

Identification par modèles non entiers linéaires d'un système thermique à haute température

Asma MAACHOU¹, Rachid MALTI¹, Pierre MELCHIOR¹,
Jean-Luc BATTAGLIA², Alain OUSTALOU¹ et Bruno HAY³

¹ IMS, UMR 5218 CNRS
Université Bordeaux 1, IPB/ENSEIRB-MATMECA
Bât A4, 351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex, France
{prenom.nom}@ims-bordeaux.fr

² TREFLE, UMR 8508 CNRS,
Université de Bordeaux 1-ENSAM
Esplanade des Arts et Métiers,
33405 Talence Cedex, France.
jean-luc.battaglia@bordeaux.ensam.fr

³ LNE, Centre Métrologie et Instrumentation
29, avenue Roger Hennequin, 78197 Trappes Cedex
bruno.hay@lne.fr

Résumé — Ce travail en simulation vise à préparer une expérimentation sur la modélisation thermique d'un échantillon de fer ARMCO à de petites variations de température, mais autour de plusieurs points de fonctionnement. Les objectifs principaux de cet article sont, d'une part, la comparaison de deux méthodes d'identification par modèles linéaires non entiers à partir de données générées par éléments finis avec le logiciel Comsol et, d'autre part, l'identification de l'échantillon autour de trois points de fonctionnement (400K, 600K, 1000K), toujours aux petites variations de température.

Mots-clés— Identification, modèle non entier, filtre à variable d'état, moindre carré, erreur de sortie, modèle linéaire, système thermique.

I. INTRODUCTION

L'identification permet d'obtenir un modèle mathématique d'un système physique à partir de mesures et de connaissances *a priori*. Ces modèles peuvent ensuite servir en :

- commande, afin de réguler le système ou de le stabiliser,
- prédiction, afin de déterminer les sorties à des instants futurs,
- simulation, afin de réaliser des expériences à coûts et temps limités,
- optimisation, afin d'améliorer le rendement d'un processus,
- analyse, afin de caractériser des paramètres inconnus et non mesurables directement.

Evidemment, le choix de la structure du modèle est lié au système étudié et aux finalités de l'identification [1].

La présente étude est consacrée à l'identification d'un système thermique ayant pour entrée un flux thermique et pour sortie une température. L'objectif est de mettre en évidence les limites d'un modèle linéaire aux larges variations de températures. Le modèle choisi est non entier pour des raisons expliquées au paragraphe II. Les données d'identification sont générées par éléments finis en utilisant le logiciel Comsol comme détaillé au paragraphe III. Le paragraphe IV présente deux algorithmes d'identification par modèles non entiers, l'un basé sur la minimisation de l'erreur de prédiction [8,11] et l'autre sur la minimisation de l'erreur de sortie [8]. Ensuite, au paragraphe V, une de ces méthodes est appliquée pour la modélisation de la température autour de trois points de fonctionnement à savoir 400, 600 et 1000K.

II. RAPPELS SUR LES SYSTEMES NON ENTIERS

A. Dérivation non entière

Le XIX^e et XX^e siècles ont vu la naissance de la définition de la dérivation non entière. De nombreux mathématiciens tels que Lacroix, Liouville ou encore Riemman ont contribué au développement du calcul non entier au travers de nombreuses publications [3, 17]. La définition de l'intégration non entière de Riemman-Liouville est donnée par :

$$I^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

où γ est un réel positif, 0 et t les bornes d'intégration et $\Gamma(\gamma)$ la fonction gamma d'Euler. La dérivation non entière est définie comme la dérivée entière d'une intégrale non entière [3] :

$$D^\gamma f(t) = D^{\lfloor \gamma \rfloor} [D^{\gamma-\lfloor \gamma \rfloor} f(t)] \quad (2)$$

où D correspond à l'opérateur de dérivation et $\lfloor \gamma \rfloor$ la partie entière de γ . Une définition discrétisée, celle de Grünwald, peut être obtenue de façon plus naturelle par la généralisation aux réels de la définition entière de la dérivation entière [4, 5] :

$$D^\gamma f(t) = \frac{1}{h^\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(t-kh) \quad (3)$$

avec γ ordre de dérivation quelconque (entier ou non, réel ou complexe). Toutes les simulations numériques effectuées dans cet article utilisent la définition de Grünwald.

