

Analyse structurelle des systèmes, une approche graphique

Christian COMMAULT¹, Jean-Michel DION¹

¹GIPSA-Lab Département d'Automatique
Grenoble INP-CNRS-UJF ,
BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France

{Christian.Commault, Jean-Michel.Dion}@inpg.fr

Résumé— Cette présentation se décompose en deux parties. Dans une première partie nous présentons la problématique de la modélisation structurelle et nous introduisons le modèle associé, celui des systèmes structurés. Un modèle structuré est un modèle d'état linéaire dans lequel les matrices classiques de la représentation sont composées de zéros ou de paramètres indépendants. Nous nous intéressons aux propriétés génériques de tels modèles, c'est-à-dire à des propriétés vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres. Il a été montré que beaucoup de ces propriétés peuvent être analysées par l'étude d'un graphe associé de manière très naturelle au système structuré. Nous illustrons ceci sur quelques propriétés classiques et nous montrons à quel point les résultats ont des interprétations physiques intéressantes. Les algorithmes de résolution et leur complexité sont également évoqués. Dans la deuxième partie nous nous intéressons, toujours dans l'esprit structurel, au problème de classification de capteurs. Soit un système avec son réseau de capteurs et une propriété qui est satisfaite pour ce système avec les capteurs existants (par exemple observabilité, détection de défauts), on s'intéresse à la classification des capteurs selon leur importance relativement à la préservation de cette propriété en cas de panne éventuelle de ceux-ci. Plus précisément on caractérise les capteurs critiques (essentiels) dont la panne implique la perte de la propriété considérée et ceux qui sont inutiles dans le sens où dans tous les cas leur perte ne fait pas perdre la propriété. On caractérise également le degré d'importance des capteurs qui ne sont ni critiques ni inutiles. Cette approche très générale est illustrée, par exemple pour l'observabilité, sur les systèmes structurés introduits précédemment. L'exposé montre que l'analyse structurelle des systèmes dynamiques permet, à partir d'un modèle très simple, d'obtenir facilement des informations qualitatives importantes sur le comportement de ces systèmes.

Mots-clés— Systèmes structurés, graphes, propriétés génériques, classification de capteurs

I. INTRODUCTION

Ce travail est centré sur l'approche structurelle des systèmes linéaires. On s'intéresse à des systèmes dépendant de paramètres variables mais possédant une "structure" fixe. Notre but est d'étudier des propriétés qui dépendent essentiellement de cette structure et pas de la valeur exacte des paramètres. Un certain nombre de modèles ont été proposés pour prendre en compte cette structure. On peut citer par exemple les approches variables-contraintes [1], les bond graphs [2] ou les graphes causaux [3]. On considère ici une classe générale de systèmes dépendant de paramètres : les systèmes structurés [4], [5]. A ces systèmes on peut facilement associer un graphe et analyser sur celui-ci les propriétés structurelles ou génériques (vraies pour presque toutes

les valeurs des paramètres) du système considéré. Dans ce graphe les sommets représentent les variables (entrées, états, sorties, perturbations, défauts, ...) et les arcs les relations entre variables. Le graphe visualise donc souvent la structure physique interne du système. Un aspect remarquable de ce modèle est qu'avec peu d'information sur le système on peut caractériser les propriétés et la solubilité de nombreux problèmes de commande, d'observation ou de diagnostic.

Le modèle système structuré que nous considérons a été introduit par [4] pour l'étude de la commandabilité générique. Le rang générique d'une matrice de transfert a été étudié dans [6]. La structure à l'infini qui joue un rôle important dans la résolution de problèmes de commande a été caractérisée dans [7], [8]. Les problèmes de commande classique ont été étudiés dans ce contexte, citons le découplage [9], [10], le rejet de perturbations [7], [8], la commande décentralisée [11]. Des problèmes d'observabilité et de diagnostic ont également été considérés [12], [13], [14]. D'autres références peuvent être trouvées dans les livres de [15], [5] ou dans l'article de synthèse [16].

Dans une première partie de cet article nous présentons un bref survol des propriétés des systèmes structurés et de la résolution de quelques problèmes de commande. Nous étudions plus en détail le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, c'est un problème assez difficile dont la résolution dépend fortement de la structure du système. Les algorithmes de résolution et leur complexité sont également évoqués.

Dans la deuxième partie nous nous intéressons, toujours dans l'esprit structurel, au problème de classification de capteurs. Soit un système avec son réseau de capteurs et une propriété qui est satisfaite pour ce système avec les capteurs existants (par exemple observabilité, détection de défauts), on s'intéresse à la classification des capteurs selon leur importance relativement à la préservation de cette propriété en cas de panne éventuelle de ceux-ci. Plus précisément on caractérise les capteurs critiques (essentiels) dont la panne implique la perte de la propriété considérée et ceux qui sont inutiles dans le sens où dans tous les cas leur perte ne fait pas perdre la propriété. On caractérise également le degré d'importance des capteurs qui ne sont ni critiques ni inutiles. Cette approche très générale est illustrée, par exemple pour l'observabilité, sur les systèmes

structurés introduits précédemment. L'exposé montre que l'analyse structurelle des systèmes dynamiques permet, à partir d'un modèle très simple, d'obtenir facilement des informations qualitatives importantes sur le comportement de ces systèmes.

Le plan de cet article est le suivant. Dans la Section 2 nous motivons l'utilisation du modèle système structuré. En section 3 nous introduisons la notion de système structuré ainsi que quelques résultats de base et nous détaillons le rejet de perturbation que nous illustrons avec un exemple pédagogique. Dans la Section 4 nous présentons la classification des capteurs pour une propriété générale. La Section 5 présente l'application des notions précédentes au problème de l'observabilité. La Section 6 est consacrée à la classification de capteurs pour la détection de défauts et le rejet de perturbation. En section 7 on donne une classification quantitative des capteurs pour une propriété générale. Quelques remarques en guise de conclusion terminent le papier.

