

Reconstruction Robuste des Défauts Actionneurs d'un Système Linéaire Incertain à retard : Approche par Observateur à Mode Glissant

Iskander BOULAABI ^{1,2}, Fayçal BEN HMIDA ^{1,2}, Anis SELLAMI ^{1,2}, Moncef GOSSA^{1,2},

¹École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis (ESSTT),

²Unité de Recherche Commande Surveillance et Sûreté de Fonctionnement des Systèmes (C3S).

5 Av. Taha Hussein, BP 56, 1008 Tunis.

iskander_boulaabi@yahoo.fr,

{faycal.benhmida, anis.sellami, moncef.gossa}@esstt.rnu.tn

Résumé— Ce travail présente une méthode de synthèse d'un observateur à mode glissant permettant la reconstruction robuste des défauts actionneurs des systèmes linéaires incertains à retard. Ce retard affecte simultanément l'état du système et l'entrée de commande, il est variable, inconnu et borné. L'idée de base consiste à minimiser l'effet d'incertitudes et du retard sur la reconstruction des défauts actionneurs en utilisant une approche H_∞ . Ce problème est résolu en utilisant le concept d'injection de l'erreur de sortie équivalente et l'outil LMI (Linear Matrix Inequality). Des résultats de simulation sur un exemple numérique sont présentés pour mettre en évidence la robustesse et l'efficacité de la reconstruction des défauts actionneurs.

Mots-clés— Systèmes Linéaires Incertains ; Retard Inconnu et variable ; Observateur à Mode Glissant ; LMI ; Reconstruction Robuste des Défauts.

I. INTRODUCTION

Le problème de détection et d'isolation des défauts (FDI : Fault Detection and Isolation) a été largement traité dans la littérature par plusieurs approches [5], [9]. La plupart de ces approches se basent sur la modélisation et plus particulièrement sur l'utilisation des observateurs d'état [6], [8]. La validité de ces approches dépend étroitement de la représentativité du modèle utilisé. Malheureusement, ces modèles sont généralement incertains pour prendre en compte les dynamiques négligées, les variations paramétriques et les perturbations externes. Ces incertitudes représentent des paramètres de nuisance au système FDI et qui peuvent générer des fausses alarmes et des retards à la détection des défauts. Pour cette raison, nous avons intérêt à concevoir un système FDI robuste. Une solution à ce problème consiste à utiliser un observateur à mode glissant (SMO : Sliding Mode Observer) qui est connu par sa robustesse [13].

Un observateur à mode glissant [14] possède deux termes de correction : un terme linéaire et un terme non linéaire. Le principe d'un tel observateur consiste à définir dans l'espace de phase une surface de glissement. Cette surface dépend étroitement de l'erreur d'observation et nécessite la satisfaction de certaines conditions de glissement afin de la rendre attractive. Par conséquent, l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable.

Récemment, les observateurs à mode glissant sont appliqués à la FDI. Edwards et al. en 2000 [4] ont développé une approche basée sur un algorithme explicite de synthèse de SMO pour reconstruire les défauts actionneurs des systèmes linéaires certains. Tan et Edwards en 2002 [12] ont développé une méthode de synthèse d'un SMO par approche LMI pour

reconstruire les défauts actionneurs et capteurs des systèmes linéaires certains. Les mêmes auteurs en 2003 [13] ont étendu ce travail pour des systèmes linéaires incertains.

Dans ce travail, nous présentons une approche de synthèse d'un SMO appliquée à la FDI des systèmes linéaires incertains à retard variable et inconnu. Notre idée repose sur l'observateur SMO développé par Edwards et al. en 1994 [2]. Par comparaison aux travaux Tan et Edwards en 2003 [13], notre problème prend en compte le retard qui affecte simultanément l'état du système et l'entrée de commande. Par ailleurs, nous cherchons à concevoir un SMO qui soit capable de reconstruire d'une manière robuste les défauts actionneurs des systèmes linéaires incertains à retard inconnu et variable. Il existe déjà dans la littérature le travail de Seuret et al. en 2007 [10] qui s'intéresse à cette classe de système. Mais dans [10] les auteurs se limitent uniquement à la reconstruction d'état en utilisant un observateur SMO. Dans ce travail, nous proposons d'étendre le travail de Seuret et al. [10] pour reconstruire l'état du système et les défauts actionneurs. Les incertitudes considérées, dans ce travail, vérifient les hypothèses dénommées « matching conditions ». Elles sont des multiples d'un terme borné en norme. L'approche proposée est basée sur la minimisation d'une norme H_∞ de l'effet d'incertitudes et du retard sur le signal reconstruit de défaut actionneur. Un tel problème est résolu en utilisant une formulation LMI [7]. Finalement, nous terminerons par une application numérique pour valider les résultats théoriques développés dans ce travail.

