

# Nouvelle méthode de détermination d'un modèle ACP à des fins de diagnostic

Anissa BENAICHA<sup>1</sup>, Gilles MOUROT<sup>2</sup>, Mohamed GUERFEL<sup>3</sup>, Kamel BENOETHMAN<sup>3</sup>, José RAGOT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ATSI – ENIM, Rue Ibn Eljazzar, 5000 Monastir

<sup>2</sup>Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039 – Nancy Université, CNRS  
2, avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandœuvre-Lès Nancy

<sup>3</sup>LARA Automatique – ENIT, BP 37, le Belvédère, 1002 Tunis

{ben.aicha\_anissa, guerfel\_mohamed, kamelbenoethman}@yahoo.fr  
{gilles.mourot, jose.ragot}@ensem.inpl-nancy.fr

**Résumé**— Dans ce papier, une nouvelle méthode de détermination de la structure d'un modèle ACP pour des fins de diagnostic de système est proposée. Cette méthode basée sur le principe de reconstruction de variables détermine les modèles ACP optimisant la détection et la localisation de défauts multiples affectant les différentes variables d'un système. Cette nouvelle méthode a été validée par un exemple de simulation d'un système non-linéaire.

**Mots-clés**— ACP, défauts de capteurs, détection et localisation de défauts, nombre de composantes principales, reconstruction de variables.

## I. INTRODUCTION

L'analyse en composantes principales (ACP) a été largement utilisée pour la détection et la localisation de défauts de capteurs [7], [4], [9], [10]. L'ACP transforme les variables initiales en un nombre restreint de nouvelles variables, appelées composantes principales, qui sont des combinaisons linéaires des variables d'origine tout en préservant la variance des données mesurées sur un système. Cette redondance découle directement des relations linéaires existantes entre les variables du processus. L'ACP définit ainsi un sous-espace de représentation contenant les variations significatives des données et un sous-espace résiduel, porté par les relations de redondance, contenant les bruits de mesures. La détection de défauts est alors réalisée par un indicateur de détection dans un de ces sous-espaces ou dans l'espace total [7]. Classiquement, la localisation des variables défaillantes est effectuée soit par calcul des contributions des variables à l'indicateur de détection, soit par structuration des résidus. La méthode dite des contributions, basée sur une approximation de la contribution d'une variable à l'indicateur de détection, est très sensible aux points de fonctionnement [3]. La structuration des résidus consiste à générer de nouveaux résidus sensibles uniquement à des sous-ensembles particuliers de défauts. L'analyse de ces différents résidus permet ainsi de localiser l'ensemble des variables défaillantes [2].

L'identification d'un modèle ACP consiste à estimer ses paramètres par une décomposition en valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance des données et à déterminer le nombre de composantes principales à retenir. Le nombre de composantes a un impact significatif sur les capacités de détection et de localisation de défauts du modèle ACP [6], [9]. Pour la détermination de ce nombre, de nombreuses règles ont été proposées

dans la littérature [11]. La plupart sont issues de méthodes heuristiques parfois subjectives ou de critères utilisés en identification de système qui privilégient l'approximation de la matrice de données ou la recherche de la structure exacte du système en fonctionnement normal mais pas la détection et la localisation de défauts. *Valle et al.* [11] et *Dunia et al.* [1] ont proposé de déterminer le nombre de composantes qui minimise le critère de la variance moyenne de l'erreur de reconstruction des différentes variables du système. La reconstruction d'une variable ou d'un groupe de variables consiste à estimer cette variable ou ce groupe à partir des autres variables et du modèle ACP. Basée sur les redondances entre variables, la capacité à reconstruire une variable ou à détecter une variable en défaut est liée à la projection de cette variable dans l'espace résiduel. De plus, la reconstruction est couramment utilisée comme méthode de structuration des résidus pour la localisation de défauts [1]. La méthode de détermination du nombre de composantes par reconstruction comporte plusieurs inconvénients. Tout d'abord, étant basée sur la notion de redondance, elle ne permet pas de considérer le cas de la détection et localisation de défauts sur les variables non redondantes. De plus, en déterminant un nombre de composantes unique et donc un modèle ACP "moyen" pour détecter et localiser l'ensemble des défauts simples, elle ne garantit pas la maximisation de la sensibilité à chacun des défauts, ni de la capacité à localiser des défauts multiples. Récemment, *Tamura et al.* [9] ont proposé une nouvelle méthode appelée *SNR* qui cherche non pas un modèle ACP unique mais les modèles ACP dont le nombre de composantes maximise la sensibilité à chacun des différents défauts. En utilisant l'indicateur de détection adapté, cette méthode permet de déterminer le nombre optimal de composantes pour les variables redondantes ou non. Cependant, cette méthode ne prenant pas en compte la localisation de défauts simples ou multiples, l'utilisation des modèles ainsi déterminés peut provoquer de fausses localisations.