II. MOTIVATION

En pratique, nous sommes souvent confrontés à la situation suivante lors de la modélisation d'un système physique : le système peut contenir des paramètres fixes qui représentent le rôle particulier joué par certaines variables dans le système. Ceci peut arriver si le système est composé, par exemple, de sous-ensembles connectés en série. Une autre raison pour l'existence de paramètres fixes est l'existence de relations algébriques entre variables, par exemple lorsqu'une variable est la dérivée d'une autre. Enfin l'absence de relation directe entre variables se traduit par un paramètre nul dans le modèle.

Le modèle peut contenir également des paramètres qui représentent des relations empiriques ou des lois de la physique qui lient les variables entre elles. De tels paramètres sont par exemple des masses, des inerties, ..., obtenues par identification. Une caractéristique commune de ces paramètres est qu'ils sont sujets aux erreurs de modélisation. Une autre situation commune est celle de la linéarisation des modèles, dans ce cas, la structure zéro/non zéro est fixe mais la valeur des paramètres non nuls varie avec le point de fonctionnement. Comme illustré Figure 1, le modèle linéarisé d'une colonne de distillation montre une structure invariante par rapport au point de fonctionnement [17]

L'approche habituelle des systèmes linéaires souffre de plusieurs inconvénients par rapport aux remarques précédentes. D'abord elle ne permet pas de prendre en compte l'information structurelle sur les paramètres, ensuite elle suppose ces paramètres parfaitement connus. Bien sûr un certain nombre d'approches permettent de prendre en compte l'aspect incertain du système, par exemple les modèles stochastiques ou les études de robustesse. Ces approches permettent par optimisation l'obtention de lois de commande stabilisantes mais ne permettent pas d'analyser la structure interne du système. Elles ne conduisent en général qu'à des conditions suffisantes. Une notion intéressante qui permet de prendre en compte quelques unes des observations précédentes est la notion de système structuré dans une représentation d'état avec coefficients paramétrés [16]. La structure est essentiellement déterminée par la position des zéros fixes dans les matrices de la représentation

d'état. A un système structuré on peut associer de façon naturelle un graphe orienté. Les propriétés génériques du système peuvent alors souvent être caractérisées très simplement en termes de propriétés du graphe associé. Ceci rend très intuitifs certains résultats. Cette modélisation a les caractéristiques suivantes :

1. elle permet de prendre en compte une partie importante de l'information structurelle provenant des lois physiques et de la décomposition du système en sous-systèmes,
2. elle donne à travers le graphe une représentation visuelle de cette structure,
3. elle permet l'étude des propriétés du système presque indépendamment des valeurs des paramètres inconnus, ces paramètres inconnus étant en général des fonctions des paramètres physiques,
4. le coût de calcul pour tester une propriété est en général très réduit, ce qui permet de traiter des problèmes de grande dimension, en particulier s'ils sont très "creux".

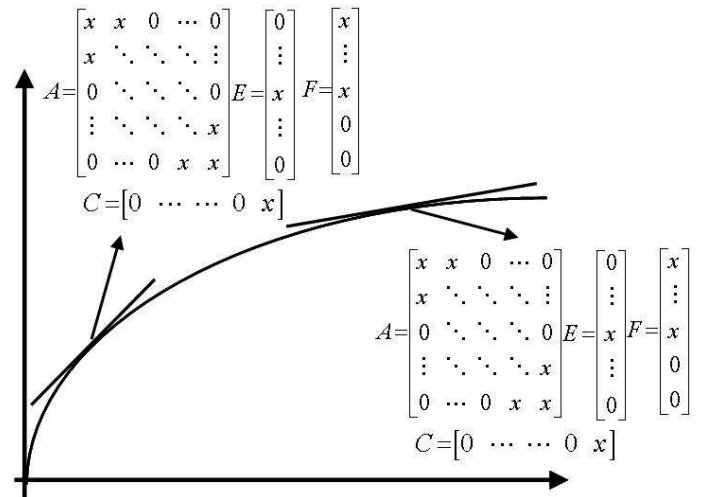


Fig. 1. Le modèle d'une colonne de distillation

III. SYSTÈMES STRUCTURÉS

A. Le modèle

On considère une classe de systèmes linéaires dépendant de paramètres (les systèmes linéaires structurés) décrite par le modèle suivant :

$$\Sigma_{\lambda} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des sorties mesurées. A, B, C sont des matrices de dimensions appropriées telles que les éléments de la matrice composite $J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ sont soit des zéros fixes soit des paramètres indépendants (non reliés par des relations algébriques). $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ contient l'ensemble des paramètres indépendants de la matrice J . Sur Σ_{λ} on étudiera des propriétés génériques (vraies pour presque toute valeur des paramètres). Dans cette présentation on utilisera à la fois des matrices structurées (dépendant de paramètres) et des matrices à éléments réels connus. Par simplicité de notation

on omettra la dépendance en λ de ces matrices, le contexte évitera toute ambiguïté.

A un tel système on peut facilement associer un graphe $G(\Sigma_\lambda) = (V, W)$ dont l'ensemble des sommets est $V = U \cup X \cup Y$ où U , X et Y sont les entrées, états et sorties donnés respectivement par $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$. L'ensemble d'arcs est $W = \{(u_i, x_j) | B_{ji} \neq 0\} \cup \{(x_i, x_j) | A_{ji} \neq 0\} \cup \{(x_i, y_j) | C_{ji} \neq 0\}$, où A_{ji} (resp. B_{ji} , C_{ji}) est l'élément (j, i) de la matrice A (resp. B , C). De plus rappelons qu'un *chemin* dans $G(\Sigma_\lambda)$ reliant le sommet i_0 au sommet i_l est une suite d'arcs $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{l-2}, i_{l-1}), (i_{l-1}, i_l)$ telle que $i_t \in V$ pour $t = 0, 1, \dots, l$ et $(i_{t-1}, i_t) \in W$ pour $t = 1, 2, \dots, l$. Un chemin est appelé *circuit* quand $i_0 = i_l$.

