

Stabilisation non quadratique locale pour des modèles continus de type Takagi-Sugeno

Thierry Marie GUERRA^{1,2,3}, Miguel BERNAL⁴, Abdelhafidh JAADARI^{1,2,3}, Kevin GUELTON⁵

¹ Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France

² UVHC, LAMIH, F-59313 Valenciennes, France

³ CNRS, FRE 3304, F-59313 Valenciennes, France

{guerra, abdelhafidf.jaadari}@univ-valenciennes.fr

⁴ CUValles, University of Guadalajara, Mexico

mbernal@profesores.valles.udg.mx

⁵ CReSTIC EA 3804, University of Reims Champagne-Ardenne, UFR, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims cedex 2, France

kevin.guelton@univ-reims.fr

Résumé— Le papier traite de la stabilité non quadratique des modèles quasi-LPV ou dits de Takagi-Sugeno. Le problème des fonctions non quadratiques est de pouvoir prendre en compte la dérivée des fonctions non linéaires qui de façon générale dépendent de l'état. L'idée développée dans ce travail est de réduire la stabilisation globale – qui n'est pas toujours ni réaliste, ni réalisable pour les systèmes non linéaires – à une stabilisation locale. Dans ce contexte, on montre que l'obtention d'inégalités matricielles linéaires (LMI) peut-être fructueuse.

Mots-clés— Inégalité Matricielle Linéaire (LMI), Fonctions de Lyapunov non quadratiques, Modèles Takagi-Sugeno.

I. INTRODUCTION

Depuis l'introduction des modèles de Takagi-Sugeno (TS) [1], de très nombreux travaux ont vu le jour (le lecteur peut se référer à [2], [3], [4] et aux références de ces papiers). L'un de leur principal intérêt est de permettre une représentation exacte d'un modèle non linéaire dans un compact de l'espace d'état. Pour ce faire une transformation du type approche par secteur non linéaire peut être utilisée [2] [5]. La plupart du temps la stabilité et la stabilisation utilisent la seconde méthode de Lyapunov associée à une fonction de Lyapunov quadratique [2], [4]. La loi de commande est souvent une PDC (Parallel Distributed Compensation) qui reprend les mêmes fonctions non linéaires que celles composant le modèle flou TS [6].

L'ensemble des résultats se montre conservatif pour plusieurs raisons : la manière dont sont construits les modèles TS à partir d'un modèle non linéaire n'est pas unique [7], les fonctions d'interpolation ne sont pas retirées des conditions de la même manière [8] [9], des informations supplémentaires sur ces fonctions peuvent être introduites [10] [11], le choix d'une fonction de Lyapunov différente [12] [13] ... De manière générale, l'ensemble des résultats recherche un résultat global pour le modèle TS, mais qui n'est souvent que local pour le modèle non linéaire, i.e. valable que dans l'espace compact des variables d'état. L'approche proposée ici se place dans un changement de perspective en recherchant des conditions de stabilisation locales pour les modèles TS.

Plusieurs fonctions de Lyapunov ont été proposées dans la littérature : fonctions quadratiques par morceaux [12] [14], fonctions non quadratiques, en continu [13] [15], en discret

[16] [17] [18]. De façon surprenante, les résultats obtenus en discret sont nettement plus intéressants que ceux obtenus en continu. Cela est dû principalement au fait de devoir dériver les fonctions d'interpolations qui sont non linéaires et dépendent de l'état du modèle. Quelques solutions ont été proposées avec des limitations certaines. Dans [13] ou [15] les auteurs considèrent connaître les bornes de ces dérivées, ce qui est irréaliste dans la plupart des cas. Un résultat intéressant a été obtenu dans [19] en utilisant une fonction de Lyapunov indépendante du chemin. Le problème est que les conditions nécessaires à la construction de cette fonction réduisent fortement le domaine des modèles TS possibles. De plus, dans le cadre de la stabilisation, le problème reste sous forme de conditions BMI.