Lorsque la fonction f est identiquement nulle pour tout $t \leq 0$, la transformée de Laplace, L , de $D^\gamma f(t)$ est donnée par :

$$L \{ D^\gamma f(t) \} = s^\gamma F(s). \quad (4)$$

La représentation sous la forme d'équation différentielle d'un système non entier s'écrit :

$$y(t) + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + \dots + a_n D^{\alpha_n} y(t) = b_0 D^{\beta_0} u(t) + b_1 D^{\beta_1} u(t) + \dots + b_m D^{\beta_m} u(t). \quad (5)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, les ordres $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_A, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_B]$ étant des nombres réels positifs, entiers ou non entiers. A partir de cette équation différentielle, la fonction de transfert $F(s)$ dans le domaine de Laplace est définie telle que :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^B b_i s^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^A a_j s^{\alpha_j}}. \quad (6)$$

Quand tous les ordres de dérivation sont multiples d'un même ordre, ν , le système est dit commensurable. Dans ce cas la fonction de transfert devient :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{b}_i s^{i\nu}}{1 + \sum_{j=1}^m \tilde{a}_j s^{j\nu}} \quad (7)$$

avec $n = \frac{\beta_B}{\nu}$, $m = \frac{\alpha_A}{\nu}$ et :

$$\begin{aligned} \tilde{b}_i &= b_i \text{ si } i\nu = \beta_i \text{ sinon } \tilde{b}_i = 0 \\ \tilde{a}_j &= a_j \text{ si } j\nu = \alpha_j \text{ sinon } \tilde{a}_j = 0. \end{aligned}$$

De part leur compacité paramétrique, les modèles non entiers sont particulièrement adaptés pour modéliser des systèmes diffusifs [13, 19], tels que les systèmes thermiques [2] ou électrochimiques [20] et des systèmes biologiques [18].

Par ailleurs en identification, la contrainte de commensurabilité est souvent imposée pour limiter le nombre de paramètres à estimer. Dans ce cas, seul un ordre de dérivation est estimé au lieu de $m_A + m_B + 1$ ordres. Néanmoins, pour certains processus, cette commensurabilité est naturelle et c'est notamment le cas en diffusion thermique dans un milieu semi-infini où l'ordre commensurable est 1/2.

B. Intérêt d'un modèle non entier pour la caractérisation thermique

A partir des équations caractérisant le transfert de chaleur dans un milieu semi-infini soumis à une densité de flux de chaleur $\varphi(t)$ sur sa surface S (figure 1), les auteurs de [2, 6, 12] montrent que la modélisation par un système non entier est pertinente.

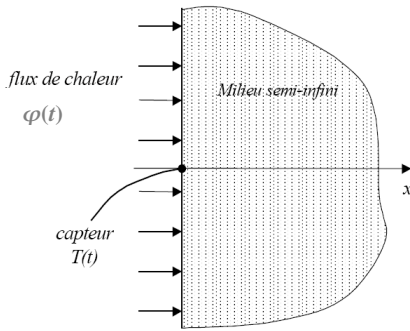


Fig. 1. Flux de chaleur appliqué à la surface d'un milieu semi infini

En effet, en considérant un état initial isotherme et nul, le phénomène de diffusion de chaleur est régi par l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, t > 0 \quad (8)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x,t) = 0, & \text{pour } 0 \leq x < \infty, t = 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\varphi(t)}{S}, & \text{pour } x = 0, t < 0 \end{cases}, \quad (9)$$

où α est la diffusivité thermique et λ la conductivité thermique du matériau.

Sachant que :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}, \quad (10)$$

avec ρ la masse volumique et C_p la capacité thermique, l'expression de la température dans le domaine opérationnel devient :

$$T(x,s) = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho C_p} S} \exp\left(-x \sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) \varphi(s). \quad (11)$$

La décomposition en série de Padé conduit à l'approximation suivante:

$$T(x,s) = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho C_p} S} \frac{\sum_{k=0}^p \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!} \left(-x \sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^k}{\sum_{k=0}^p \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!} \left(x \sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)^k} \varphi(s), \quad (12)$$

mettant en évidence une fonction de transfert fractionnaire ayant comme ordre commensurable 0.5. En posant

$\tilde{b}_i = \sum_{k=0}^p \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!} \left(-x \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^k$ et $\tilde{a}_i = \sqrt{\lambda \rho C_p} S \sum_{k=0}^p \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!} \left(x \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^k$, la fonction de transfert entre le flux et la température (12) devient :

$$G(s) = \frac{T(x,s)}{\varphi(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{b}_i s^{i\nu}}{\sqrt{s} \sum_{j=1}^m \tilde{a}_j s^{j\nu}}. \quad (13)$$

Les phénomènes de diffusion ont déjà été modélisés, pour différentes géométries (planaire, cylindrique ou sphérique) en milieux fini et semi-infini, par des fonctions de transfert fractionnaires du même type que (13) avec un ordre commensurable de 0.5 [15, 16, 2, 7].