Dans ce papier, nous proposons une nouvelle méthode basée sur le principe de reconstruction de variables pour la détermination des modèles ACP optimisant la détection et la localisation de défauts multiples sur les variables redondantes ou non. Cet article est organisé comme suit. La section 2 est un bref rappel sur le principe de l'ACP. La section 3 est consacrée à la générali-

sation du principe de reconstruction et à la méthode de détermination du nombre de composantes. La dernière section illustre l'application des résultats méthodologiques sur les données issues d'un système non-linéaire soumis à des bruits et affecté par un ou plusieurs défauts.

## II. PRINCIPE DE L'ACP

Considérons le vecteur des mesures recueillies sur le système en fonctionnement normal à l'instant  $k$  :

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_m(k)]^T \quad (1)$$

La matrice de données  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times m}$  formée par la concaténation des vecteurs  $\mathbf{x}(k)$  obtenus à différents instants est :

$$\mathbf{X} = [ \mathbf{x}(1) \ \dots \ \mathbf{x}(N) ]^T \quad (2)$$

L'ACP détermine une transformation linéaire optimale (vis-à-vis d'un critère de variance) du vecteur de mesures  $\mathbf{x}$  en un vecteur de nouvelles variables  $\mathbf{t}$  :

$$\mathbf{t}(k) = \mathbf{P}^T \mathbf{x}(k) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(k) = \mathbf{P} \mathbf{t}(k) \quad (3)$$

où  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des composantes principales et  $\mathbf{P} = [ \mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_m ] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est la matrice des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres  $\lambda_j$  issues de la décomposition en vecteurs et valeurs propres de la matrice de corrélation  $\Sigma$  de  $\mathbf{X}$  :

$$\Sigma = \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}_m \quad (4)$$

avec  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_m)$  la matrice diagonale des valeurs propres ordonnées dans l'ordre décroissant.

Les relations (3) trouvent leur intérêt lorsqu'on diminue la dimension de l'espace de représentation. Une fois déterminé le nombre  $\ell$  de composantes à retenir, en considérant le partitionnement suivant :

$$\mathbf{P} = [ \hat{\mathbf{P}} \ \tilde{\mathbf{P}} ], \quad \hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{m \times \ell} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)} \quad (5)$$

le vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  se décompose en un vecteur des estimées  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  et un vecteur des résidus  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  :

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (6)$$

avec :

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{C}}) \mathbf{x}(k) \quad (8)$$

La matrice  $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T$  constitue le modèle ACP du système. Ainsi, ce modèle décompose l'espace des données en deux sous-espaces orthogonaux : l'espace principal de représentation constitué par les  $\ell$  premiers vecteurs propres et l'espace résiduel représenté par les  $m - \ell$  derniers vecteurs propres.

## III. CHOIX DE LA STRUCTURE DU MODÈLE ACP

Dans ce papier, nous proposons une nouvelle méthode basée sur le principe de reconstruction pour la détermination des modèles ACP optimisant la détection et la localisation de défauts multiples sur les variables redondantes ou non. Dans un premier temps, nous allons définir l'indicateur de détection utilisé, puis nous présenterons l'extension du principe de reconstruction à cet indicateur et enfin la méthode proposée pour déterminer le nombre de composantes principales pour les différents défauts simples ou multiples.

### A. Détection dans différents sous-espaces résiduels

Dans le cadre de détection de défauts par ACP, la plupart des travaux publiés utilisent la statistique  $T^2$  de Hotelling pour la détection dans le sous-espace de représentation et l'erreur quadratique d'estimation  $SPE$  ou l'erreur quadratique pondérée d'estimation  $SWE$  pour la détection dans l'espace résiduel [7]. Cependant, l'utilisation de  $T^2$  ne permet pas la détection des défauts de faibles amplitudes car ils peuvent être masqués par les variations significatives des données présentes dans ce sous-espace. D'autre part, pour la détection dans le sous-espace résiduel, *Harkat et al.* [4] ont montré que l'indicateur  $SPE$  est sensible aux erreurs de modélisation et ont proposé d'appliquer le  $SPE$  sur des sous-espaces de l'espace résiduel puisque les défauts affectant certaines variables sont détectables dans des sous-espaces résiduels de dimension bien inférieure à celle associée au  $SPE$ . Cependant, l'utilisation de l'indicateur  $SWE$  peut être plus judicieuse, car tenir compte des variances des résidus peut permettre de détecter des défauts qui peuvent ne pas être détectés au moyen du  $SPE$  [14]. Dans la suite, l'indicateur  $SWE$  appliqué à des sous-espaces de l'espace résiduel est utilisé pour la détection de pannes. On retrouve ici l'idée développée ensuite par *Tamura et al.* [9] que pour maximiser la sensibilité aux défauts, il faut construire autant de modèles ACP que de défauts à détecter.

Le vecteur des résidus est défini par la projection du vecteur de mesure dans l'espace résiduel :

$$\tilde{\mathbf{t}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}_{(i)}^T \mathbf{x}(k) \quad (9)$$

où  $\tilde{\mathbf{P}}_{(i)}$  est la matrice constituée des  $i$  derniers vecteurs propres de  $\mathbf{P}$ .