II. DESCRIPTION DU SYSTEME ET PRELIMINAIRE

Considérons un système linéaire incertain et à retard variable décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h(t)) + Bu(t) + B_h u(t-h(t)) \\ \quad + M \xi(t, y, u) + F f_i(t, u) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ est le vecteur d'observation, $f_i(t, u) \in \mathfrak{R}^q$ est le défaut actionneur. Le signal $\xi(t, y, u) \in \mathfrak{R}^k$ englobe toutes les incertitudes et les perturbations qui affectent le système et $h(t)$ est un temps de retard variable et inconnu. Les matrices A, A_h, B, B_h, C, F et M sont supposées constantes de

dimensions appropriées avec $q < p < n$. Nous supposons que les matrices B_h, C et M sont de rang plein et que

$$\|f_i(t, u)\| \leq \alpha(t) \quad (2)$$

et

$$\|\xi(t, y, u)\| < \beta \quad (3)$$

où $\alpha: \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}_+$ est une fonction connue, β est un scalaire positif connu et nous supposons qu'il existe une borne connue h_m telle que $0 \leq h(t) \leq h_m$.

III. SYNTHÈSE D'OBSERVATEUR A MODE GLISSANT

Le SMO proposé est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + A_h\hat{x}(t-h) + Bu(t) + B_hu(t-h) \\ \quad - G_1e_y(t) + G_nv \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4)$$

Le vecteur discontinu d'injection d'erreur de sortie v est défini par :

$$v = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \frac{P_o e_y(t)}{\|P_o e_y(t)\|} & \text{si } e_y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (5)$$

où $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$, $P_o \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ est une matrice symétrique définie positive qui sera déterminée ultérieurement. Le retard utilisé dans (4), $h \leq h_m$, est une valeur qui peut être choisie arbitrairement. La fonction scalaire positive $\rho: \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}_+$ doit être supérieure à la somme des modules des signaux des défauts, des retards et des incertitudes.

Edwards et al. en 2000 [4] ont montré qu'il existe un mouvement de glissement stable sur la surface $S = \{e \in \mathfrak{R}^n : e_y = 0\}$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- A1. Rang $(CF) = p$.
- A2. Les zéros invariants du système (A, F, C) sont stables.

La première condition est vérifiée par calcul, mais la deuxième condition est assurée si le système est à minimum de phase.

Nous effectuons alors un changement de coordonnées T_o [4], où le triplet (A, F, C) sera sous la forme suivante :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}, \bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}_1 \end{bmatrix} \text{ and } \bar{C} = [0 \quad T] \quad (6)$$

avec

$\bar{A}_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$, $\bar{A}_{12} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times p}$, $\bar{A}_{21} \in \mathfrak{R}^{p \times (n-p)}$, $\bar{A}_{22} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, $\bar{F}_1 \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ est une matrice non singulière et $T \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ est une matrice orthogonale. Définissons la matrice \bar{A}_{211} comme les $(p-q)$ lignes supérieures de \bar{A}_{21} . Edwards et al. en 2000 [4] ont montré aussi que la paire $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{211})$ est détectable parce que les modes non observables de cette paire sont les zéros invariants du système (A, F, C) qui sont stables [3]. Ainsi, nous

désignons la matrice $\bar{F}_2 \in \mathfrak{R}^{p \times q}$ par les p lignes inférieures de \bar{F} tel que $\bar{F}_1 \subset \bar{F}_2$.

Nous cherchons à déterminer les gains G_1 et G_n de l'observateur (4). Tout d'abord, le gain G_n est défini dans le nouveau système de coordonnées par :

$$\bar{G}_n = \begin{bmatrix} -LT^T \\ T^T \end{bmatrix} \quad (7)$$

Avec

$$L = \begin{bmatrix} L^o & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times p} \quad (8)$$

$L^o \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (p-q)}$ et la matrice T est donnée par (6). Dans le cas où $\xi(t, y, u) = 0$ et $\rho = \|CF\|\alpha(t) + \eta_o$ avec η_o est un scalaire positif, les résultats suivants ont été démontrés [11] :

Proposition 1 : S'il existe une matrice \bar{P} de Lyapunov symétrique définie positive qui satisfait

$$\bar{P}(\bar{A} - \bar{G}_1\bar{C}) + (\bar{A} - \bar{G}_1\bar{C})^T \bar{P} < 0 \quad (9)$$

et sa structure vérifie

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_1 L \\ L^T \bar{P}_1 & \bar{P}_2 + L^T \bar{P}_1 L \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

avec $\bar{P}_1 \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ et $\bar{P}_2 \in \mathfrak{R}^{p \times p}$. La matrice \bar{P}_o introduite dans (5) est définie par

$$\bar{P}_o = T\bar{P}_2T^T \quad (11)$$

alors le système d'erreur d'estimation d'état est quadratiquement stable. Il est aussi montré dans [11] que la dynamique de glissement est donnée par la matrice $(\bar{A}_{11} + L^o\bar{A}_{211})$ qui est stable, donc la dynamique du système d'erreur atteint, en un temps fini, la surface de glissement :