III. MODELISATION DE L'ECHANTILLON ARMCO SOUS COMSOL POUR LA GENERATION DE DONNEES

Ce travail vise à préparer une expérimentation sur la modélisation thermique d'un échantillon de fer ARMCO à haute température aux petites variations et autour de plusieurs points de fonctionnement allant de 300 à 1500K. L'échantillon est porté à haute température dans un milieu homogène à l'aide d'un four. Afin de l'isoler des parois du four, il est entouré d'un isolant dont la conductivité thermique est très faible. Un thermocouple est positionné dans l'échantillon pour

mesurer la température au cours du temps en un point situé à une distance d de la surface S où le flux est absorbé. Ce flux est généré par un laser fibré à la longueur d'onde $1 \mu\text{m}$. et piloté en interne par un générateur de fonction et peut être modulé par une fréquence maximale de 10 kHz. La surface excitée S est un disque de 5 mm de rayon. Le modèle géométrique de l'échantillon est présenté sur la figure 2.

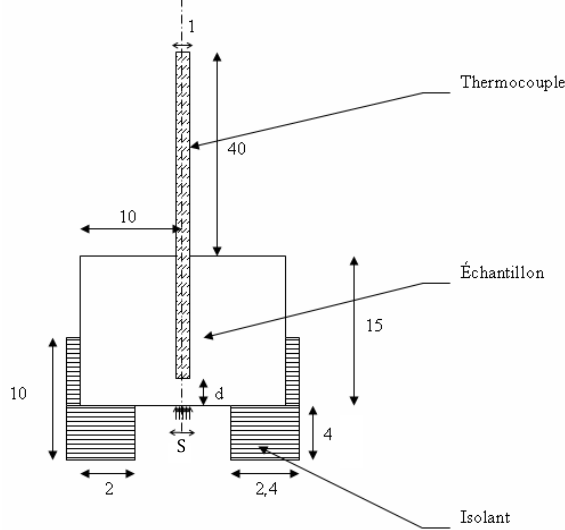


Fig. 2. Géométrie de l'échantillon de fer ARMCO et de son environnement (les distances sont données en mm)

Afin d'avoir une grande sensibilité au flux, le thermocouple de type K (diamètre 0,5 mm) est placé au plus près de la surface excitée ; ainsi, l'acquisition se fait à une distance $d = 1$ mm. Plus le thermocouple est proche, plus le terme en $s^{1/2}$ est prépondérant car x tend vers 0 et l'exponentielle vers 1 dans l'équation (11). Notons que la solution (12) est associée à un transfert 1D dans l'échantillon. Cette configuration n'est donc respectée d'un point de vue expérimental que pour des temps courts, qui permettent aussi de vérifier l'hypothèse de milieu semi-infini. Les propriétés thermiques (conductivité thermique et chaleur spécifique) du matériau dépendent de la température comme le montre la table I [21].

TABLE I

PROPRIETES DU FER ARMCO EN FONCTION DE LA TEMPERATURE

Température	300	400	600	800
Conductivité thermique λ (Wm.K^{-1})	72.7	65.7	53.1	42.2
Chaleur spécifique Cp ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	447	490	574	680
Température	1000	1200	1500	X
Conductivité thermique λ (Wm.K^{-1})	2.3	28.7	31.4	X
Chaleur spécifique Cp ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	975	609	654	X

Pour de grandes variations de température de l'échantillon, l'hypothèse de linéarité n'est donc plus respectée. Or, dans la mesure où les méthodes d'identification testées servent à déterminer des modèles linéaires, il est nécessaire que le

signal d'entrée ne provoque pas de fortes variations de température de façon à rester dans le domaine de linéarité.