Dans ce cadre, la nouvelle approche proposée permet de ne s'intéresser qu'au problème réduit de stabilité locale pour lequel un résultat sous forme de LMI existe [20]. Le papier est organisé comme suit : la section II donne les bases, i.e. modèles TS, notations, fonction de Lyapunov, la section III rappelle le résultat de [20] et l'étend dans le cadre de la stabilisation, enfin la section IV montre sur des exemples l'intérêt certain de l'approche.

II. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Considérons un modèle non linéaire affine en la commande :

$$\dot{x}(t) = f(z(t))x(t) + g(z(t))u(t) \quad (1)$$

avec $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ des fonctions non linéaires, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées, $z(x(t)) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des prémisses supposé borné et lisse sur un ensemble compact C des variables d'état incluant l'origine. Soient $nl_j(\cdot) \in [nl_j^-, \overline{nl_j}]$, $j \in \{1, \dots, p\}$ l'ensemble des non linéarités bornées de (1) incluses dans C . En utilisant l'approche par secteur non linéaire [2] [5], les fonctions (ou poids) suivantes peuvent être construites :

$$w_0^j(\cdot) = \frac{\overline{nl_j} - nl_j(\cdot)}{\overline{nl_j} - \underline{nl_j}}, \quad w_1^j(\cdot) = 1 - w_0^j(\cdot), \quad j \in \{1, \dots, p\} \quad (2)$$

On peut alors définir les fonctions d'interpolation suivantes, avec $i \in \{1, \dots, 2^p\}$, $i_j \in \{0, 1\}$:

$$h_i = h_{1+i_1+2+i_2+\dots+i_p \times 2^{p-1}} = \prod_{j=1}^p w_{i_j}^j(z_j) \quad (3)$$

Ces fonctions d'interpolation satisfont une propriété de somme convexe $\sum_{i=1}^r h_i(\cdot) = 1$, $h_i(\cdot) \geq 0$ dans C . Dans un souci de clarté, les notations suivantes sont adoptées :

$$\Upsilon_z = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \Upsilon_i, \quad \Upsilon_z^{-1} = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \Upsilon_i \right)^{-1}$$

A partir de ces hypothèses et définitions, une représentation exacte du modèle non linéaire (1) dans C est donnée par le modèle quasi-LPV ou dit TS suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) = A_z x(t) + B_z u(t) \quad (4)$$

avec $r = 2^p \in \mathbb{N}$ est le nombre de modèles stabilisables (A_i, B_i) , $i = 1, \dots, r$.

Enfin, le résultat suivant sera nécessaire dans la suite, il représente un bon compromis entre complexité (pas de variables additionnelles rajoutés) et qualité des solutions.

Lemme de relaxation [8]: Soient Υ_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, r\}$ des matrices de dimension appropriées. La condition

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} < 0 \quad (5)$$

est vérifiée si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \\ \frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i \neq j. \end{aligned} \quad (6)$$

III. PRINCIPAL RESULTAT

La loi de commande suivante est adoptée dans ce travail, elle est identique à celles usuellement rencontrées en discret [16] :

$$u(t) = F_z P_z^{-1} x(t) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) F_i \right) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) P_i \right)^{-1} x(t) \quad (7)$$

avec F_i les gains de commande et des matrices $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_i = P_i^T > 0$. Le modèle en boucle fermée s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = (A_z + B_z F_z P_z^{-1}) x(t) \quad (8)$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov suivante [13] [15] [16] :

$$V(x(t)) = x^T(t) P_z^{-1} x(t) = x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i \right)^{-1} x(t) \quad (9)$$

Sa dérivée le long des trajectoires de (8) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x^T(t) P_z^{-1} \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) P_z^{-1} x(t) + x^T(t) (\dot{P}_z^{-1}) x(t) \\ &= x^T(t) \left(P_z^{-1} (A_z + B_z F_z P_z^{-1}) + (A_z + B_z F_z P_z^{-1})^T P_z^{-1} + \dot{P}_z^{-1} \right) x(t) \end{aligned}$$

et elle est négative si la condition suivante est vraie :

$$P_z^{-1} (A_z + B_z F_z P_z^{-1}) + (A_z + B_z F_z P_z^{-1})^T P_z^{-1} + \dot{P}_z^{-1} < 0 \quad (10)$$