$$S_g = \{e : Ce = 0\} \quad (12)$$

Dans ce qui suit, nous généralisons les résultats trouvés pour le cas où $\xi(t, y, u) \neq 0$. Dans ces conditions, la dynamique de l'erreur d'observation $\bar{e}(t) = T_o e(t) = \hat{x}(t) - \bar{x}(t)$ est régie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}(t) = & (\bar{A} - \bar{G}_1\bar{C})\bar{e}(t) + \bar{B}_h\xi_0(t) + \bar{A}_h\xi_1(t) + \bar{G}_nv \\ & - \bar{F}f_i(t, u) - \bar{M}\xi(t, y, u) \end{aligned} \quad (13)$$

Seuret [10] a proposé que

$$\xi_0(t) = u(t-h) - u(t-h(t)) \quad (14)$$

et

$$\xi_1(t) = x(t-h) - x(t-h(t)) \quad (15)$$

où

$$\bar{B}_h\xi_0(t) = \bar{B}_h \int_{t-h(t)}^{t-h} \dot{u}(s) ds \quad (16)$$

et

$$\bar{A}_h\xi_1(t) = \bar{A}_h \int_{t-h(t)}^{t-h} \dot{x}(s) ds \quad (17)$$

Supposons qu'il existe une matrice \bar{P} symétrique définie positive qui vérifie la proposition 1. Définissons les scalaires positifs suivants :

$$\mu_o = -\lambda_{\max}(\bar{P}(\bar{A} - \bar{G}_1\bar{C}) + (\bar{A} - \bar{G}_1\bar{C})^T \bar{P}) \quad (18)$$

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(\bar{M}^T \bar{P}^2 \bar{M})} \quad (19)$$

$$\mu_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\bar{B}_h^T \bar{P}^2 \bar{B}_h)} \quad (20)$$

$$\mu_3 = \sqrt{\lambda_{\max}(\bar{A}_h^T \bar{P}^2 \bar{A}_h)} \quad (21)$$

où λ_{\max} est la valeur propre maximale.

Nous supposons aussi que

$$\rho(t, y, u) \geq \|\bar{C}\bar{F}\| \alpha(t, u) + \eta_0 \quad (22)$$

avec η_0 est un scalaire positif.

En considérant les équations (13)-(22) nous parvenons au résultat suivant :

Lemme 1 : La norme de l'erreur d'estimation $\bar{e}(t)$ appartient à l'ensemble suivant :

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ \bar{e} : \|\bar{e}\| < \frac{2}{\mu_o} (\mu_1 \beta + \mu_2 \beta_0 + \mu_3 \beta_1) + \varepsilon \right\} \quad (23)$$

où ε est un scalaire positif arbitraire au voisinage de zéro.

Preuve. voir la référence [13].

Le lemme 1 implique que le choix de $\rho(t, y, u)$ garantit le mode glissant décrit par (12). Ce qui donne une explication sur la cause des structures des matrices d'équation (6) après changement de coordonnées. Une reformulation de l'erreur d'estimation

$$\dot{\bar{e}}(t) = (\bar{A} - \bar{G}_1 \bar{C}) \bar{e}(t) + \bar{G}_n v - \bar{F} f_i(t, u) - \bar{Q} \zeta(t, y, u) \quad (24)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{Q} \zeta(t, y, u) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M} & -\bar{B}_h & -\bar{A}_h \end{bmatrix}}_{\bar{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t, y, u) \\ \xi_0(t) \\ \xi_1(t) \end{bmatrix}}_{\zeta(t, y, u)} \\ &= \bar{M} \xi(t, y, u) - \bar{B}_h \xi_0(t) - \bar{A}_h \xi_1(t) \end{aligned} \quad (25)$$

et $\|\zeta(t, y, u)\| < \beta + \beta_0 + \beta_1$.

Faisons un deuxième changement de coordonnées

$$\tilde{T} : \bar{e} \mapsto \tilde{e} \quad [2], [3] : \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (26)$$

où L est défini par (8). Dans ces nouvelles coordonnées, le triplet (A, F, C) est représenté par

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \tilde{T} \bar{A} \tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{F} = \tilde{T} \bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{F}_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= \bar{C} \tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \tilde{T} \bar{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 + L \bar{Q}_2 \\ T \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

avec $\tilde{A}_{11} = \bar{A}_{11} + L_o \bar{A}_{211}$ et $\tilde{F}_2 = T \bar{F}_2$.