Afin de tester les différentes méthodes d'identification et de modéliser le système thermique autour de plusieurs points de fonctionnement, les données ont été générées en simulation à l'aide du logiciel Comsol. Le modèle est créé pour une analyse temporelle dans le module *transfert de chaleur par conduction* de Comsol. Le transfert de chaleur (8) à l'intérieur de l'échantillon y est modélisé par éléments finis. La géométrie choisie est de type symétrie axial en 2D. La technique de maillage est laissée à la valeur par défaut : quadratique de Lagrange. Le simulateur Comsol présente une configuration idéale, c'est-à-dire sans bruit de mesure et sans séparation entre le thermocouple de l'échantillon de fer et entre l'échantillon de fer et l'isolant. Dans la réalité, il faudra prendre en compte le bruit de mesure, l'air ou la colle entre les composants qui modifient les caractéristiques thermiques de l'ensemble. Cependant, le simulateur permet de préparer l'expérience en donnant un ordre de grandeurs des variations du système réel.

De plus, la période d'échantillonnage de $h = 0.01$ seconde est atteignable par le système d'acquisition du banc d'essai et permet de fixer la fréquence haute du signal d'entrée. Une séquence binaire pseudo-aléatoire (*sbpa*) d'amplitude comprise entre 0 et 60MW/m^2 et de durée totale de 10 secondes est choisie comme signal d'entrée (densité de flux). Elle est constituée de 9 bascules D et son plus petit créneau a une durée de 0.01 seconde de manière à exciter convenablement les fréquences [0.02, 20] Hz. La température de sortie est mesurée à l'emplacement du thermocouple à la distance d de la surface excitée. Deux jeux de données sont générés autour de chaque point de fonctionnement : un jeu dédié à l'identification et l'autre à la validation.

IV. COMPARAISON DES METHODES D'IDENTIFICATION

Le modèle choisi pour l'identification du système thermique est de type (13). Dans la mesure où ce modèle contient un intégrateur pur d'ordre 0.5, il est préférable d'intégrer d'abord le signal d'entrée :

$$\tilde{U}(s) = \frac{U(s)}{\sqrt{s}}, \quad (14)$$

puis d'estimer les paramètres du modèle :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{b}_i s^{iv}}{1 + \sum_{j=1}^m \tilde{a}_j s^{jv}} \quad (15)$$

entre l'entrée intégrée $\tilde{U}(s)$ et la sortie $Y(s)$.

Les paramètres du modèle sont regroupés dans le vecteur

$$\theta = [\tilde{b}_0 \tilde{b}_1 \dots \tilde{b}_n \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_m]. \quad (16)$$

La sortie du modèle, $y(t)$, est supposée entachée d'un bruit de mesure $p(t)$ additif blanc :

$$y^*(t) = y(t) + p(t). \quad (17)$$

Les données d'entrée et de sortie sont échantillonnées à pas fixe, h et K données sont recueillies de $k = 0$ à $k = K-1$.

Deux méthodes d'identification de système linéaire non entier, à savoir la méthode **srivcf** pour "*Simplified Refined*

"Instrumental Variable for Continuous-time Fractional Systems" minimisant l'erreur de prédiction et la méthode **oe** pour "output error" minimisant l'erreur de sortie, sont comparées.

A. Méthode **srivcf**

La méthode **srivcf** [14] calcule itérativement la variable instrumentale optimale. Le modèle auxiliaire est initialisé à partir de l'estimée obtenue par la méthode utilisant le filtre de variable d'état :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_f}\right)^\nu\right)^N}. \quad (18)$$

où la fréquence de coupure ω_f et l'ordre N sont définis en fonction de la bande passante du système et des caractéristiques du bruit. L'estimation du vecteur de paramètres initial se fait alors par la méthode des moindres carrés :

$$\hat{\theta} = (\Phi_f^T \Phi_f)^{-1} \Phi_f^T Y_f^* \quad (19)$$

avec

$$\Phi_f = [\varphi_f^T(0) \quad \varphi_f^T(h) \cdots \varphi_f^T((K-1)h)] \quad (20)$$

et

$$Y_f^* = [y_f^*(0) \quad y_f^*(h) \cdots y_f^*((K-1)h)]. \quad (21)$$

où

$$\varphi_f(t) = [u_f(t), D^{(0.5)}u_f(t), -D^{(0.5)}y_f(t), -D^{(1)}y_f(t), -D^{(1.5)}y_f(t)] \quad (22)$$

est le vecteur de régression contenant les dérivées de l'entrée et de la sortie filtrées. Le vecteur de paramètres (19) ainsi obtenu permet d'initialiser un modèle auxiliaire

$$\hat{F}(s) = \frac{\hat{B}(s)}{\hat{A}(s)}. \quad (23)$$

Aux itérations suivantes, le filtre $H(s)$ de (18) est remplacé par :