Un ensemble de chemins sans sommet commun est dit *sommet-disjoint*. Un *couplage* V_1 - V_2 de dimension k , où V_1 et V_2 sont inclus dans V , est un ensemble de k chemins sommet-disjoints entre V_1 et V_2 . Un tel couplage est maximum quand k est maximum.

Exemple 1 : Considérons un système structuré Σ_λ de type (1) avec 3 états, 3 entrées et 2 sorties :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

Les éléments non nuls des matrices sont les paramètres libres $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7)$. Le graphe associé $G(\Sigma_\lambda)$ est donné Figure 2.

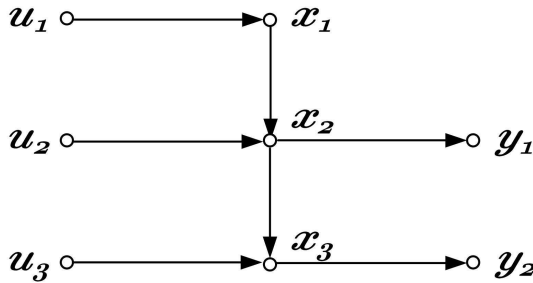


Fig. 2. Graphe $G(\Sigma_\lambda)$ de l'exemple 1

B. Quelques résultats de base

De nombreux résultats ont été obtenus pour les systèmes structurés en utilisant le graphe associé. Commençons par le résultat suivant qui exprime le rang générique de la matrice de transfert entre les entrées et les sorties du système [6].

Proposition 1 : Soit Σ_λ le système structuré défini par (1) et son graphe associé $G(\Sigma_\lambda)$. Le rang générique de $C(sI - A)^{-1}B$ est égal à la dimension maximum d'un couplage entrée-sortie dans $G(\Sigma_\lambda)$.

On peut également caractériser l'observabilité comme suit [4], [18].

Proposition 2 : Soit Σ_λ le système structuré défini par (1) et son graphe associé $G(\Sigma_\lambda)$. Le système (en fait la paire (C, A)) est structurellement observable si et seulement si :

- tous les sommets d'état sont reliés à un sommet de sortie par un chemin (propriété de *connexion à la sortie*)
- il existe un ensemble de circuits et de chemins état-sortie sommets-disjoints qui couvre tous les sommets d'état (propriété de *non contraction*).

La propriété de non contraction correspond au fait qu'il n'existe pas dans le graphe d'ensemble de k sommets ayant k' successeurs où $k' < k$.

Reprenons le système de l'Exemple 1. Il existe un couplage de dimension 2 dans le graphe, (u_2, x_2, y_1) et (u_3, x_3, y_2) , donc le rang générique est 2. On peut vérifier que la matrice de transfert du système

$$T(s) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 s^{-2} & \lambda_4 \lambda_6 s^{-1} & 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_7 s^{-3} & \lambda_2 \lambda_4 \lambda_7 s^{-2} & \lambda_5 \lambda_7 s^{-1} \end{bmatrix}$$

est bien de rang générique 2. Ce système est structurellement observable par la Proposition 1. En fait il existe un chemin entre chaque état et une sortie. De même il existe un ensemble de chemins état-sortie sommets-disjoints (x_1, x_2, y_1) et (x_3, y_2) qui couvre tous les sommets d'état.

L'étude de l'observabilité des systèmes structurés a été étendue au cas des systèmes singuliers dans [14], des systèmes bilinéaires dans [19] et à d'autres aspects de l'observabilité dans [20].

C. Le rejet de perturbation

Le problème du rejet de perturbation est un problème très classique qui a reçu une solution élégante en termes géométriques dans les années 70 [21], [22]. Le problème peut se formuler de la façon suivante, on considère le système :

$$\Sigma_q : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

où $q(t) \in \mathbb{R}^d$ est une entrée additionnelle appelée perturbation dont on aimerait qu'elle n'influence pas la sortie. On cherche une commande par retour d'état, $u(t) = Fx(t)$, telle que la matrice de transfert perturbation-sortie soit nulle, c'est-à-dire :

$$T_F(s) = C(sI - A - BF)^{-1}E = 0. \quad (3)$$

Une condition nécessaire et suffisante bien connue pour que ce problème ait une solution est que :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^* \quad (4)$$

où \mathcal{E} est l'image de E et \mathcal{V}^* est le plus grand sous-espace (A, B) -invariant de $\text{Ker } C$. Une introduction simple à la théorie géométrique est donnée dans [23]. En fait le sous-espace \mathcal{V}^* se calcule facilement de façon itérative, il s'agit du plus grand sous-espace non observable qu'on peut obtenir par retour d'état.

Quand la perturbation est accessible à la mesure, la loi de commande s'écrit $u(t) = Fx(t) + Jq(t)$ et on cherche alors F et J telles que la matrice de transfert en boucle fermée soit nulle :

$$T_{F,J}(s) = C(sI - A - BF)^{-1}(BJ + E) = 0. \quad (5)$$

La condition de solubilité du problème devient :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^* + \mathcal{B} \quad (6)$$

où \mathcal{B} représente l'Image de B .