Ainsi, le gain \bar{G}_n devient

$$\tilde{G}_n = \tilde{T} \bar{G}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (28)$$

et la nouvelle matrice de Lyapunov est donnée par

$$\tilde{P} = (\tilde{T}^{-1})^T \bar{P} (\tilde{T}^{-1}) = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_o \end{bmatrix} \quad (29)$$

Remarque 1 : Comme la matrice \tilde{P} est diagonale en bloc, on peut montrer que la matrice $\tilde{A}_o = \tilde{A} - \tilde{G}_1 \tilde{C}$ est stable au sens de Lyapunov [3]. Ceci implique que la matrice \tilde{A}_{11} est stable et par conséquent, le mouvement de glissement est aussi stable. Alors, il est facile de montrer que :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{A}_o \tilde{e}(t) + \tilde{G}_n - \tilde{F} f_i(t, u) - \tilde{T} \bar{Q} \zeta(t, y, u) \quad (30)$$

Partitionnons cette erreur d'estimation suivant les dimensions de (27), nous obtenons

$$\dot{\tilde{e}}_1(t) = \tilde{A}_{11} \tilde{e}_1(t) + (\tilde{A}_{12} - \tilde{G}_{12}) \tilde{e}_y - (\bar{Q}_1 + L \bar{Q}_2) \zeta(t, y, u) \quad (31)$$

$$\dot{\tilde{e}}_y(t) = \tilde{A}_{21} \tilde{e}_1(t) + (\tilde{A}_{22} - \tilde{G}_{22}) \tilde{e}_y(t) + v - \tilde{F}_2 f_i(t, u) - T \bar{Q}_2 \zeta(t, y, u) \quad (32)$$

où (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) et $(\tilde{G}_{12}, \tilde{G}_{22})$ représentent respectivement les partitions des matrices \bar{Q} et \tilde{G}_1 .

Proposition 2 : Si le gain de la fonction $\rho(t, y, u)$ de (5) vérifie

$$\begin{aligned} \rho(t, y, u) &\geq 2 \|\tilde{A}_{21}\| \mu_1 \beta / \mu_o + \|\bar{Q}_2\| (\beta + \beta_0 + \beta_1) \\ &\quad + \|\tilde{F}_2\| \alpha(t) + \eta_0 \end{aligned} \quad (33)$$

où η_0 est un scalaire positif, alors le mouvement de glissement est maintenu sur la surface S_g pendant un temps fini même en présence des défauts, des incertitudes et des retards.

Preuve. voir la référence [13].

IV. RECONSTRUCTION ROBUSTE DES DÉFAUTS ACTIONNEURS

Dans cette partie, on propose de reconstruire les défauts actionneurs $f_i(t, u)$ en minimisant l'effet d'incertitude $\zeta(t, y, u)$. Nous passons à fixer des hypothèses qui décrivent cette reconstruction par une LMI. Reformulation le problème de synthèse d'observateur sous forme d'une autre LMI. La résolution des LMIs de reconstruction et de synthèse aboutit au SMO désiré. Durant le mode glissant $\tilde{e}_y = \dot{\tilde{e}}_y = 0$, par la suite les équations (31) et (32) deviennent dans ce cas

$$\dot{\tilde{e}}_1(t) = \tilde{A}_{11} \tilde{e}_1(t) - (\bar{Q}_1 + L \bar{Q}_2) \zeta(t, y, u) \quad (34)$$

$$0 = \tilde{A}_{12} \tilde{e}_1(t) + v_{\text{éq}} - \tilde{F}_2 f_i(t, u) - T \bar{Q}_2 \zeta(t, y, u) \quad (35)$$

et $v_{\text{éq}}$ est le signal d'injection de l'erreur de sortie (5) qui est remplacée par :

$$v_{\text{éq}} = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \frac{\bar{P}_o e_y(t)}{\|\bar{P}_o e_y(t)\| + \delta} & \text{si } e_y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (36)$$

avec δ est une constante positive qui représente le terme de lissage. Comme $v_{\text{éq}}$ est sensible aux défauts et responsable du maintien du mouvement de glissement même en présence des défauts. D'où l'idée de l'utiliser pour reconstruire les défauts actionneurs $\hat{f}_i(t, u)$. Ceci peut être obtenu en minimisant l'effet des incertitudes et des retards sur le signal reconstruit des défauts dans le but que $\hat{f}_i(t, u) \rightarrow f_i(t, u)$ en un temps fini.

A partir des équations (34) et (35) et en utilisant le théorème de superposition, nous obtenons :

$$v_{\acute{e}q} = [\tilde{A}_{21}(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}(\tilde{Q}_1 + L\tilde{Q}_2) + T\tilde{Q}_2]\zeta(t, y, u) + \tilde{F}_2 f_i(t, u) \quad (37)$$

où s est la variable de Laplace.

L'idée maintenant est d'extraire, à partir de (37), les défauts actionneurs estimés $\hat{f}_i(t, u)$.