En utilisant la propriété de congruence avec la matrice de rang plein P_z^{-1} , on obtient avec $P_z \dot{P}_z^{-1} P_z = -\dot{P}_z$:

$$A_z P_z + P_z A_z^T + B_z F_z + F_z^T B_z^T - \dot{P}_z < 0 \quad (11)$$

Le problème apparaissant dans (11) est bien sûr la quantité $\dot{P}_z = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i(z(t)) P_i$ qui de manière générale fait intervenir la dérivée des prémisses, donc celle du vecteur d'état. La plupart des travaux proposent une majoration du type : $\|\dot{P}_z\| < \phi_z$ [13] [15] [21] [22], dont les bornes ne peuvent être que vérifiées a posteriori et dépendent des conditions initiales. Notre approche permet de s'affranchir de cette « pirouette » et donne un résultat de stabilisation locale.

Théorème 1 (stabilisabilité locale) : s'il existe des matrices de tailles appropriées $P_i = P_i^T > 0$, F_i $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que : $A_z P_z + P_z A_z^T + B_z F_z + F_z^T B_z^T < 0$, alors il existe un domaine D contenant l'origine tel que le modèle (4) soit localement asymptotiquement stabilisable avec la loi de commande (7).

Preuve : la fonction NQ (9) satisfait $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ dans \mathbb{R}^n . Si $A_z P_z + P_z A_z^T + B_z F_z + F_z^T B_z^T < 0$ est vraie alors il existe un suffisamment petit $\lambda > 0$ tel que :

$$A_z P_z + P_z A_z^T + B_z F_z + F_z^T B_z^T + \lambda I < 0 \quad (12)$$

On en déduit donc un domaine $D = \{x : x \in B, \|\dot{P}_z\| < \lambda\}$ qui contient forcément l'origine puisque :

$$\begin{aligned} \dot{P}_z &= \sum_{i=1}^r \dot{h}_i P_i = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial h_i}{\partial z} \right)^T \frac{\partial z^T}{\partial x} \dot{x} P_i \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial h_i}{\partial z} \right)^T \frac{\partial z^T}{\partial x} (A_z + B_z F_z P_z^{-1}) x(t) P_i \end{aligned}$$

Comme $V(x) > 0$ et $\dot{V}(x) < 0$ dans $D - \{0\}$ alors le point d'équilibre 0 est localement asymptotiquement stable.

Dans [20] on montre que \dot{P}_z peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{P}_z &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial W_0^k}{\partial z_k} (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) \dot{z}_k \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^p h_j \frac{\partial W_0^k}{\partial z_k} (P_{g_1(j,k)} - P_{g_2(j,k)}) \dot{z}_k \end{aligned} \quad (13)$$

avec :

$$g_1(j, k) = \lfloor (j-1)/2^{p+1-k} \rfloor \times 2^{p+1-k} + 1 + (j-1) \bmod 2^{p-k} \quad (14)$$

$$g_2(j, k) = g_1(j, k) + 2^{p-k}$$

$\lfloor \cdot \rfloor$ correspond à la partie entière.

Pour simplifier les équations on pose dans la suite :

$$T_{zz} = A_z P_z + P_z A_z^T + B_z F_z + F_z^T B_z^T \quad (15)$$

En introduisant l'expression (13) dans (11) on obtient :

$$T_{zz} - \sum_{k=1}^p \frac{\partial W_0^k}{\partial z_k} (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) \dot{z}_k < 0 \quad (16)$$