$$H(s) = \frac{1}{\hat{A}(s)} \quad (24)$$

L'estimation paramétrique se fait toujours par la méthode des moindres carrés :

$$\hat{\theta} = (\Phi_f^{ivT} \Phi_f)^{-1} \Phi_f^{ivT} Y_f^*, \quad (25)$$

où Φ_f^{ivT} s'obtient en remplaçant $\varphi_f(t)$ par le nouveau vecteur de régression $\varphi_f^{iv}(t)$ dans (22) et où $\varphi_f^{iv}(t)$ s'obtient en remplaçant la sortie filtrée du système $y_f^*(t)$ par la sortie filtrée du modèle parallèle (sortie de la variable instrumentale) $y_f^{iv}(t)$. Cette procédure est répétée jusqu'à convergence de l'algorithme itératif. La méthode **srivcf** est détaillée sur la figure 3.

La méthode **srivcf** n'est pas biaisée en présence d'un bruit additive blanc [11].

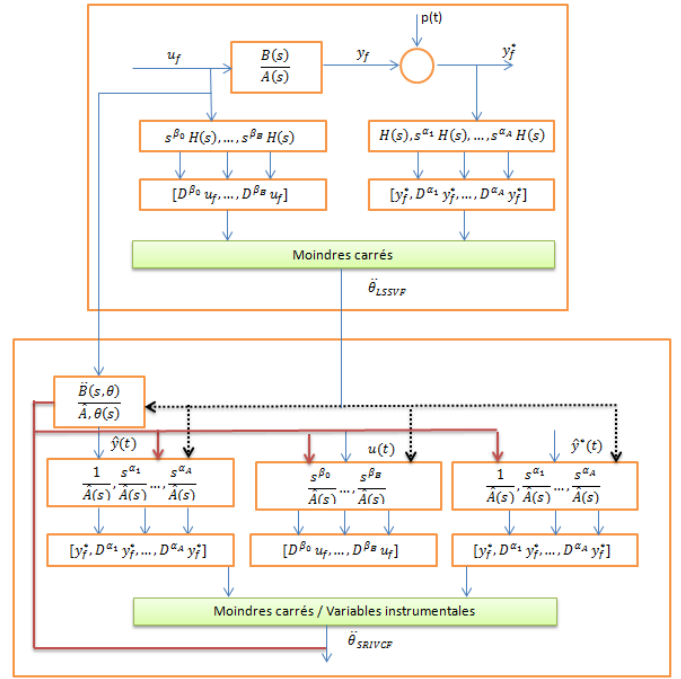


Fig. 3. Méthode **Srivcf**

B. Méthode **oe**

La méthode à erreur de sortie [8, 10], **oe** pour "output error", se base sur la minimisation du critère quadratique de l'erreur de sortie :

$$J = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (y^*(kh) - L^{-1}\{G(s)\} * u(kh))^2. \quad (26)$$

L'estimation paramétrique peut se faire itérativement par la méthode Levenberg-Marquardt :

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left\{ J''_{\theta\theta} + \xi I \right\}^{-1} J'_{\theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_i} \quad (27)$$

où J'_{θ} , $J''_{\theta\theta}$ et ξ sont respectivement le gradient, le Hessien et un paramètre de contrôle propre à cette méthode implémentée dans la fonction **lsqnonlin** de la toolbox "Optimization" de Matlab.

La méthode **oe** n'est pas biaisée en présence d'un bruit additive blanc [11].

C. Application sur l'échantillon de fer ARMCO à 600K

Afin de comparer les deux méthodes d'identification dans un contexte bruité, un bruit blanc, de rapport signal sur bruit de 20 dB, est ajouté au signal de sortie du simulateur Comsol. Les critères de comparaison choisis sont le temps de calcul, les critères quadratiques résiduels calculés à partir de l'entrée intégrée \tilde{u}_{id} et de la sortie bruitée y_{id}^* du jeu d'identification,

$$J_{id} = \frac{100}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (y_{id}^*(kh) - L^{-1}\{G(s)\} * \tilde{u}_{id}(kh))^2 \quad (28)$$

et du jeu validation

$$J_{val} = \frac{100}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (y_{val}(kh) - L^{-1}\{G(s)\} * \tilde{u}_{val}(kh))^2. \quad (29)$$

Par analogie aux systèmes rationnels, l'ordre du numérateur est fixé à l'ordre du dénominateur moins l'ordre commensurable : $n = m - v$. Ensuite, les critères quadratiques résiduels (28) et (29) sont évalués en fonction de m et reportés dans la table II.