Etant donné que

$$\tilde{F}_2 = T \bar{F}_2 = T \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}_o \end{bmatrix} \quad (38)$$

où \bar{F}_o est une matrice non singulière, alors pour une matrice arbitraire $W_1 \in \mathfrak{R}^{q \times (p-q)}$ nous pouvons facilement vérifier que

$$\begin{bmatrix} W_1 & \bar{F}_o^{-1} \end{bmatrix} T^T \cdot T \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}_o \end{bmatrix} = I \quad (39)$$

Il vient alors d'écrire

$$\hat{f}_i(t, u) = G(s)\zeta(t, y, u) + f_i(t, u) \quad (40)$$

Où la matrice de transfert $G(s)$ est donnée par :

$$G(s) = W\bar{A}_{21}(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}(\bar{M}_1 + L\bar{Q}_2) + W\bar{Q}_2 \quad (41)$$

avec $\bar{A}_{21} = T^T \tilde{A}_{21}$ et $WT^T T\bar{Q}_2 = W\bar{Q}_2$.

En notant que $W = \begin{bmatrix} W_1 & \bar{F}_o^{-1} \end{bmatrix}$, l'équation (40) peut se mettre sous la forme

$$\hat{f}_i(t, u) = WT^T v_{\acute{e}q} \quad (42)$$

Il est clair que la matrice W_1 n'a pas d'effet dans (39). Elle va être exploitée pour minimiser l'effet d'incertitudes sur le signal reconstruit $\hat{f}_i(t, u)$, ce qui revient à minimiser la norme L_2 du gain entre les signaux des entrées exogènes $\zeta(t, y, u)$ et $\hat{f}_i(t, u)$. Il existe une fonction de transfert $G(s)$ qui relie les deux signaux, donc ceci est équivalent à la minimisation de la norme H_∞ de $G(s)$. Pour cette raison, nous utilisons le "lemme réel borné" pour formuler ce problème sous forme des LMIs [1].

Ainsi, nous abordons un problème d'optimisation H_∞ dans lequel nous devons avoir $\|G_\zeta \hat{f}_i\|_\infty < \gamma$, où γ est un scalaire

positif à minimiser en respectant les matrices variables \hat{P} , L , et W_1 , qui vérifient l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{P}\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{11}^T \hat{P} & -\hat{P}\tilde{Q}_1 & -(W\bar{A}_{21})^T \\ -\tilde{Q}_1^T \hat{P} & -\gamma I & (W\bar{Q}_2)^T \\ -W\bar{A}_{21} & W\bar{Q}_2 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (43)$$

où $\hat{P} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ est une matrice symétrique définie positive. La matrice \bar{P} est donnée par (10) peut être aussi mise sous la forme suivante :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12}^T & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (44)$$

avec $\bar{P}_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$, $\bar{P}_{22} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, $P_{12} = [P_{121} \ 0]$ et $P_{121} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (p-q)}$. Par identification entre (10) et (44) nous obtenons

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_{11} \quad (45)$$

$$L = \bar{P}_{11}^{-1} \bar{P}_{12} \quad (46)$$

$$\bar{P}_2 = \bar{P}_{22} - \bar{P}_{12}^T \bar{P}_{11}^{-1} \bar{P}_{12} \quad (47)$$

Il vient alors d'écrire

$$\bar{P}_o = T(\bar{P}_{22} - \bar{P}_{12}^T \bar{P}_{11}^{-1} \bar{P}_{12})T^T \quad (48)$$

Choisissons $\hat{P} = \bar{P}_{11}$ et en utilisant l'équation (46), nous obtenons

$$\hat{P}\tilde{A}_{11} = \bar{P}_{11}\tilde{A}_{11} = \bar{P}_{11}\bar{A}_{11} + \bar{P}_{12}\bar{A}_{21} \quad (49)$$

$$\hat{P}\tilde{Q}_1 = \bar{P}_{11}\tilde{Q}_1 = \bar{P}_{11}\bar{Q}_1 + \bar{P}_{12}\bar{Q}_2 \quad (50)$$

D'où l'inégalité (43) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{11}\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{11}^T \bar{P}_{11} & -\bar{P}_{11}\tilde{Q}_1 & -(W\bar{A}_{21})^T \\ -\tilde{Q}_1^T \bar{P}_{11} & -\gamma I & (W\bar{Q}_2)^T \\ -W\bar{A}_{21} & W\bar{Q}_2 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

Nous remarquons que l'inégalité (51) est affine par rapport aux variables \bar{P}_{11} , \bar{P}_{12} , W_1 et γ .

Pour que l'observateur obtenu soit valable pour la reconstruction robuste des défauts qui affectent le système linéaire incertain (1), posons que le gain \bar{G}_1 vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}(\bar{A} - \bar{G}_1 \bar{C}) + (\bar{A} - \bar{G}_1 \bar{C})^T \bar{P} & \bar{P}(\bar{G}_1 D_d - B_d) & E^T \\ (\bar{G}_1 D_d - B_d)^T \bar{P} & -\gamma_0 I & H^T \\ E & H & -\gamma_0 I \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

où $B_d \in \mathfrak{R}^{n \times (p+k)}$, $D_d \in \mathfrak{R}^{p \times (p+k)}$, $E \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ et $H \in \mathfrak{R}^{q \times (p+k)}$.