D. Le rejet de perturbation, approche graphique

Dans le contexte des systèmes structurés, le système $\Sigma_{q\lambda}$ s'écrit :

$$\Sigma_{q\lambda} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (7)$$

et on peut lui associer le graphe $G(\Sigma_{q\lambda})$ en ajoutant à $G(\Sigma_\lambda)$ les sommets $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_d\}$ correspondant aux perturbations et les arcs $\{(q_i, x_j) | E_{ji} \neq 0\}$ où E_{ji} est l'élément (j, i) de la matrice E . Pour des raisons de simplicité on considère ici le problème du rejet de perturbation avec mesure, $u(t) = Fx(t) + Jq(t)$, on a alors [24] :

Théorème 1 : Considérons un système structuré du type (7) dont le graphe est $G(\Sigma_{q\lambda})$. Le problème du rejet de perturbation par retour d'état avec mesure de la perturbation est génériquement soluble si et seulement si

1. Un couplage maximum de U à Y dans $G(\Sigma_\lambda)$ et un couplage maximum de $U \cup Q$ à Y dans $G(\Sigma_{q\lambda})$ ont la même taille notée r .

2. $L_r = L_{d,r}$, où L_r est le nombre minimum de sommets de X contenus dans un couplage de taille r de U à Y dans $G(\Sigma_{q\lambda})$ et $L_{d,r}$ est le nombre minimum de sommets de X contenus dans un couplage de taille r de $U \cup Q$ à Y dans $G(\Sigma_{q\lambda})$.

Ce théorème exprime le fait que pour résoudre le problème les commandes doivent être suffisamment nombreuses et rapides pour éliminer l'influence des perturbations avant qu'elles n'atteignent la sortie. Ceci peut être illustré par les exemples simples suivants.

Exemple 2 : Considérons d'abord le système dont le graphe est visualisé Figure 3.

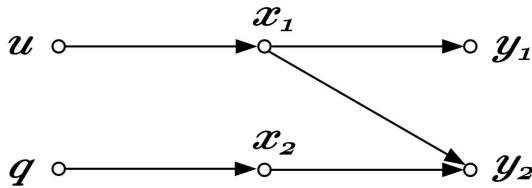


Fig. 3. Graphe $G(\Sigma_{q\lambda})$ de l'exemple 2

Il est clair qu'un couplage maximum entre U et Y est de taille 1 alors qu'un couplage maximum entre $U \cup Q$ et Y est de taille 2. La condition 1 du Théorème 1 n'est pas satisfaite, le problème de rejet de perturbation avec mesure de la perturbation n'a donc pas de solution. En effet, la commande ne peut pas éliminer l'effet de la perturbation sur y_2 sans influencer y_1 .

Exemple 3 : Considérons maintenant le système dont le graphe est visualisé Figure 4.

La condition 1 est clairement vérifiée sur le graphe avec un couplage de taille 1. La seconde condition est également satisfaite puisque $L_1 = L_{d,1} = 1$ donc, le problème de rejet de perturbation avec mesure de la perturbation a une solution. La perturbation étant connue on peut calculer une commande qui annule son effet en x .

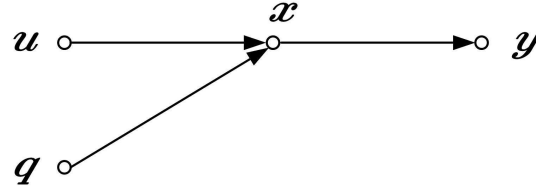


Fig. 4. Graphe $G(\Sigma_{q\lambda})$ de l'exemple 3

E. Le rejet de perturbation par retour de mesure

Repartons du système (2) et supposons que les perturbations ne sont pas mesurables et que l'état n'est pas complètement accessible. On a un vecteur de sorties mesurées $z = Hx$. La loi de commande considérée est très générale, il s'agit d'un retour dynamique de mesure. Nous considérons donc le système suivant Σ_{qz} , voir Figure 5

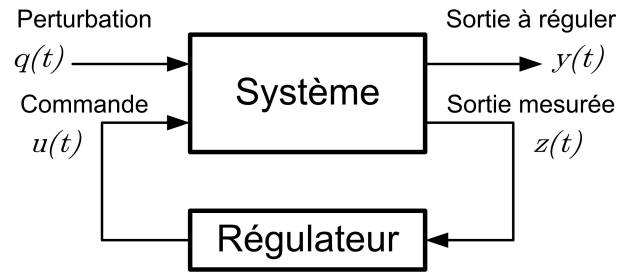


Fig. 5. Le retour de mesure

$$\Sigma_{qz} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (8)$$

où $z(t) \in \mathbb{R}^l$. Le problème de rejet de perturbation revient à trouver un retour dynamique de mesure défini par

$$\Sigma_{fb} : \begin{cases} \dot{w}(t) = Lw(t) + Mz(t) \\ u(t) = Nw(t) + Pz(t) \end{cases} \quad (9)$$

où $w(t) \in \mathbb{R}^\mu$, tel que le transfert en boucle fermée entre q et y soit nul. En termes de matrices de transfert on a :

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) & K(s) \\ M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ q(s) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$u(s) = F(s)z(s)$ et $F(s)$ telle que

$$G(s)F(s)(I - M(s)F(s))^{-1}N(s) + K(s) = 0 \quad (11)$$

Ce problème assez difficile a une solution très élégante en termes géométriques (voir [25], [26]). Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution est que

$$\mathcal{N}^* \subset \mathcal{V}^* \quad (12)$$

où \mathcal{N}^* est le plus petit sous-espace (H, A) -invariant contenant $\text{Im } E$ et \mathcal{V}^* le plus grand sous-espace (A, B) -invariant contenu dans $\text{Ker } C$.

Quand le système est structuré le modèle devient

$$\Sigma_{qz\lambda} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (13)$$

On peut lui associer le graphe $G(\Sigma_{qz\lambda})$ en ajoutant à $G(\Sigma_{q\lambda})$ les sommets $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ correspondant aux mesures et les arcs $\{(x_i, z_j) | H_{ji} \neq 0\}$. Le problème de rejet de perturbation revient alors à trouver un retour dynamique de mesure, qui dépendra des paramètres, tel que le transfert en boucle fermée entre q et y soit nul. Définissons l'ensemble \mathcal{I}^* .