TABLE II - CRITERES QUADRATIQUES RESIDUELS EN FONCTION DU NOMBRE DE PARAMETRES

m	1	2	3	4	5
Jid	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$
Jval	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$

Au vue des résultats de la table II, le meilleur choix de l'ordre recherché est $m = 2$. Ainsi, le modèle (15) se réduit à :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5}}{1 + a_1 s^{0.5} + a_2 s^1} \quad (30)$$

Une simulation de Monte Carlo de 200 réalisations est effectuée avec un RSB de 20 dB. Pour chaque réalisation, les paramètres du modèle (30) sont estimés selon les méthodes **srivcf** et **oe** décrites aux paragraphes IV.A et IV.B.

TABLE III - CRITERE DE PERFORMANCE POUR L'IDENTIFICATION A 600K (MOYENNE POUR 200 SIMULATIONS), σ désigne l'écart-type

Méthode	Srivcf		Oe	
	moyenne	σ	moyenne	σ
b_1	$2.45 \cdot 10^{-5}$	$0.03 \cdot 10^{-5}$	$2.45 \cdot 10^{-5}$	$0.03 \cdot 10^{-5}$
b_0	$1.82 \cdot 10^{-5}$	$0.008 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-5}$	$0.008 \cdot 10^{-5}$
a_2	0.250	0.002	0.250	0.002
a_1	-0.090	0.005	-0.090	0.005
$J_{\text{idbruit}} (10^{-3})$	5.55		5.55	
$J_{\text{val}} (10^{-5})$	5.63		5.63	
temps	5.98		39.32	

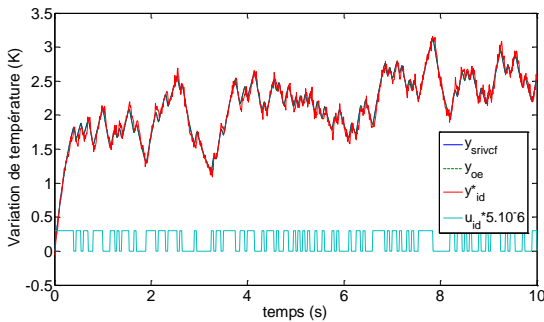


Fig. 4. a) Comparaison entre la sortie des modèles et la sortie du système sur le jeu de données d'identification à 600 K

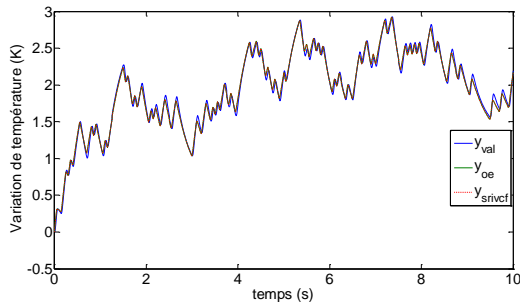


Fig. 4. b) Comparaison entre la sortie des modèles et la sortie du système sur le jeu de données de validation à 600 K

Les algorithmes **oe** et **srivcf** permettent de converger vers le même vecteur de paramètres à condition qu'ils soient correctement initialisés, comme présenté sur la table III et la figure 4. Le modèle ainsi estimé est comparé à la réponse du simulateur sur un échelon d'amplitude 60 MW/m^2 sur la figure 5. Cette comparaison montre que le modèle estimé est proche du système issu du simulateur Comsol

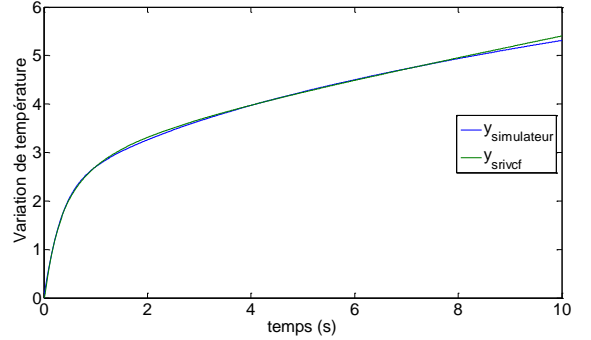


Fig. 5. Comparaison entre la sortie d'un modèle estimé et la sortie du jeu de validation à 600 K pour un échelon de 60 MW/m^2

Le temps de calcul est cependant significativement moins important pour la méthode **srivcf**. Pour cette raison, ce sera l'algorithme d'identification utilisé par la suite.