L'indicateur  $SWE_{(i)}$  est défini pour ce vecteur résiduel par :

$$SWE_{(i)}(k) = \tilde{\mathbf{t}}(k)^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\mathbf{t}}(k), \quad i = \{1, \dots, m\} \quad (10)$$

$$= \mathbf{x}(k)^T \mathbf{H}_{(i)} \mathbf{x}(k) \quad (11)$$

avec :

$$\mathbf{H}_{(i)} = \tilde{\mathbf{P}}_{(i)} \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{(i)}^T \quad (12)$$

où  $\tilde{\Lambda}_{(i)}$  est la matrice diagonale constituée des  $i$  dernières valeurs propres de  $\Lambda$ .

A l'instant  $k$ , le processus est considéré en fonctionnement anormal, si :

$$SWE_{(i)}(k) > \chi_{i,\alpha}^2 \quad (13)$$

où  $\chi_{i,\alpha}^2$  suit une distribution du chi-2 avec  $i$  degrés de liberté pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné. Pratiquement, si ce seuil se révèle inadéquat, il peut être adapté par apprentissage à partir de données saines.

En présence de défauts affectant un ensemble de variables  $\mathbf{F}$ , le vecteur de mesures s'écrit :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \Xi_F \mathbf{f}(k) \quad (14)$$

où  $\mathbf{x}^*$  est le vecteur de mesures sans défauts,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^f$  est le vecteur des amplitudes de défaut et  $\Xi_F$  est la matrice des directions de défauts. Cette matrice orthonormale est constituée de 1 pour indiquer la présence d'une variable en défaut (respectivement de 0 pour une variable saine).

A partir de (14), le vecteur des résidus (9) s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{t}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}_{(i)}^T \mathbf{x}^*(k) + \tilde{\mathbf{P}}_{(i)}^T \Xi_F \mathbf{f}(k) \quad (15)$$

Notons la projection de la direction de défauts dans l'espace résiduel par :

$$\tilde{\Xi}_F = \tilde{\mathbf{P}}_{(i)}^T \Xi_F \quad (16)$$

Pour être détectables quelle que soit l'amplitude des défauts, les défauts doivent être projetés dans l'espace résiduel et donc la condition suivante doit être vérifiée :

$$\|\tilde{\Xi}_F\|_2 = \sigma_{\max}(\tilde{\Xi}_F) \neq 0 \quad (17)$$

où  $\sigma_{\max}(\cdot)$  est la valeur singulière maximale de la matrice  $\cdot$ .

Dans le cas particulier où  $i$  est égal à  $m$ , l'indicateur proposé correspond à la distance de Mahalanobis  $D$  [7]. Ainsi, la caractéristique importante de cet indicateur est son aptitude à la détection de tout défaut affectant le processus puisqu'il peut être étendu à l'ensemble de l'espace de représentation des données.

### B. Reconstruction simultanée de variables

La reconstruction simultanée d'un ensemble de variables  $\mathbf{R}$  consiste à estimer les variables de cet ensemble à partir des variables du système restantes  $\bar{\mathbf{R}}$  et du modèle ACP.

Dans un premier temps, partitionnons le vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  (1) en deux parties :

$$\mathbf{x}_R(k) = \Xi_R^T \mathbf{x}(k) \quad (18)$$

$$\mathbf{x}_{\bar{R}}(k) = \Xi_{\bar{R}}^T \mathbf{x}(k) \quad (19)$$

où  $\mathbf{x}_R(k)$  correspond aux  $r$  composantes de  $\mathbf{x}(k)$  à reconstruire et  $\mathbf{x}_{\bar{R}}(k)$  les composantes restantes.

De façon similaire à l'approche proposée par *Dunia et al.* [1], la reconstruction simultanée de variables du vecteur de mesures est obtenue en résolvant le problème suivant :

$$\hat{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) = \arg \min_{\mathbf{x}_{(i)}^{(R)}(k)} \left\{ SWE_{(i)}^{(R)}(k) \right\} \quad (20)$$

où  $\mathbf{x}_{(i)}^{(R)}(k)$  est la reconstruction des  $r$  variables de l'ensemble  $\mathbf{R}$  du vecteur de mesures  $\mathbf{x}$  à partir des  $i$  derniers vecteurs propres et l'indicateur  $SWE_{(i)}^{(R)}$ , correspondant à  $SWE_{(i)}$  (11) obtenu après reconstruction des variables, est donné à l'instant  $k$  par :

$$SWE_{(i)}^{(R)}(k) = \left\| \mathbf{H}_{(i)}^{1/2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{(i)}^{(R)}(k)^T & \mathbf{x}_{\bar{R}}(k)^T \end{bmatrix}^T \right\|_2^2 \quad (21)$$

Le vecteur de reconstruction de  $\mathbf{x}_{(i)}^{(R)}$  est donné par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) = \mathbf{C}_{(i)}^{(R)} \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \quad (22)$$

avec :

$$\mathbf{C}_{(i)}^{(R)} = -(\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\Xi}_R)^{-1} \tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\Xi}_{\bar{R}} \quad (23)$$