Or : $\dot{z}_k = (\partial z_k(t)/\partial x(t))^T (A_z x(t) + B_z u(t))$ ce qui aboutit à :

$$T_{zz} - \sum_{k=1}^p \frac{\partial W_0^k}{\partial z_k} \cdot \left(\frac{\partial z_k}{\partial x} \right)^T (A_z x + B_z u) (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) < 0 \quad (17)$$

$$T_{zz} - \sum_{k=1}^p \frac{\partial W_0^k}{\partial z_k} \cdot \left(\frac{\partial z_k}{\partial x} \right)^T B_z u(t) (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) - \sum_{k=1}^p \frac{\partial W_0^k}{\partial z_k} \cdot \left(\frac{\partial z_k}{\partial x} \right)^T A_z x(t) (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) < 0 \quad (18)$$

$$T_{zz} - \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{e=1}^m \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} u_e (B_z)_{ve} (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) - \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{s=1}^n (A_z)_{vs} \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} x_s (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) < 0 \quad (19)$$

A partir de (19), on s'aperçoit que la connaissance des bornes de $\left| \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} x_u \right|$ et de $\left| \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} u_e \right|$ permet de définir un problème avec contraintes LMI. Notons, que ces bornes, contrairement à ce qui a été fait usuellement dans la littérature avec $\|\dot{P}_z\| < \phi_z$, sont tout à fait réalistes. Effectivement, la dérivée $\frac{\partial W_0^k}{\partial x_v}$ des fonctions est toujours calculable et l'état est supposé appartenir à un compact C . Il reste donc à borner la commande, ce qui est également une hypothèse réaliste. Pour ce faire il faut pouvoir écrire : $\|u\|_2 < \mu$. De façon usuelle [2], on procède de la manière suivante. En considérant $|x(0)| < c$, le choix $P_z \geq c^2 I$ (ou $P_z^{-1} \leq c^{-2} I$) et en rappelant que pour une fonction de Lyapunov décroissante : $x^T(t) P_z^{-1} x(t) \leq x^T(0) P_z^{-1} x(0)$, il vient directement $V(x(t)) \leq 1$.

D'où $\|u\|_2 < \mu$ est vraie si $\frac{1}{\mu^2} \|u\|_2^2 \leq x^T(t) P_z^{-1} x(t) \leq 1$, i.e. :

$$\frac{1}{\mu^2} x^T(t) P_z^{-1} F_z^T F_z P_z^{-1} x(t) \leq x^T(t) P_z^{-1} x(t) \quad (20)$$

et en appliquant le complément de Schur à partir de (20), on obtient une condition suffisante pour $\|u\|_2 < \mu$:

$$\begin{bmatrix} P_z & F_z^T \\ F_z & \mu^2 I_m \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

On peut donc écrire pour les bornes :

$$\left| \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} u_e \right| \leq \mu \eta_{kv}, \quad \left| \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} x_s \right| \leq \lambda_{kvs} \quad (22)$$

Il reste maintenant à utiliser (22) dans (19) pour obtenir des contraintes LMI. Pour ce faire, il y a deux possibilités.

L'expression $X + \left(\frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} x_s \right) Y + \left(\frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} u_e \right) Z \leq 0$ est satisfaite sous les contraintes (22) si :

$$X \pm \lambda_{kvs} \times Y \pm \eta_{kv} \times \mu Z \leq 0 \quad (23)$$

ou si il existe deux matrices $Q > 0$ et $S > 0$ telles que :

$$X + \frac{1}{2} (\lambda_{kvs}^2 Q + Y Q^{-1} Y) + \frac{1}{2} (\eta_{kv}^2 S + \mu^2 Z S^{-1} Z) < 0 \quad (24)$$

(23) exprime simplement toutes les possibilités en fonction du signe des expressions, (24) est directement issue du « carré matriciel ».