V. APPLICATION A LA MODELISATION DU SYSTEME THERMIQUE AUX HAUTES TEMPERATURES

L'échantillon de fer ARMCO est maintenant identifié aux hautes températures, à savoir 400, 600 et 1000 K. Dans l'expérimentation sous-jacente à ce travail de simulation, un four sera utilisé pour maintenir l'échantillon à ces températures.

Les modèles obtenus entre la densité de flux et la température à 400, 600 et 1000K sont respectivement donnés par :

$$G_{400} = \frac{1.88 \times 10^{-5} + 1.74 \times 10^{-5} s^{0.5}}{\sqrt{s(1 - 0.103s^{0.5} + 0.163s^1)}} \quad (31)$$

$$G_{600} = \frac{1.81 \times 10^{-5} + 2.50 \times 10^{-5} s^{0.5}}{\sqrt{s(1 - 0.0856s^{0.5} + 0.254s^1)}} \quad (32)$$

et

$$G_{1000} = \frac{1.83 \times 10^{-5} + 3.99 \times 10^{-5} s^{0.5}}{\sqrt{s(1 - 0.110s^{0.5} + 0.687s^1)}} \quad (33)$$

Les figures 6, 4 et 7 comparent respectivement la sortie des modèles estimées à 400, 600 et 1000K.

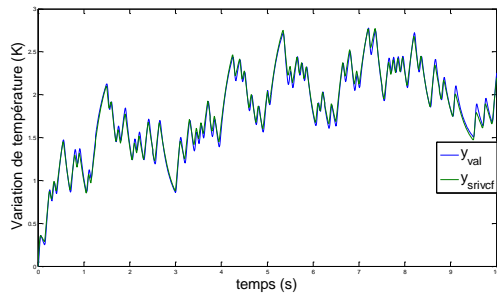


Fig. 6. Sortie estimée et sortie du jeu de validation à 400 K

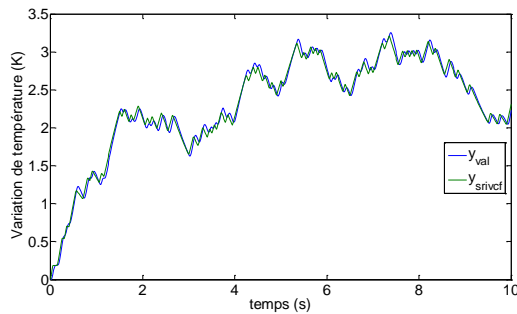


Fig. 7. Sortie estimée et sortie du jeu de validation à 1000 K

En comparant les diagrammes de Bode de la figure 8 et les réponses indicielles de la figure 9 des trois modèles identifiés du même système thermique, il est évident qu'un modèle linéaire unique ne suffit pas pour caractériser le système sur une large plage de température.

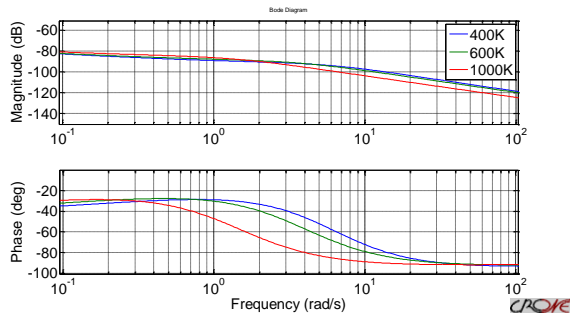
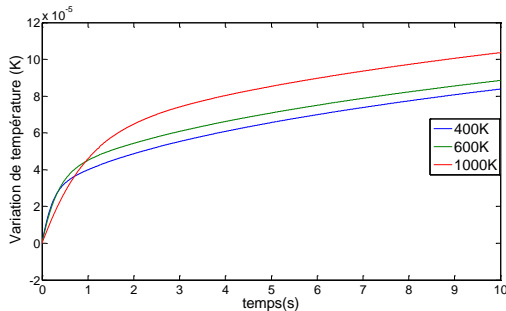


Fig. 8. Diagrammes de Bode de G_{400} , G_{600} , G_{1000}



9. Réponses indicielles de G_{400} , G_{600} , G_{1000}

VI. CONCLUSION

Le paragraphe II rappelle que les modèles non entiers d'ordre commensurable 0.5 se prêtent naturellement à la modélisation de systèmes thermiques. Au paragraphe III les conditions expérimentales d'excitation d'un échantillon d'ARMCO ont été reproduites et les données d'identification générées sous Comsol autour de trois points de fonctionnement 400, 600 et 1000K.