*Proof:* Explicitons l'expression de  $SWE_{(i)}^{(R)}$  (21) avec le partitionnement correspondant pour la matrice  $\mathbf{H}_{(i)}$  :

$$SWE_{(i)}^{(R)}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{(i)}^{(R)}(k)^T & \mathbf{x}_{\bar{R}}(k)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(i)}^{(1)} & \mathbf{H}_{(i)}^{(2)} \\ \mathbf{H}_{(i)}^{(3)} & \mathbf{H}_{(i)}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{(i)}^{(R)}(k) \\ \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \end{bmatrix} \quad (24)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{(i)}^{(1)} &= \Xi_R^T \mathbf{H}_{(i)} \Xi_R \\ \mathbf{H}_{(i)}^{(2)} &= \Xi_R^T \mathbf{H}_{(i)} \Xi_{\bar{R}} \\ \mathbf{H}_{(i)}^{(3)} &= \mathbf{H}_{(i)}^{(2)T} \\ \mathbf{H}_{(i)}^{(4)} &= \Xi_{\bar{R}}^T \mathbf{H}_{(i)} \Xi_{\bar{R}} \end{aligned} \quad (25)$$

On développe l'expression (24) de  $SWE_{(i)}^{(R)}$ , puis en la minimisant par rapport à  $\mathbf{x}_{(i)}^{(R)}(k)$ , on obtient :

$$(\Xi_R^T \mathbf{H}_{(i)} \Xi_R) \hat{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) + (\Xi_R^T \mathbf{H}_{(i)} \Xi_{\bar{R}}) \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) = 0 \quad (26)$$

A condition que  $(\Xi_R^T \mathbf{H}_{(i)} \Xi_R)$  soit inversible, on obtient :

$$\hat{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) = -(\Xi_R^T \mathbf{H}_{(i)} \Xi_R)^{-1} (\Xi_R^T \mathbf{H}_{(i)} \Xi_{\bar{R}}) \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \quad (27)$$

**Condition nécessaire de reconstruction.** Si la matrice  $\tilde{\Xi}_R$  est de plein rang colonne, alors  $(\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\Xi}_R)^{-1}$  existe. Cette condition implique que :

- Les colonnes de la matrice  $\tilde{\Xi}_R$  ne sont pas nulles sinon les variables reconstruites ne sont pas projetées dans le sous-espace résiduel et donc un défaut sur ces variables n'est pas détectable.
- Les colonnes de la matrice  $\tilde{\Xi}_R$  ne sont pas colinéaires. Sinon il n'est pas possible de reconstruire toutes les variables et *Dunia et al.* [1] proposent alors une reconstruction partielle.
- Le nombre  $r$  de variables reconstruites doit satisfaire la condition suivante :

$$r \leq i \quad (28)$$

La reconstruction d'un groupe de variables ne faisant pas intervenir ces variables, on voit clairement apparaître son intérêt pour la localisation de défauts. En effet, il est possible de générer un ensemble de résidus structurés insensibles à certaines variables.

### C. Méthode de choix du nombre de composantes

La méthode proposée consiste à déterminer le nombre de composantes qui minimise la trace de la variance de l'erreur de reconstruction des variables pour lesquelles on veut maximiser la détection et la localisation de défauts. Définissons tout d'abord la variance de l'erreur de reconstruction des  $r$  variables du sous-ensemble  $\mathbf{R}$  :

$$\mathbf{S}_{(i)}^{(R)} = \text{var} \left( \mathbf{x}_R(k) - \hat{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) \right) \quad (29)$$

La variance de l'erreur de reconstruction finale est donnée par :

$$\mathbf{S}_{(i)}^{(R)} = (\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\Xi}_R)^{-1} \quad (30)$$

*Proof:* Tout d'abord, explicitons l'erreur de reconstruction :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) &= \mathbf{x}_R(k) - \hat{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) \\ &= \Xi_R^T \mathbf{x}(k) - \mathbf{C}_{(i)}^{(R)} \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \end{aligned} \quad (31)$$

En remplaçant (23) dans (31), on obtient :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) = \Xi_R^T \mathbf{x}(k) + (\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\Xi}_R)^{-1} \tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\Xi}_{\bar{R}} \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \quad (32)$$

On peut définir  $\mathbf{x}(k)$  à partir de  $\mathbf{x}_R(k)$  et  $\mathbf{x}_{\bar{R}}(k)$  :

$$\mathbf{x}(k) = \Xi_R \mathbf{x}_R(k) + \Xi_{\bar{R}} \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \quad (33)$$

En remplaçant l'expression (18) dans (33), on aura :

$$\Xi_{\bar{R}} \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) = (\mathbf{I}_m - \Xi_R \Xi_R^T) \mathbf{x}(k) \quad (34)$$

Compte tenu de la définition de  $\tilde{\Xi}_R$  (16), l'expression (34) est injectée dans (32) pour obtenir l'expression finale de l'erreur de reconstruction :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) = \mathbf{B}_{(i)}^{(R)} \mathbf{x}(k) \quad (35)$$

avec :

$$\mathbf{B}_{(i)}^{(R)} = (\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\Xi}_R)^{-1} \tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Lambda}_{(i)}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{(i)}^T \quad (36)$$