Dans la suite, nous allons montrer que cette dernière inégalité nous permet, d'une part de déterminer les valeurs numériques des gains d'observateur et d'autre part d'introduire les résultats trouvés dans la partie précédente, c'est-à-dire il faut faire la synthèse d'une inégalité qui vérifie les conditions de stabilité où l'inégalité (51) doit être une condition nécessaire pour l'existence de cette inégalité. Ceci est garanti par l'inégalité (52). La matrice $B_d = [0 \ \bar{Q}]$ dépend de la distribution

d'incertitudes. A noter que $D_d = [D_1 \ 0]$ est une matrice constante qui caractérise les performances de la partie linéaire d'observateur où $D_1 \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ est une matrice non singulière.

$H = [0 \ H_2]$ où $H_2 \in \mathfrak{R}^{q \times k}$ dépend de W_1 .

$E = [E_1 \ E_2]$ avec $E_1 \in \mathfrak{R}^{q \times (n-p)}$ dépend aussi de W_1 .

Nous remarquons que l'inégalité (52) n'est pas affine, pour ceci définissons

$$Y = \bar{P}\bar{G}_1 \quad (53)$$

En utilisant l'équation (53), l'inégalité (52) devient :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} - YC - (YC)^T & E^T & YD_d - \bar{P}B_d \\ E & -\gamma_0 I & H \\ (YD_d - \bar{P}B_d)^T & H^T & -\gamma_0 I \end{bmatrix} < 0 \quad (54)$$

Ainsi, à partir des structures des matrices D_d , H , B_d et D_d , nous remarquons que :

$$D_d H^T = 0 \quad (55)$$

et que

$$D_d B_d^T = 0 \quad (56)$$

En utilisant le complément de Schur et les équations (55) et (56), l'inégalité (54) se simplifie pour être sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} + Q(P, Y) & \gamma_o^{-1}(E - \bar{P}B_d H^T) \\ \gamma_o^{-1}(E - \bar{P}B_d H^T)^T & -\gamma_o I + \gamma_o^{-1} H H^T \end{bmatrix} < 0 \quad (57)$$

avec

$$Q(P, Y) := \Delta - \gamma_o C^T (D_d D_d^T)^{-1} C + \gamma_o^{-1} P B_d B_d^T P \quad (58)$$

et

$$\Delta := \gamma_o^{-1} (Y D_d D_d^T - \gamma_o C^T) D_x^{-1} (Y D_d D_d^T - \gamma_o C^T)^T \quad (59)$$

Le choix de

$$Y = \gamma_o C^T (D_d D_d^T)^{-1} \quad (60)$$

rend le terme Δ nulle.

Nous pouvons noter que le terme Δ ne respecte pas l'affinité qui est une obligation dans la résolution des LMIs. Ainsi, en utilisant le complément de Schur et l'équation (59), l'inégalité (57) est faisable si :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} - \gamma_o C^T (D_d D_d^T)^{-1} C & -\bar{P}B_d & E^T \\ -B_d^T \bar{P} & -\gamma_o I & H^T \\ E & H & -\gamma_o I \end{bmatrix} < 0 \quad (61)$$

En substituant (53) et (60), nous obtenons

$$\bar{G}_l = \gamma_o \bar{P}^{-1} C^T (D_d D_d^T)^{-1} \quad (62)$$

Par la suite, nous avons achevé la détermination de l'observateur (4). Pour que cet observateur soit valable pour la reconstruction robuste des défauts actionneurs, il faut relier l'inégalité (61) avec l'inégalité de reconstruction (51). En outre, pour que l'inégalité (61) soit vérifiée il faut que :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{11}^T \bar{P}_{11} & -\bar{P}_{11} \tilde{Q}_1 & E_1^T \\ -\tilde{Q}_1^T \bar{P}_{11} & -\gamma I & H_2^T \\ E_1 & H_2 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (63)$$

Donc, pour cette raison, il faut que l'inégalité (51) soit une nécessité pour que l'inégalité (61) soit vraie, il faut que $E_1 = -W A_{21}$ et $H_2 = W Q_2$. En conséquence, cette méthode consiste à minimiser γ en respectant les matrices variables P et W_1 qui vérifient les inégalités (51), (61) et (10) où $\gamma_o \in \mathfrak{R}_+$ et $D_1 \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ sont des paramètres de synthèse fixés par l'utilisateur suivant les paramètres du system. Ainsi, ces deux derniers paramètres accordent les gains d'observateur. L'augmentation de γ_o provoque la minimisation de γ et par conséquent, nous obtenons un gain \bar{G}_l élevé. De même, la diminution de D_1 a le même effet sur les gains.

Soit γ_{min} la valeur minimale de γ qui satisfait (51). Ainsi, l'inégalité (51) est un bloc de l'inégalité (61), donc c'est logique d'avoir toujours $\gamma_{min} \leq \gamma_o$.