$\mathcal{I}^* = \{x_i \in X \mid \text{la taille maximum d'un couplage de } U \cup x_i \text{ à } Y \text{ dans } G(\Sigma_{qz\lambda}) \text{ est la même que la taille maximum d'un couplage de } U \text{ à } Y \text{ dans } G(\Sigma_{q\lambda}), \text{ et le nombre minimum de sommets de } U \cup X \text{ dans les deux couplages est le même}\}.$

\mathcal{V}_λ^* , le plus grand sous-espace (A, B) -invariant contenu dans $\text{Ker } C$ de $\Sigma_{qz\lambda}$, varie en fonction des paramètres et sa partie fixe \mathcal{V}_F^* correspond sur le graphe à \mathcal{I}^* qui caractérise les perturbations qui peuvent être rejetées par retour d'état. De manière duale, on définit l'ensemble \mathcal{J}^* .

$\mathcal{J}^* = \{x_j \in X \mid \text{la taille maximum d'un couplage de } Q \text{ à } Z \cup x_j \text{ dans } G(\Sigma_{qz\lambda}) \text{ est la même que la taille maximum d'un couplage de } Q \text{ à } Z \text{ dans } G(\Sigma_{qz\lambda}), \text{ et le nombre minimum de sommets de } X \cup Z \text{ dans les deux couplages est le même}\},$

Nous avons alors $\mathcal{N}_F^* = \{e_j \text{ pour } j \text{ tel que } x_j \in X/\mathcal{J}^*\}$, où \mathcal{N}_F^* est le plus petit sous-espace fixe contenant les \mathcal{N}_λ^* quand λ varie dans \mathbb{R}^k . En fait \mathcal{J}^* contient tous les états qui peuvent être estimés de manière indépendante de la perturbation et c'est donc dans cet ensemble que se feront les mesures utiles. On a la série d'inclusions d'espaces suivante :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{N}_\lambda^* \subset \mathcal{N}_F^* \subset \mathcal{V}_F^* \subset \mathcal{V}_\lambda^* \subset \text{Ker } C \quad (14)$$

illustrée sur la Figure 6 dans laquelle les espaces associés à \mathcal{I}^* et \mathcal{J}^* sont visualisés avec des hachures.

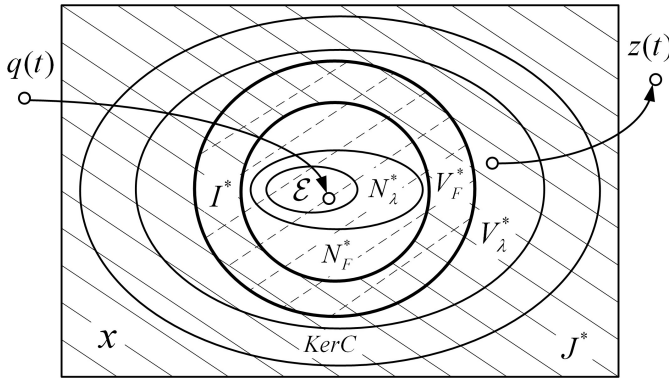


Fig. 6. Les inclusions d'espaces

Finalement la condition géométrique (12) peut se traduire pour les systèmes structurés comme suit [27], [28].

Théorème 2 : Considérons un système structuré du type (13) et de graphe $G(\Sigma_{qz\lambda})$. Le rejet de perturbation avec retour de mesure est génériquement soluble si et seulement si

$$\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X. \quad (15)$$

Cette condition exprime que le nombre de mesures doit être suffisant et que le temps pour mesurer puis commander doit être inférieur au temps mis par la perturbation pour atteindre la sortie.

F. Exemple des cinq bacs

Exemple 4 : Considérons le procédé thermo-hydraulique représenté Figure 7. Ce procédé est composé de 5 bacs, cha-

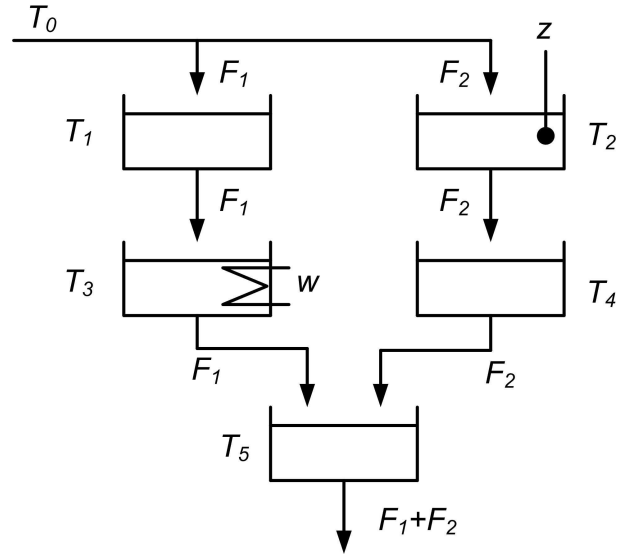


Fig. 7. Le procédé à 5 bacs de l'exemple 4

cun étant alimenté par un débit fixe F_1 pour les bacs 1 et 3, F_2 pour les bacs 2 et 4 et $(F_1 + F_2)$ pour le cinquième. L'entrée de commande est la puissance de chauffe w du bac 3. La sortie à réguler est la température T_5 du cinquième bac. La perturbation est la température d'alimentation T_0 et la sortie mesurée z est la température T_2 .