L'espérance mathématique de cette erreur est donnée par :

$$\mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k)] = \mathbf{B}_{(i)}^{(R)} \mathbb{E} [\mathbf{x}(k)] \quad (37)$$

et donc :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k) - \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}^{(R)}(k)] = \mathbf{B}_{(i)}^{(R)} (\mathbf{x}(k) - \mathbb{E} [\mathbf{x}(k)]) \quad (38)$$

En remplaçant la variance des mesures définie par :

$$\Sigma = \mathbb{E} [(\mathbf{x}(k) - \mathbb{E} [\mathbf{x}(k)]) (\mathbf{x}(k) - \mathbb{E} [\mathbf{x}(k)])^T] \quad (39)$$

dans l'expression(29), cette dernière devient :

$$\mathbf{S}_{(i)}^{(R)} = \mathbf{B}_{(i)}^{(R)} \Sigma \mathbf{B}_{(i)}^{(R)T} \quad (40)$$

Compte tenu de (4) et de la propriété d'orthogonalité de  $\mathbf{P}$ , on obtient :

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(i)}^T \Sigma \tilde{\mathbf{P}}_{(i)} = \tilde{\Lambda}_{(i)} \quad (41)$$

En remplaçant la définition de  $\mathbf{B}_{(i)}^{(R)}$  et (41) dans (40), on obtient (30). ■

Ainsi, pour chaque défaut de capteur simple ou multiple caractérisé par la direction  $\Xi_R$ , on cherche à déterminer le nombre de composantes  $i$  à retenir, ce nombre étant défini par :

$$i = \arg \min_j \text{trace} \left( \mathbf{S}_{(j)}^{(R)} \right) \quad (42)$$

Dans la méthode proposée, on ne cherche pas un modèle ACP "moyen" comme la méthode de *Dunia et al.* [1] mais un ensemble de modèles adaptés aux défauts multiples à détecter et à localiser. L'application de cette méthode au cas des défauts multiples nécessite de considérer un grand nombre de combinaisons de un à plusieurs capteurs en défaut ; plus précisément, dans l'équation (42), il faut considérer tous les ensembles possibles  $\mathbf{R}$  de variables. L'utilisation de la borne structurelle (28) liée à la dimension de l'espace résiduel considéré permet de déterminer le nombre maximal de combinaisons à considérer. De plus, l'utilisation de la méthode proposée par Tharrault et al. [10] permet de ne conserver parmi les combinaisons à tester que les directions de reconstruction utiles pour la détection et la localisation de défauts.

## IV. APPLICATION

Afin d'illustrer les méthodes présentées précédemment, on considère un système statique régi par 8 variables  $x_j$ ;  $j = \{1, \dots, 8\}$  et décrit aux différents instants  $k$  par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1(k) = \sin(k/4) + 1 + \mathbf{v}_1(k)^2 & \mathbf{v}_1(k) \sim \mathfrak{N}(0, 1) \\ x_2(k) = \cos(k/4)^3 \exp(-k/N) \\ x_3(k) = x_2^3 \\ x_4(k) = x_1(k) \\ x_5(k) = x_2(k) \\ x_6(k) = 2x_1(k) + x_2(k) \\ x_7(k) = x_1(k) + x_3(k) \\ x_8(k) = \mathbf{v}_2(k) & \mathbf{v}_2(k) \sim \mathfrak{N}(0, 1) \end{cases} \quad (43)$$

Ce jeu de données fait apparaître des relations de redondance analytique linéaires et non linéaires ainsi qu'une variable indépendante. Aux données ainsi générées ont été superposées des réalisations de variables aléatoires  $\epsilon_j(k)$  à distribution normale centrée et d'écart type 0.095 de façon à simuler la présence de bruits de mesure. Le système est simulé, en premier lieu, sur une fenêtre de  $N = 500$  observations. L'évolution des mesures des variables  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 8$  est illustrée sur la figure (1).

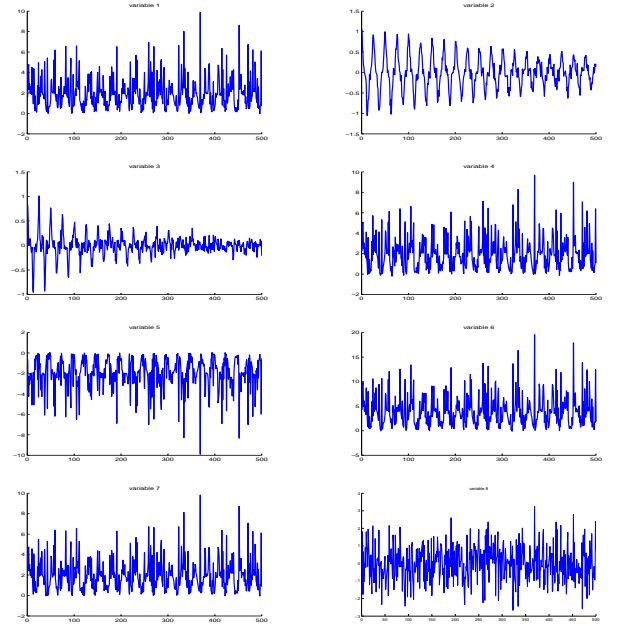


Fig. 1. Evolution des mesures des 8 variables  $x_j$

Après centrage et réduction des variables, ces dernières sont regroupées dans une matrice  $X$  (2). Une analyse en composantes principales est appliquée ce qui permet d'identifier les valeurs et vecteurs propres de la matrice de corrélation des données.