Théorème 2 : s'il existe des matrices de tailles appropriées $P_i = P_i^T > c_i^2 I$, F_i $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les contraintes LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} P_j & F_j^T \\ F_j & \mu^2 I_m \end{bmatrix} > 0 \quad (25)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii}^\alpha + \Upsilon_{ij}^\alpha + \Upsilon_{ji}^\alpha < 0, \quad (26)$$

soient satisfaites pour $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $\alpha \in \{1, \dots, 2^{p \times (n+m)}\}$,

avec :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ij}^\alpha &= A_i P_j + B_i F_j + P_j A_i^T + F_j^T B_i^T \\ &- \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{e=1}^m (-1)^{d_{kv(e+n)}} \eta_{kv} \mu (B_i)_{ve} (P_{g_1(j,k)} - P_{g_2(j,k)}) \\ &- \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{s=1}^n (-1)^{d_{kvs}^\alpha} \lambda_{kvs} (A_i)_{vs} (P_{g_1(j,k)} - P_{g_2(j,k)}) \end{aligned}$$

$d_{kv(e+n)}^\alpha$, d_{kvs}^α définis à partir de :

$\alpha - 1 = d_{pm(n+m)}^\alpha + d_{pn(n+m-1)}^\alpha \times 2 + \dots + d_{111}^\alpha \times 2^{m(n+m)-1}$ et $g_1(j, k)$, $g_2(j, k)$ définies en (14), alors $x(t)$ tend asymptotiquement vers 0 pour tout $|x(0)| < c$ choisi dans le domaine de la plus grande équipotentielle contenue dans : $R_o \subseteq (R \cap C)$ avec :

$$R = \bigcap_{e,k,s,v} \left\{ x : \left| \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} u_e \right| \leq \mu \eta_{kv}, \left| \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} x_s \right| \leq \lambda_{kvs} \right\}$$

Preuve : En utilisant lemme de relaxation (6), l'expression (26) implique :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{zz}^\alpha &= A_z P_z + B_z F_z + P_z A_z^T + F_z^T B_z^T \\ &- \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{e=1}^m (-1)^{d_{kv(e+n)}^\alpha} \eta_{kv} \mu (B_z)_{ve} (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) \\ &- \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{s=1}^n (-1)^{d_{kvs}^\alpha} \lambda_{kvs} (A_z)_{vs} (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

En prenant en compte toutes les combinaisons possibles des signes et les bornes (22), (27) représente simplement l'extension de la propriété (23), il vient alors directement :

$$\begin{aligned} &A_z P_z + B_z F_z + P_z A_z^T + F_z^T B_z^T \\ &- \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{e=1}^m \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} u_e (B_z)_{ve} (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) \\ &- \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} x_s (A_z)_{vs} (P_{g_1(z,k)} - P_{g_2(z,k)}) < 0 \end{aligned}$$

ou autrement dit, $\dot{V}(x(t)) < 0$.

IV. EXEMPLES

Théorème 3 : s'il existe des matrices de tailles appropriées $P_i = P_i^T > c_i^2 I$, F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les contraintes LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} P_j & F_j^T \\ F_j & \mu^2 I_m \end{bmatrix} > 0 \quad (28)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \quad (29)$$

soient satisfaites pour $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $\alpha \in \{1, \dots, 2^{p \times (n+m)}\}$, avec :

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \Omega_{ij}^0 & (*) & \dots & (*) & (*) & \dots & (*) \\ \Omega_{ij}^{111} & -2Q_{ij}^{111} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{ij}^{pmm} & 0 & \dots & -2Q_{ij}^{pmm} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{\Omega}_{ij}^{111} & 0 & \dots & 0 & -2S_{ij}^{111} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Omega}_{ij}^{pmm} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -2S_{ij}^{pmm} \end{bmatrix},$$

$\Omega_{ij}^0 = A_i P_j + B_i F_j + P_j A_i^T + F_j^T B_i^T$
 $+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{v=1}^m \lambda_{kvs}^2 Q_{ij}^{kvs} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{e=1}^m \mu^2 \eta_{kve}^2 S_{ij}^{kve}$
 $\Omega_{ij}^{kvs} = (A_i)_{vs} (P_{g_2(j,k)} - P_{g_1(j,k)})$, $\bar{\Omega}_{ij}^{kve} = (B_i)_{ve} (P_{g_2(j,k)} - P_{g_1(j,k)})$
 et $g_1(j, k)$, $g_2(j, k)$ définies en (14), alors $x(t)$ tend asymptotiquement vers 0 pour tout $|x(0)| < c$ choisi dans le domaine de la plus grande équipotentielle contenue dans : $R_o \subseteq (R \cap C)$ avec :

$$R = \bigcap_{e,k,s,v} \left\{ x : \left| \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} u_e \right| \leq \mu \eta_{kv}, \left| \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} x_s \right| \leq \lambda_{kvs} \right\}$$