Pour résoudre ce problème d'optimisation convexe, nous utilisons le logiciel MATLAB [7] pour trouver γ, P et W_1 .

Ainsi, nous pouvons calculer la matrice $L = \bar{P}_{11}^{-1} \bar{P}_{12}$ à partir de

(46), les gains $\bar{G}_l = \gamma_o \bar{P}^{-1} C^T (D_d D_d^T)^{-1}$ à partir de (62),

$\bar{G}_n = \begin{bmatrix} -L T^T \\ T^T \end{bmatrix}$ à partir de (7) et à partir de (48)

$\bar{P}_o = T (\bar{P}_{22} - \bar{P}_{12}^T \bar{P}_{11}^{-1} \bar{P}_{12}) J^T$ où l'observateur à mode glissant est déterminé.

V. APPLICATION NUMERIQUE

Dans cette section, nous nous intéressons à valider et montrer la robustesse vis-à-vis des incertitudes et des retards de l'approche théorique présentée dans ce travail.

A. Système et préliminaires

Nous considérons que le système (1) est caractérisé par les données suivantes [15] :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h(t) = \frac{h_m}{2} (1 + \sin(\omega_h t)), h_m = 3, \omega_h = 3s^{-1}.$$

B. Présentation et simulation d'observateur

Les valeurs des paramètres de l'observateur à mode glissant (4) sont :

$$\rho = 150, \delta = 0.0001, D_1 = 10I_4, \gamma_o = 1 \text{ et } \gamma = 0.3692$$

$$G_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0587 & -0.11093 & 0.1046 & 0.0305 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_l = \begin{bmatrix} 0.0019 & 0.0015 & -0.0008 & -0.0001 \\ 0.0015 & 0.0015 & -0.0004 & -0.0001 \\ -0.0008 & -0.0004 & 0.0006 & 0 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0002 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0080 \end{bmatrix}$$

$$P_o = \begin{bmatrix} 88.6308 & -72.6915 & 64.5436 & 0.7116 \\ -72.6915 & 68.0804 & -47.1014 & -0.4699 \\ 64.5436 & -47.1014 & 67.1705 & 0.6499 \\ 0.7116 & -0.4699 & 0.6499 & 1.2510 \end{bmatrix},$$

$$L = [0.0305 \ 0.0653 \ -0.1485 \ 0]$$

$$W = [-0.0607 \ 0.5089 \ 2.5383 \ -1.4120]$$

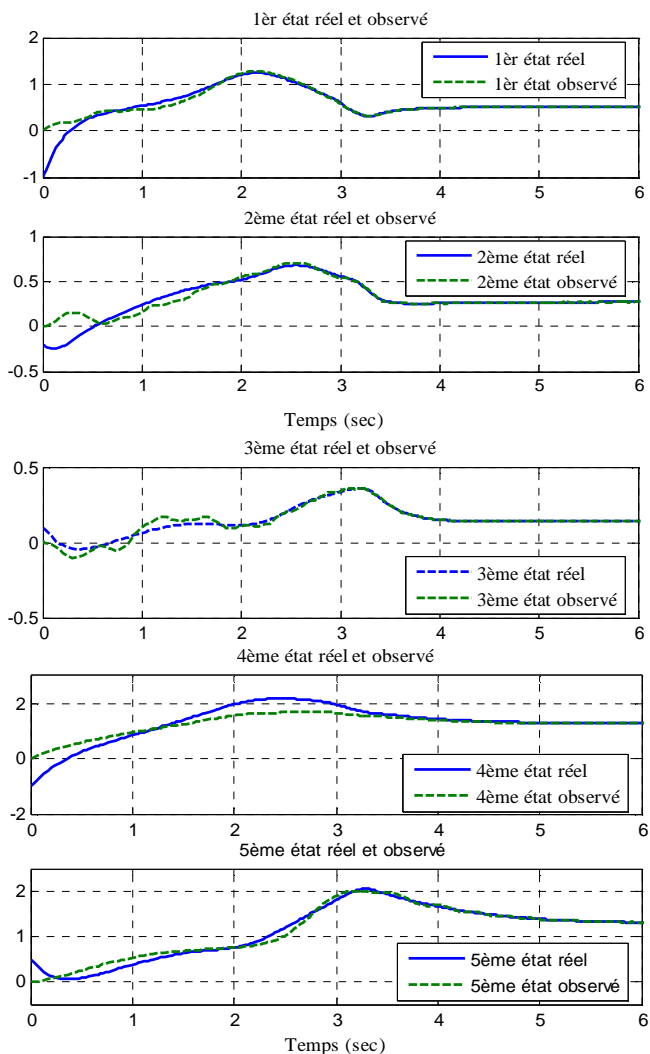


Fig.1. Evolution des états réels et observés du système réel pour la

condition initiale $x(0) = [-1 \ -0.2 \ 0.1 \ -1 \ 0.5]^T$,

$$\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ et } \xi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 & 2 & 0.8 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