### A. Cas de défauts simples

L'application de la méthode VNR de *Dunia et al.* [1] permet d'obtenir un nombre de composantes principales  $\ell = 2$ . Mais le système considéré possédant une variable indépendante des autres ( $x_8$ ), le nombre de composantes principales à retenir est  $\ell = 3$ , soit un sous-espace résiduel de dimension  $i = 5$ . Les tableaux I et II illustrent respectivement les résultats d'application de la méthode SNR de *Tamura et al.* [9] appliquée à l'indicateur  $SWE_{(i)}$  avec un niveau du seuil de confiance  $\alpha$  de 95% et

la méthode proposée pour tous les sous-ensembles  $\mathbf{R}$  constitués d'une variable. A partir de ces deux tableaux, on remarque que les deux méthodes donnent le même résultat sauf pour les défauts affectants les variables  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_6$ .

TABLE I

NOMBRE DE COMPOSANTES  $i$  POUR  $SNR$  EN FONCTION DES DIRECTIONS DES DÉFAUTS

Directions des défauts	1	2	3	4	5	6	7	8
$i$	3	5	4	2	4	1	3	6

TABLE II

NOMBRE DE COMPOSANTES  $i$  POUR LA MÉTHODE PROPOSÉE EN FONCTION DES DIRECTIONS DES DÉFAUTS

Directions des défauts	1	2	3	4	5	6	7	8
$i$	3	5	5	4	4	3	3	6

Une simulation est réalisée pour tester la sensibilité des différentes méthodes : la méthode proposée, les méthodes  $SNR$  et  $VNR$ . Pour cette raison, 500 échantillons de mesures sont générés. L'amplitude minimale du défaut  $d_j$  vérifiant les conditions suffisantes de détectabilité est obtenue [1]. Ensuite, elle est divisée par le domaine de variation de la  $j^{\text{ème}}$  variable pour obtenir un pourcentage. Cette procédure est effectuée pour toutes les variables. Afin d'obtenir des résultats statistiquement interprétables, la totalité de cette simulation est répétée 100 fois. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau III. D'une part, les amplitudes minimales de défauts issues de la méthode proposée et celles de  $SNR$  sont presque identiques sauf pour  $d_3$  où il y a un écart important entre les deux. D'autre part, la méthode  $VNR$  donne des résultats légèrement en retrait par rapport à la méthode proposée sauf pour la variable indépendante  $x_8$ . On avait déjà fait remarquer la difficulté de traiter le cas des variables indépendantes avec la méthode  $VNR$ . Pour cette variable, on note l'intérêt de travailler avec un espace résiduel dont la dimension est largement supérieure à celle nécessaire pour détecter des défauts sur les autres variables.

TABLE III

POURCENTAGES DES AMPLITUDES MINIMALES DE DÉFAUTS AFFECTANT LES DIFFÉRENTES VARIABLES POUR LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

Méthodes	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$
Proposée	5	19.5	19.5	5.6	7.6	3.6	6.17	89
$SNR_{SWE_i}$	5	19.5	37	6.2	7.6	3.6	6.17	89
$VNR$	5.5	19.5	19.5	6	7.8	4.6	6.5	1198

Un défaut simple a été ajouté à la variable  $x_6$  aux instants 51 à 100. Il est représenté par un biais d'amplitude égale à 6% de la plage de variation de cette variable. On a calculé les indicateurs pour les deux méthodes en considérant tous les ensembles à une variable, chaque indicateur étant évalué à partir du nombre de composantes  $i$  figurant dans les tableaux I et II. La figure (2) montre deux indicateurs sensibles à ce défaut (l'indicateur  $SWE_{(1)}$  déterminé par la méthode  $SNR$  et  $SWE_{(3)}$  obtenu par notre méthode) malgré la présence de quelques fausses alarmes dues aux non linéarités (ces fausses alarmes pourraient être aisément filtrées en appliquant une contrainte sur la persistance du défaut).

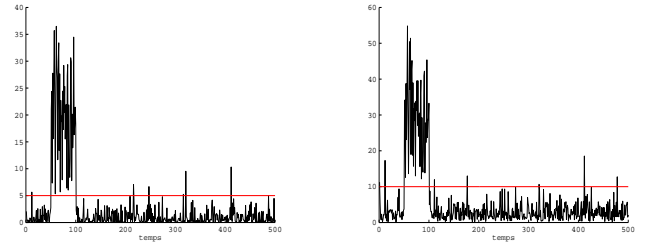


Fig. 2. Evolution des indicateurs  $SWE_{(1)}$  et  $SWE_{(3)}$

L'évolution de  $SWE_{(1)}^{(1)}$  et  $SWE_{(3)}^{(1)}$  correspondant respectivement aux indicateurs  $SWE_{(1)}$  et  $SWE_{(3)}$  calculés après reconstruction de la variable  $x_1$  est illustrée sur la figure (3). A partir de cette figure, on constate que l'indicateur  $SWE_{(1)}^{(1)}$  met en évidence la présence de défaut sur la variable  $x_1$  alors qu'en réalité la variable en défaut est la variable  $x_6$ .