Preuve : $\dot{V}(x(t)) < 0$ est assuré par la condition:

$$\begin{aligned} & A_z P_z + B_z F_z + P_z A_z^T + F_z^T B_z^T \\ & + \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{e=1}^m \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} u_e (B_z)_{ve} (P_{g_2(z,k)} - P_{g_1(z,k)}) \\ & + \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial W_0^k}{\partial x_v} x_s (A_z)_{vs} (P_{g_2(z,k)} - P_{g_1(z,k)}) < 0 \end{aligned}$$

En utilisant la propriété (24) sur chaque terme des sommes et en utilisant les bornes (22) on aboutit alors à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \leq A_z P_z + B_z F_z + P_z A_z^T + F_z^T B_z^T \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{e=1}^m \left[\mu^2 \eta_{kve}^2 S_{zz}^{kve} + (B_z)_{ve}^2 (P_{g_2(z,k)} - P_{g_1(z,k)}) (S_{zz}^{kve})^{-1} (P_{g_2(z,k)} - P_{g_1(z,k)}) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^n \sum_{s=1}^n \left[\lambda_{kvs}^2 Q_{zz}^{kvs} + (A_z)_{vs}^2 (P_{g_2(z,k)} - P_{g_1(z,k)}) (Q_{zz}^{kvs})^{-1} (P_{g_2(z,k)} - P_{g_1(z,k)}) \right] \\ & < 0 \end{aligned}$$

En appliquant le complément Schur sur chaque terme des sommes et le lemme de relaxation le résultat (29) est direct.

Exemple 1 : On considère les matrices du modèle TS (4) de la manière suivante [19] :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -20 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

avec $h_1(x_1) = \frac{1 - \sin(x_1)}{2}$, $h_2(x_1) = \frac{1 + \sin(x_1)}{2}$ et le

compact des variables d'état : $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{\pi}{2} \right\}$.

L'approche proposée dépend du paramètre μ (borne sur l'entrée $|u| < \mu$) et du paramètre c (borne sur les conditions initiales $|x(0)| < c$). Notons que dans un cas pratique ces bornes sont directement dépendantes du système et faciles à obtenir, le problème et les contraintes LMI sont donc parfaitement déterminées.

Pour l'exemple, la figure 1 montre l'influence du paramètre μ . Plus μ est grand, plus la région d'attraction obtenue est grande. Pour déterminer la plus grande région possible (22) il est possible d'utiliser un algorithme basé sur une simple dichotomie [20]. Cet algorithme est initialisé avec des bornes quelconques η_{kv}^0 et λ_{kvs}^0 et recherche la plus grande valeur $\varepsilon > 0$ telle que les conditions du théorème 2 ou 3 soient remplies avec $\eta_{kv} = \varepsilon \eta_{kv}^0$ et $\lambda_{kvs} = \varepsilon \lambda_{kvs}^0$. Quatre trajectoires d'état du système sont également tracées, à titre d'illustration.

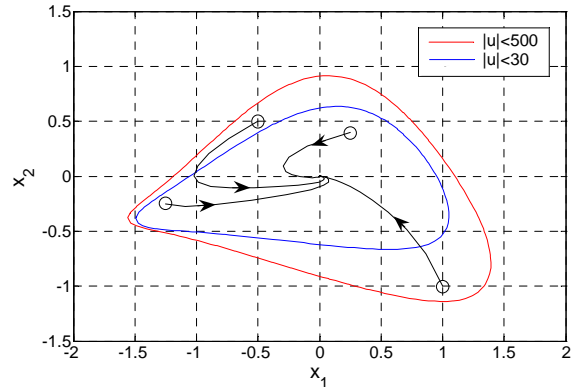


Figure 1 : Effets du paramètre μ .