La méthode **srivcf**, décrite au paragraphe IV, a permis d'identifier le système thermique autour de chaque point de fonctionnement. Les trois modèles ainsi obtenus ont des comportements fréquentiels et temporels différents, mettant en avant les limitations d'un modèle linéaire unique pour caractériser le système thermique sur une large plage de variation de température.

Ainsi les prochains travaux consistent, d'une part, à mettre en œuvre l'expérimentation simulée sous Comsol afin de confirmer les résultats obtenus dans cette communication et, d'autre part, à développer un modèle non linéaire non entier.

RÉFÉRENCES

- [1] Ljung L., *System identification, Theory for the user, second edition*, PTR Prentice hall information and system sciences series, Etats-unis, 1999.
- [2] Battaglia J.L., Le Lay L., Bastale J.C., Oustaloup A., Cois O., Utilisation de modèles d'identification non entiers pour la résolution de problèmes inverses en conduction, *Int. J. Therm. Sci.*, n°39, pp 374-389, 2000.
- [3] Miller K.S., Ross B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equation*. Wiley-Interscience publication, 1993.
- [4] Oustaloup A., *La dérivation non entière*. Hermès, Paris, 1995.
- [5] Aoun M., Malti R., Levron F., Oustaloup A., Orthonormal basis functions for modelling continuous-time fractional systems. Sysid-IFAC, Rotterdam Pays-Bas, 2003
- [6] Battaglia J.L., *Heat transfer in materials forming processes*. Wiley Chippenham, Great Britain, 2008.
- [7] Battaglia J.L., Puigsegur L., Kusiak A., Représentation non entière du transfert de chaleur par diffusion. Utilité pour la caractérisation et le contrôle non destructif thermique. *Int. J. Therm. Sci.*, n°43, pp 69-85, 2004.
- [8] Cois O., Système linéaire non entiers et identification par modèle non entier: application en thermique. Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux 1, 17 juillet 2002
- [9] Maddi A., Guessoum A., Berkani D., Belkina O., Etude de la méthode des moindres carré récursive et application au signal de la parole. Sciences of Electronic, Technologies of Information and Telecommunications, SETIT, Tunisie, 17-21 mars 2005.
- [10] Malti R., Victor S., Nicolas O., Oustaloup A., System identification using fractional models: state of art. ASME, Las Vegas, Nevada, USA, 4-7 September 2007.
- [11] Malti R., Victor S., Oustaloup A., Garnier H., An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification. 17th IFAC World Congress, Republic of Korea, 2008.
- [12] Battaglia J.L., Kusiak A., Estimation of heat fluxes during high-speed drilling, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, n°39, pp 750-758, 2005.
- [13] Le Lay L., Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier, Thèse de Doctorat de l'Univ. Bordeaux 1, 20 Octobre 1998.
- [14] Victor S., Malti R., Oustaloup A., Instrumental variable method with fractional differentiation order for continuous-time system identification. 15th IFAC Symposium on System Identification, SYSID, Saint-Malo, 2009.
- [15] Oldham K. B., Spanier J., A general solution of the diffusive equation for semi-infinite geometries, *J. Math. Anal. Appl.*, n°39, pp 655-669, 1972.
- [16] Oldham K. B., Spanier J., Diffusive transport to planar, cylindrical and spherical electrodes, *Electroanal. Chem. Interfacial Electrochem.*, n°41, pp 351-358, 1973.
- [17] Samko A. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science, Minsk, 1987.
- [18] Oustaloup A., Cois O., Le Lay L., *Représentation et identification par modèle non-entier*. Hermes Ed., 2005.
- [19] Sommacal L., Melchior P., Cabelguen J-M., Oustaloup A., Ijspeert J., Fractional Multi-Models of the Gastrocnemius Frog Muscle, *Journal of Vibration and Control*, Sage Publishing, Vol. 14, N° 9-10, pp. 1415-1430, 2008.
- [20] Cugnet M., Sabatier J., Laruelle S., Grugeon S., Sahut B., Oustaloup A., Tarascon J-M., On Lead-acid battery resistance and cranking capability estimation, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol.57, N°3, pp.909-917, 2010.
- [21] http://www.efunda.com/Materials/elements_efunda_thermal_conductivity:iron,