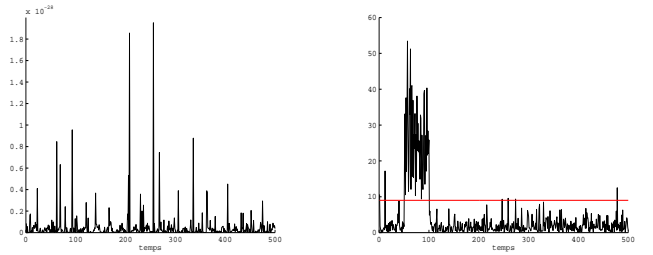


Fig. 3. Evolution des indicateurs  $SWE_{(1)}^{(1)}$  et  $SWE_{(3)}^{(1)}$  avec un défaut affectant  $x_6$

Pour faciliter la localisation, on peut définir un indicateur de localisation calculé à partir de l'indicateur de détection de  $SWE_{(i)}^{(j)}$  :

$$A_{SWE_{(i)}^{(j)}}(k) = \frac{SWE_{(i)}^{(j)}(k)}{\chi_{i,\alpha}^2} \quad (44)$$

La variable, pour laquelle l'indicateur  $A_{SWE_{(i)}^{(j)}}$  est inférieur à un, est considérée comme défectueuse. La figure (4) présente les histogrammes des indicateurs de localisation  $A_{SWE_{(i)}^{(j)}}$  calculés après reconstruction de chaque variable. Seul l'indicateur  $A_{SWE_{(3)}^{(6)}}$ , calculé après reconstruction de  $x_6$ , admet une valeur inférieure à un, indiquant que cette dernière est en défaut. Ainsi, le modèle obtenu à partir de la méthode proposée permet d'éviter le risque de fausses localisations comparé au résultat fourni par la méthode  $SNR$ .

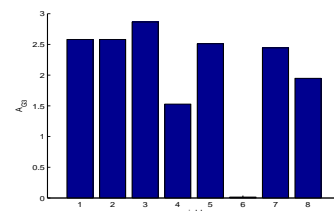


Fig. 4. Indicateur de localisation  $A_{SWE_{(i)}^{(j)}}$ ,  $j = 1, \dots, 8$

## B. Défauts multiples

Une simulation est effectuée sur 500 échantillons où trois défauts de type biais sont introduits simultanément sur les va-

riables  $x_1, x_4$  d'une amplitude de 10% de la plage de variation de chaque variable et sur la variable  $x_8$  (variable indépendante) d'amplitude égale à 150% de la plage de variation de cette dernière. La méthode *SNR* et celle proposée permettent la détection des défauts respectivement sur les indicateurs  $SWE_{(3)}$  et  $SWE_{(6)}$  (avec une connaissance a priori des directions des défauts). L'évolution de ces deux indicateurs est illustrée par la figure (5).

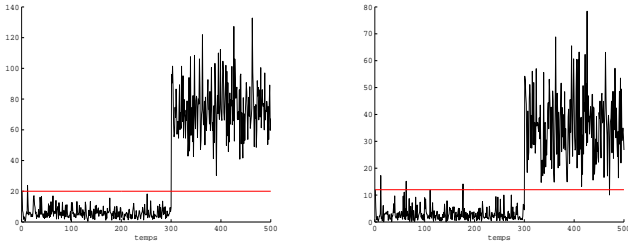


Fig. 5. Evolution des indicateurs  $SWE_{(3)}$  et  $SWE_{(6)}$

L'exploitation de  $SWE_{(3)}$  dans la localisation engendre une fausse localisation alors que l'utilisation de  $SWE_{(6)}$  assure une bonne localisation puisqu'elle permet d'identifier les variables défectueuses. En effet, sur la figure (6), l'évolution de  $SWE_{(3)}^{(1,3,8)}$  obtenu après reconstruction simultanée des variables  $x_1, x_3$  et  $x_8$  montre que cet indicateur ne dépasse pas son seuil de détection, indiquant ainsi que ces variables sont défectueuses alors que  $x_3$  n'est pas en défaut. La figure (7) présente l'évolution de quelques indicateurs  $SWE_{(6)}^{(R)}$  obtenus par reconstruction des variables correspondant aux combinaisons des défauts possibles. Seule la reconstruction simultanée des variables  $x_1, x_4$  et  $x_8$  en défauts élimine leurs effets et l'indicateur de détection résultant  $SWE_{(3)}^{(1,4,8)}$  est en dessous de son seuil de détection.

Sur cet exemple, on peut en conclure que la méthode proposée a permis de déterminer un modèle ACP qui a des performances en termes de localisation supérieures à celui obtenu par la méthode *SNR*.