La figure 1 montre les performances de l'observateur à mode glissant de cette classe de systèmes incertains à retard. Par la suite, nous allons montrer les performances de l'observateur dans la détection et la reconstruction robuste des défauts

C. Défaut actionneur et son estimé

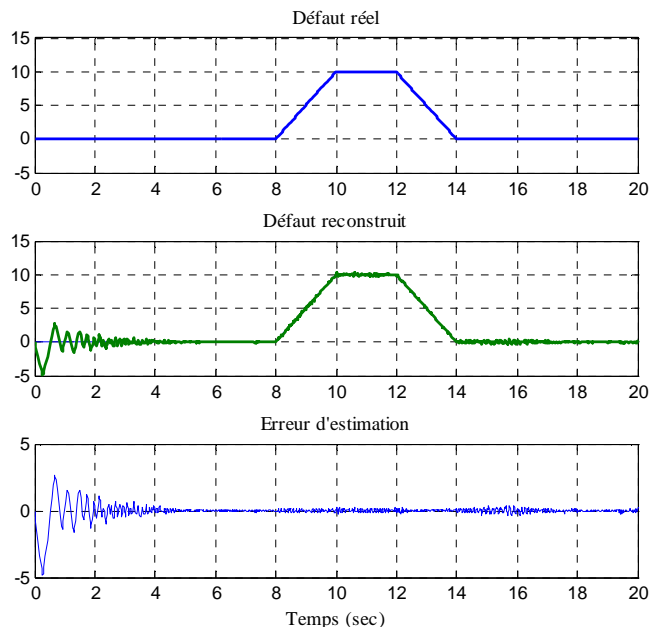


Fig.2. Reconstruction robuste du défaut actionneur

$$\text{pour } \xi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 & 2 & 0.8 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

A partir de la figure.2, nous remarquons que le signal du défaut actionneur et le signal de son estimé son presque identiques malgré la présence des incertitudes et des retards, ce qui montre les performances de l'observateur synthétisé en terme de robustesse.

VI. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons abordé la synthèse d'un observateur à mode glissant appliqué à la FDI des systèmes linéaires incertains en utilisant les LMIs comme outil de synthèse. L'approche proposée est basée sur la minimisation de l'effet d'incertitude sur le signal reconstruit de défaut actionneur par la minimisation de la norme H_∞ de la fonction de transfert entre les incertitudes et les retards et les défauts actionneurs estimés. Nous avons présenté une application numérique pour valider les résultats théoriques développés.

REFERENCES

- [1] Chilali M. Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, n° 3, pp. 358-367, 1996.
- [2] Edwards C. Spurgeon S. K. On the development of discontinuous observers. *International Journal of control*, vol. 59, pp. 1211-1229, 1994.
- [3] Edwards C. Spurgeon S. K. *Sliding Mode Control: theory and Applications*, Taylor & Francis, 1998.
- [4] Edwards C. Spurgeon S. K. Patton R. Sliding mode observer for fault detection and isolation, *Automatica*, vol. 36, n° 4, pp. 541-553, 2000.
- [5] Frank P.M. Fault diagnosis in dynamic system using analytical and knowledge based redundancy - a survey and some new results, *Automatica*, vol. 26, n°3, pp. 459-474, 1990.
- [6] Frank P. M. Ding, X. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems, *Journal of Process Control*, vol. 7, n°6, pp. 403-424, 1997.
- [7] Gahinet P. Nemirovski A. Laub A. Chilali M. LMI Control toolbox, User Guide. Math Works, Inc., 1995.
- [8] Gertler J. Survey of model-based failure detection and isolation in complex plant, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 3, pp. 3-11,

1988.

- [9] Patton R. J. Chen J. A survey of robustness problems in quantitative model-based fault diagnosis, *Applied Maths and Computer Science*, vol. 3, n°3, pp. 339-416, 1993.
- [10] Seuret A. Floauet T. Richard J. P. Spurgeon S. K. A sliding mode observer for linear systems with unknown time varying delay, American Control Conference, New York Cit, USA, 2007.
- [11] Tan C. P. Edwards C. An LMI Approach for Designing Sliding Mode Observers, Proceeding of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, pp. 2587-2592, 2000.
- [12] Tan C. P. Edwards C. Sliding mode observers for detection and reconstruction of sensors faults, *Automatica*, vol. 38, pp. 1815-1821, 2002.
- [13] Tan C. P. Edwards C. Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 13, n°5, pp.433-463, 2003.
- [14] Utkin V. I. *Sliding mode in Control Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [15] Xian M. Z. Qing L. H. A less conservative method for designing H_∞ filters for linear time-delay systems, *International Journal of robust and nonlinear control*, vol. 19, pp. 1376-1396, 2009.