Exemple 2 : On considère les matrices du modèle TS (4) suivante [13] :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

avec $h_1(x_1) = \frac{1 - \sin(x_1)}{2}$, $h_2(x_1) = \frac{1 + \sin(x_1)}{2}$, et le

compact des variables d'état : $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{\pi}{2} \right\}$.

Ce modèle est stable en boucle ouverte et on montre qu'il n'y a aucune solution dans le cas d'une fonction de Lyapunov quadratique en utilisant les conditions « classiques » [8], par exemple.

En utilisant les résultats présentés ici, on s'aperçoit que même pour une borne sur l'entrée très faible $|u| < 2.4 \times 10^{-6}$, figure 2, il est possible d'obtenir un domaine de stabilisation important. Effectivement, la région d'attraction, figure 2, est bornée principalement par la région de modélisation, c'est à dire, par $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{\pi}{2} \right\}$.

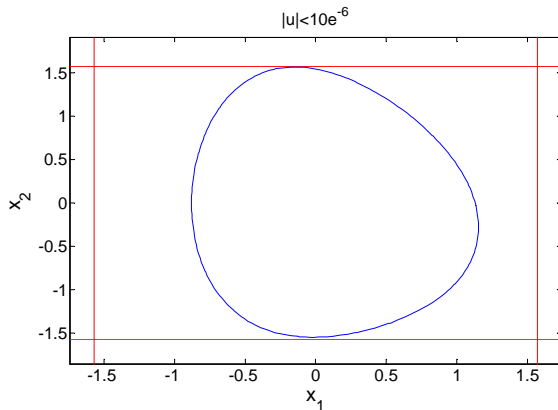


Figure 2 : Région d'attraction pour l'exemple 2.

Si on étend cette région de modélisation, par exemple, à $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, |x_i| < 5 \right\}$, bien évidemment le domaine augmente, figure 3.

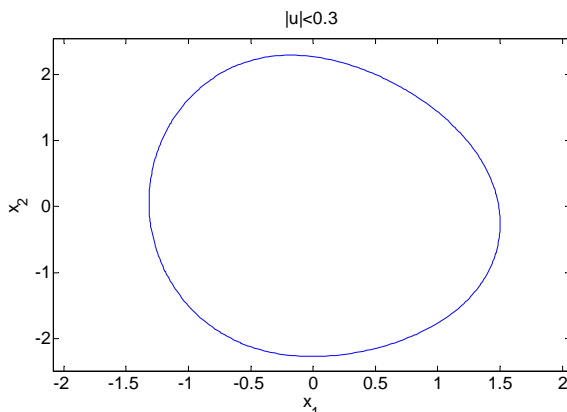


Figure 3 : Région d'attraction pour l'exemple 2.

V. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Le travail présenté est l'une des premières ouvertures « réelle » dans le domaine des fonctions de Lyapunov non quadratiques appliquées aux modèles TS, si on ne considère pas la piste des fonctions de Lyapunov indépendantes du chemin [19], mais qui pour la stabilisation ne donne pour le moment que des conditions BMI. L'approche proposée permet d'obtenir des conditions sous forme de contraintes LMI sans utiliser a priori sur la borne des dérivées des fonctions d'interpolation. Ce résultat a été obtenu en passant de la stabilité globale, qui est recherchée de façon générale, à une stabilité locale, qui est un but plus réaliste pour une grande partie des modèles non linéaires.

Il permet enfin, d'obtenir des résultats de stabilité et de stabilisation locales dans de nombreux cas où l'approche quadratique échoue, les conditions du théorème 1 garantissant

à coût sûr une stabilisation locale. Le prix à payer est soit l'augmentation du nombre de contraintes LMI (si on utilise la première majoration (23)), soit l'augmentation de la taille des contraintes LMI (si on utilise la deuxième majoration (24)). Naturellement de nombreuses pistes sont ouvertes, utilisation pour l'observation, le retour de sortie statique ou dynamique, les modèles incertains, à retards ...