## V. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons proposé une nouvelle méthode de détermination des modèles ACP optimisant la détection et la localisation de défauts simples et multiples sur les variables redondantes ou non. Cette méthode détermine le nombre de composantes principales du modèle ACP pour chaque type de défaut par optimisation de la trace de la variance de l'erreur de reconstruction des variables. La méthode de reconstruction d'un ensemble de variables par ACP a été généralisée à l'indicateur de détection *SWE* pour des espaces résiduels de dimension différente. Les résultats obtenus sur un exemple de simulation ont montré l'intérêt de notre méthode par rapport aux méthodes existantes. Dans le cas des défauts multiples, cette méthode de sélection nécessite de considérer un grand nombre de combinaisons de un à plusieurs capteurs en défaut, notamment pour un système de grande dimension. Cependant, la réduction du nombre des directions des défauts à prendre en compte est tout à fait envisageable par analyse des conditions d'existence de la reconstruction [10].

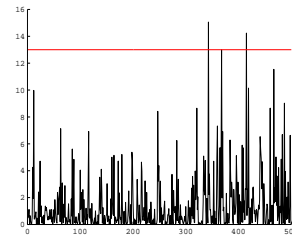


Fig. 6. Evolution de l'indicateur  $SWE_{(3)}^{(1,3,8)}$  avec des défauts sur  $x_1, x_4$  et  $x_8$

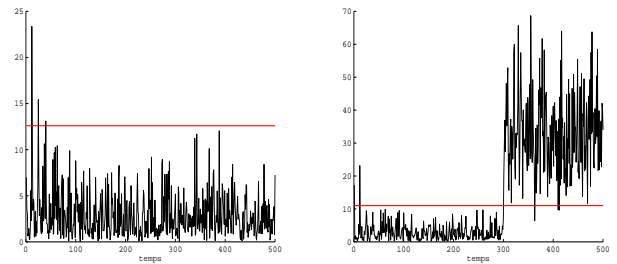


Fig. 7. Evolution des indicateurs  $SWE_{(6)}^{(1,4,8)}$  et  $SWE_{(6)}^{(1,3,8)}$  avec des défauts affectant  $x_1, x_4$  et  $x_8$

## RÉFÉRENCES

- [1] Dunia R., Qin S.J., 'A subspace approach to multidimensional fault identification and reconstruction', *American Institute of Chemical Engineers Journal*, vol. 44 (8), pp. 1813-1831, 1998.
- [2] Gertler J., Singer D., 'A new structural framework for parity equation based fault detection and isolation', *Automatica*, vol. 26, pp. 381-388, 1990.
- [3] Harkat M. F., Mourot G., Ragot J., 'Différentes méthodes de localisation de défauts basées sur les dernières composantes principales', *Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA*, Nantes- France, 6-8 Juillet 2002.
- [4] Harkat M. F., Mourot G., Ragot J., 'An improved PCA scheme for sensor FDI : application to an air quality monitoring network', *Journal of Process Control*, vol. 16, pp. 625-634, 2006.
- [5] Huang Y., Gertler J., McAvoy T., 'Sensor and actuator fault isolation by structured partial PCA with nonlinear extensions', *Journal of Process Control*, vol. 10, pp. 444-459, 2000.
- [6] Kano M., Nagao K., Hasebe S., Hashimoto I., Ohno H., Strauss R., 'Comparison of multivariate statistical process control monitoring methods with applications to the Eastman challenge problem', *Computers and Chemical Engineering*, vol. 26, pp. 161-174, 2002.
- [7] Qin S. J., 'Statistical process monitoring : basis and beyond', *Journal of Chemometrics*, vol. 17, pp. 480-502, 2003.
- [8] Stork C. L., Veltkamp D. J., Kowalski B. R., 'Identification of multiple sensor disturbances during process monitoring', *Analytical Chemistry*, vol. 69, pp. 5031-5036, 1997.
- [9] Tamura M., Tsujita S., 'A study on the number of principal components and sensitivity of fault detection using PCA', *Journal of Computers and chemical Engineering*, vol. 31, pp. 1035-1046, 2007.
- [10] Tharrault Y., Mourot G., Ragot J., Maquin D., 'Fault detection and isolation with robust principal component analysis', *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science AMCS*, vol. 18, 2008.
- [11] Valle S., Weihua L., Qin S. J., 'Selection of the number of principal components : The variance of the reconstruction error criterion with a comparison to other methods', *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vol. 38, pp. 4389-4401, 1999.
- [12] Wang H., Jiang N., Yang D., 'Process monitoring in principal component subspace : part 1. Fault reconstruction study'. *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 6, pp. 5119-5124, 10-13 Oct. 2004.
- [13] Jiang N., Wang H., Yang D., 'Process monitoring in principal component subspace : part 2. Fault identification and isolation study'. *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 7, pp. 6087-6092, 10-13 Oct. 2004.
- [14] Westerhuis J., Gurden S., Smilde A., 'Standardized q-statistic for improved sensitivity in the monitoring of residuals in MSPC'. *Journal of Chemometrics*, vol. 14(4), pp. 335-349, 2000.