Le problème de rejet de perturbation consiste à trouver une loi de commande par retour de mesure (utilisant uniquement T_2) pour que T_5 soit insensible aux variations de T_0 . En choisissant comme variables d'état les variations de température autour d'un point de fonctionnement on aboutit à un modèle linéarisé du type (8) où

$$x(t) = [\Delta T_1(t) \quad \Delta T_2(t) \quad \Delta T_3(t) \quad \Delta T_4(t) \quad \Delta T_5(t)]^T \quad (16)$$

$$q(t) = \Delta T_0(t), u(t) = \Delta w(t) \text{ and } y(t) = \Delta T_5(t)$$

avec les matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{F_1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_2}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_1}{C_3} & 0 & -\frac{F_1}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{C_4} & 0 & -\frac{F_2}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_1}{C_5} & \frac{F_2}{C_5} & -\frac{F_1-F_2}{C_5} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/C_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} F_1/C_1 \\ F_2/C_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \quad H = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

C_i correspond à la capacité calorifique du bac i . A ce modèle on peut aisément associer un système structuré du

type (13) dont les matrices sont :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_{10} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$E = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \lambda_{13}]$$

$$H = [0 \ \lambda_{14} \ 0 \ 0 \ 0]$$

Le graphe associé est donné Figure 8. En utilisant l'algo-

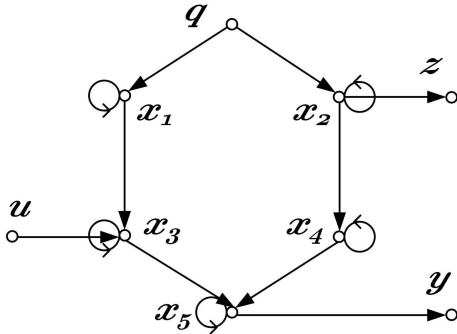


Fig. 8. Graphe de l'exemple des bacs

rithme itératif donné dans [22]

$$\begin{cases} V_0 = \text{Ker} C \\ V_k = \text{Ker} C \cap A^{-1}(V_{k-1} + \text{Im} B) \end{cases} \quad (19)$$

on peut calculer le sous-espace (A, B) -invariant maximum contenu dans $\text{Ker} C$, \mathcal{V}_λ^* .

$$\mathcal{V}_\lambda^* = \text{Span} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_7/\lambda_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Le sous-espace, partie fixe de \mathcal{V}_λ^* et noté \mathcal{V}_F^* est clairement

$$\mathcal{V}_F^* = \text{Span} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

De façon duale calculons \mathcal{N}^* le plus petit sous-espace (H, A) -invariant contenant $\text{Im} E$ en utilisant l'algorithme itératif

$$\begin{cases} N_0 = \text{Im} E \\ N_k = A(N_{k-1} \cap \text{Ker} H) + \text{Im} E \end{cases} \quad (22)$$

pour obtenir finalement

$$\mathcal{N}_\lambda^* = \text{Span} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Son enveloppe fixe minimale est donnée par \mathcal{N}_F^*

$$\mathcal{N}_F^* = \text{Span} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Pour presque toute valeur des paramètres la condition (12) est satisfaite, à savoir

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{N}_\lambda^* \subset \mathcal{N}_F^* \subset \mathcal{V}_F^* \subset \mathcal{V}_\lambda^* \subset \text{Ker} C \quad (25)$$

Le rejet de perturbation avec retour de mesure est donc génériquement soluble.

Par l'approche graphique on peut calculer directement les ensembles de sommets \mathcal{I}^* et \mathcal{J}^* qui valent respectivement

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2\}, \mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\} \quad (26)$$

Donc $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ et le problème a une solution par le Théorème 2.

Dans la pratique, la mesure de la température du deuxième bac est une information suffisamment rapide sur la perturbation T_0 pour qu'elle soit prise en compte par l'action de w dans le bac 3 et que la perturbation T_0 soit ensuite compensée à temps au niveau du bac 5.

Il y a au moins deux problèmes qui n'ont pas été pris en compte dans l'analyse précédente :

- Le système n'est pas réellement structuré à cause de dépendances entre paramètres dans les matrices d'état.
- les résultats de solubilité du problème DRMF garantissent seulement que le transfert entre la perturbation et la sortie régulée est nul mais ne considèrent pas la stabilité interne.

Cette approche nécessite donc une analyse supplémentaire avant application pratique. Sur l'exemple des 5 bacs, en utilisant les arguments géométriques de [26], on peut prouver que pour toute valeur positive des paramètres physiques, le système compensé est stable. De plus dans cet exemple, le compensateur peut aisément se calculer à partir de l'équation (11).

L'exemple a été simulé avec des valeurs physiques raisonnables comme suit :

- Les volumes des 5 bacs sont de $5l$ ce qui conduit à une capacité calorifique de $20.93J.K^{-1}$,
- les débits sont $F_1 = 0.1l/s$, $F_2 = 0.05l/s$,
- la température d'alimentation est de $20 \pm 10^\circ C$,
- le point de fonctionnement correspond à une température $T_5 = 40^\circ C$ avec un débit d'alimentation à $T_0 = 20^\circ C$, ce qui implique une puissance de chauffe de $u = 12.558kW$.

Notre but est de maintenir la température de sortie à $T_5 = 40^\circ C$ pour toute variation de la température T_0 . Les courbes montrant les variables d'intérêt en boucle ouverte et avec le compensateur sont données dans les Figures 9 et 10 respectivement. Les détails de cette analyse sont donnés dans [29].

G. Le problème du découplage

Dans cette sous-section on donne un aperçu du problème du découplage.

