, R.Pintelon, H.Van der Auweraer, Excitation design for FRF measurements in the presence of non-linear distortions, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 18, pp.727-738, 2004.