L'un des enjeux majeurs sera de savoir réaliser, surtout pour des modèles d'ordre élevé, le bon compromis entre nombre de modèles linéaires, nombre de variables supplémentaires et nombre et taille des contraintes LMI. A la manière de [7], il est capital de savoir déterminer ce qu'est un « bon » modèle TS issu d'un modèle non linéaire.

VI. REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche a été financé en partie par le Campus International Campus sur la Sécurité et l'Intermodalité dans les Transports, la région Nord-Pas-de-Calais, la communauté européenne, la Délégation Régionale à la Recherche et à la Technologie, le Ministère de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie et le Centre National de la Recherche Scientifique.

REFERENCES

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control", IEEE Trans. on System Man and Cybernetics, Vol.15 (1), pp116-132. 1985
- [2] K. Tanaka and H.O. Wang, Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach. John Wiley and Sons, New York. 2001.
- [3] A. Sala, T.M. Guerra, R. Babuska, "Perspectives of fuzzy systems and control", Fuzzy Sets & Systems, Vol.156, pp432-444. 2005.
- [4] G. Feng, (2006). "A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems". IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 14(5), 676-697
- [5] T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang, "Model construction, rule reduction and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.9(4), pp525-537. 2001
- [6] H.O. Wang, K. Tanaka, M. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and Design Issues", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.4(1), pp14-23. 1996
- [7] K. Ohtake, K. Tanaka, H.O. Wang (2009). "Switching Fuzzy model construction based an optimal dividing plane", Fuzz' IEEE, Jeju Island South Korea, August
- [8] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto. "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design". IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 9(2):324-332, 2001
- [9] A. Sala and C. Ariño, "Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem" Fuzzy Sets and Systems, Vol. 158, (24), pp 2671-2686, 2007
- [10] A. Sala and C. Ariño. "Relaxed stability and performance conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with knowledge on membership-function overlap". IEEE Trans. SMC(B), 37(3):727-732, 2007
- [11] M. Bernal, T.M. Guerra, A. Kruszewski, "A membership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi-Sugeno models". Fuzzy Sets & Systems. Vol. 160 (19), pp 2776-2795, 2009
- [12] M. Johansson, A. Rantzer, K. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems". IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.7, pp 713-722, 1999

- [13] K. Tanaka, T. Hori, H.O. Wang, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 11 (4), pp 582-589, 2003
- [14] G. Feng, C.L. Chen, D. Soun, and Yan Zhu, "Hinf controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions and bilinear matrix inequalities". *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 13(1), pp 94-103, 2005
- [15] Y. Blanco, W. Perruquetti, P.Borne, "Stability and stabilization of nonlinear systems and Tanaka-Sugeno fuzzy models", in *Proc. of the European Control Conference*, Lisbon, Portugal, 2001
- [16] T.M. Guerra and L. Vermeiren, "LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form", *Automatica*, Vol. 40(5), pp 823-829, 2004
- [17] B.C. Ding, H.X. Sun, P. Yang, "Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form". *Automatica* Vol. 42, pp 503-508, 2006
- [18] A. Kruszewski, R. Wang, T.M. Guerra (2008), "Non-quadratic stabilization conditions for a class of uncertain non linear discrete-time T-S fuzzy models: a new approach". *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 53 (2), pp. 606-611
- [19] B.J. Rhee, S. Won, "A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design", *Fuzzy Sets & Systems*, Vol. 157(9), pp1211-1228, 2006
- [20] T.M. Guerra and M. Bernal, "A way to escape from the quadratic framework", in *Proc. Fuzz'IEEE Conference*, Jeju, Korea, 2009
- [21] L.A. Mozelli, R.M. Palhares, F.O. Souza, E.M.A.M. Mendes (2009), "Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems", *Automatica*, Volume 45, Issue 6, 1580-1583
- [22] K. Guelton, T. Bouarar, N. Manamanni (2009), Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems—A descriptor redundancy approach, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 160, Issue 19, 1 October 2009, Pages 2796-2811