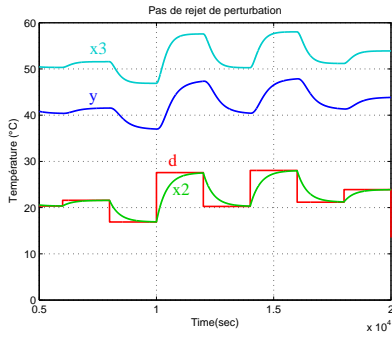


Fig. 9. Effet de la perturbation sur le système en boucle ouverte

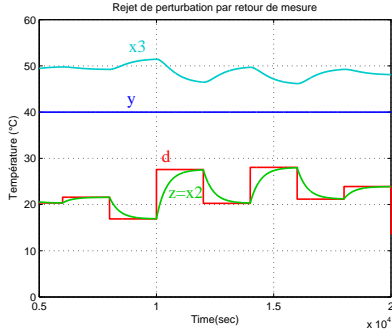


Fig. 10. Effet de la perturbation sur le système en boucle fermée

Le problème du découplage est un problème ancien et célèbre. En plus de sa portée pratique il a conduit à de nombreux résultats théoriques en théorie des systèmes [22]. Rappelons la formulation de ce problème. On considère un système du type (1), que l'on suppose carré, c'est-à-dire $m = p$. On cherche un retour d'état $u(t) = Fx(t) + Jv(t)$, où $v(t) \in \mathbb{R}^p$ est la consigne, avec J inversible, tel que le transfert en boucle fermée

$$T_{F,J}(s) = (C + DF)(sI - A - BF)^{-1}BJ + DJ \quad (27)$$

soit diagonal et nonsingulier. On a le résultat suivant [9].

Théorème 3 : Considérons un système structuré du type (1) dont le graphe est $G(\Sigma_\lambda)$ et avec $m = p$. le découplage par retour d'état est génériquement soluble si et seulement si

- il existe un couplage de taille m dans $G(\Sigma_\lambda)$ de U à Y ,
- $L_m = \sum_{i=1}^m L^{(i)}$, où L_m est le nombre minimum de sommets de X contenus dans un couplage de taille m de $G(\Sigma_\lambda)$ de U à Y , et $L^{(i)}$ est le nombre minimum de sommets de X contenus dans un chemin de U à $\{y_i\}$ dans $G(\Sigma_\lambda)$.

En pratique ce résultat montre qu'il n'y aura pas de solution au découplage si une entrée agit sur plusieurs sorties plus rapidement que les autres. Cette analyse a été étendue au cas où le système est également soumis à des perturbations voir [30], au cas du découplage avec précompensation voir [31] et au cas des systèmes à retards voir [32].

H. Aspects numériques

Tous les résultats mentionnés précédemment, et de nombreux autres résultats de la théorie des systèmes structurés, peuvent être vérifiés par des algorithmes classiques de graphes et sont de complexité polynomiale. Par exemple

- tester la connexion à la sortie peut se faire à l'aide d'un algorithme élémentaire de marquage,
- la propriété de non contraction implique la recherche d'un couplage maximum dans un graphe biparti
- la recherche de couplages avec un nombre minimum de sommets peut être vu comme un problème de flot maximum à coût minimum.

Une discussion plus approfondie sur les méthodes de résolution est présentée dans [33], voir également [34].

IV. CLASSIFICATION DE CAPTEURS

A. Motivation

Reprenons l'Exemple 4 des 5 bacs et intéressons nous à l'observabilité de ce système.

D'après la Proposition 2, la deuxième condition est toujours satisfaite car chaque sommet est couvert par un circuit. En revanche, il est clair que ce système n'est pas observable avec uniquement la sortie mesurée $z = T_2$. En effet, sur le graphe de la Figure 8, x_1 , x_3 , x_4 et x_5 ne sont pas reliés à une mesure. Il faut donc rajouter des capteurs et se pose alors le problème de leur localisation. Ce problème a été étudié dans [35], voir également [36] pour la localisation de capteurs pour le diagnostic.

Supposons ce problème résolu pour l'exemple des 5 bacs, à savoir que le système est équipé d'un réseau de capteurs qui assure l'observabilité.

- Par la première condition de la Proposition 2 il est nécessaire que x_5 (la température T_5) soit relié à une mesure. S'il existe un seul capteur assurant la mesure de T_5 , celui-ci est *essentiel* pour l'observabilité, c'est-à-dire que sa perte entraîne la perte de l'observabilité.
- Avec un capteur mesurant T_5 on garantit l'observabilité complète du système puisque les deux conditions de la Proposition 2 sont satisfaites. Il en résulte que tout autre capteur supplémentaire est *inutile* pour l'observabilité.

On peut généraliser cette observation pour un système avec son réseau de capteurs et une propriété qui est satisfaite pour ce système avec les capteurs existants (par exemple observabilité, détection de défauts). On s'intéresse à la classification des capteurs selon leur importance relativement à la préservation de cette propriété en cas de panne éventuelle de ceux-ci. Plus précisément on caractérise les capteurs critiques (essentiels) dont la panne implique la perte de la propriété considérée et ceux qui sont inutiles dans le sens où dans tous les cas leur perte ne fait pas perdre la propriété.

B. Définitions

Un capteur défaillant est un capteur dont la mesure n'est plus disponible. La mesure correspondante n'apparaît alors plus dans le modèle. Une propriété \mathcal{P} est une fonction d'un ensemble de capteurs $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ dans $\{0, 1\}$ et la propriété \mathcal{P} est vraie quand $\mathcal{P}(Y) = 1$.

Pour une propriété \mathcal{P} on définit différentes catégories de capteurs :

Définition 1 : Soit Σ un système avec son réseau de capteurs Y et une propriété \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}(Y) = 1$. On appelle **ensemble admissible de capteurs pour la propriété**

\mathcal{P} un ensemble de capteurs $V \subseteq Y$ tel que $\mathcal{P}(V) = 1$.

1. Un capteur y^* est appelé **capteur inutile** si pour tout ensemble admissible de capteurs V contenant y^* , $V \setminus \{y^*\}$ est encore un ensemble admissible de capteurs pour \mathcal{P} , où $V \setminus \{y^*\}$ est l'ensemble V moins le capteur y^* . Un capteur qui n'est pas inutile est appelé **capteur utile**.

2. Un capteur y^* est appelé **capteur essentiel** si y^* appartient à tout ensemble admissible de capteurs V . L'ensemble des capteurs essentiels est un sous-ensemble de l'ensemble des capteurs utiles.

V. CLASSIFICATION DE CAPTEURS POUR L'OBSERVABILITÉ

Dans cette section on étudie séparément la classification des capteurs pour les propriétés de la Proposition 2, à savoir connexion et non contraction. Ensuite nous donnons la classification pour l'observabilité.

A. Classification de capteurs pour la connexion à la sortie

Pour la connexion à la sortie, on définit des *séparateurs irréductibles* qui sont des ensembles minimaux de sommets de sortie dont la perte déconnecte le système des sorties. L'ensemble de ces séparateurs irréductibles peut être obtenu de manière polynomiale [12].

Proposition 3 : Soit le système linéaire structuré Σ_λ défini dans (1) dont le graphe associé est $G(\Sigma_\lambda)$.

- Les capteurs essentiels pour la connexion à la sortie sont les capteurs correspondant aux séparateurs irréductibles de cardinalité 1.
- Les capteurs inutiles pour la connexion à la sortie sont les capteurs n'appartenant à aucun séparateur irréductible.

Illustrons cette classification sur l'exemple suivant :

Exemple 5 : Soit Σ_λ le système linéaire structuré dont le graphe associé $G(\Sigma_\lambda)$ est donné en Figure 11.

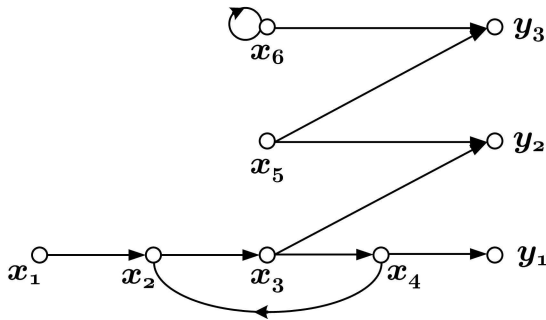


Fig. 11. $G(\Sigma_\lambda)$ pour l'Exemple 5

Ce système est connecté à la sortie car tout sommet d'état est relié au moins à une sortie. On peut observer que les sommets $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ restent connectés à la sortie tant que y_1 ou y_2 ne tombent pas en panne. Mais si $\{y_1, y_2\}$ sont simultanément en panne, ces sommets ne sont plus connectés à la sortie. $\{y_1, y_2\}$ est donc un séparateur irréductible. $\{y_3\}$ est un séparateur irréductible de cardinalité un car la panne de y_3 déconnecte x_6 .

Par la Proposition 3, (y_1, y_2, y_3) sont utiles (pas inutiles) pour la connexion à la sortie. De plus y_3 est un capteur essentiel. Il n'y a pas de capteur inutile dans cet exemple.

B. Classification de capteurs pour l'absence de contraction

Appelons $B(\Sigma_\lambda) = (B^+, B^-, W')$ le graphe biparti associé au système Σ_λ où les ensembles B^+ et B^- sont deux ensembles de sommets disjoints et W' est l'ensemble des arcs. B^+ est donné par X^+ , B^- est donné par $X^- \cup Y$, avec $X^+ = \{x_1^+, \dots, x_n^+\}$ le premier ensemble de sommets d'état, $X^- = \{x_1^-, \dots, x_n^-\}$ le second ensemble de sommets d'état et $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ l'ensemble de sommets de sortie. Notons qu'ici on a séparé chaque sommet d'état x_i de $G(\Sigma_\lambda)$ en deux sommets x_i^+ et x_i^- . $W' = W_A \cup W_C$ avec $W_A = \{(x_j^+, x_i^-) \mid A_{\lambda,ij} \neq 0\}$ et $W_C = \{(x_j^+, y_i) \mid C_{\lambda,ij} \neq 0\}$. Un tel graphe biparti est bien adapté au calcul de rang générique de matrices.

Un *couplage* dans un graphe biparti $B(\Sigma_\lambda) = (B^+, B^-, W')$ est un ensemble d'arcs $M \subseteq W'$ tel que les arcs de M n'ont pas de sommet commun. La cardinalité d'un couplage, c'est-à-dire son nombre d'arcs, est aussi appelée sa taille. Un couplage M est dit maximum si sa cardinalité est maximum. En général, un couplage maximum n'est pas unique. Le problème du couplage maximum peut être résolu en utilisant des algorithmes efficaces [37]. Il est montré dans [12] qu'il n'y a pas de contraction sur Σ_λ si et seulement si le couplage maximum sur $B(\Sigma_\lambda)$ est de cardinalité n où n est le nombre de sommets d'état.

La décomposition de Dulmage-Mendelsohn (dite DM-decomposition) [15] permet de décomposer un graphe biparti $B(\Sigma_\lambda) = (B^+, B^-, W')$ en un ensemble unique de sous-graphes bipartis $B_i = (B_i^+, B_i^-; W'_i)$, $i = 0, 1, \dots, r, \infty$ appelés les DM-composants, où B_i^+ (resp. $B_i^-; W'_i$) est une partition de B^+ (resp. $B^-; W'$). Cette décomposition permet de caractériser tous les couplages maximum de $B(\Sigma_\lambda)$. Il a été montré que $G(\Sigma_\lambda)$ n'a pas de contraction si et seulement si la DM-decomposition de $B(\Sigma_\lambda)$ n'a pas de partie B_0 . Dans [12] on donne la classification des capteurs pour l'absence de contraction.

Proposition 4 : Soit le système linéaire structuré Σ_λ défini dans (1) dont le graphe associé est $G(\Sigma_\lambda)$ et soit $B(\Sigma_\lambda)$ le graphe biparti associé.

- Les capteurs essentiels pour l'absence de contraction correspondent aux sommets de sortie des B_i ($i = 1, \dots, r$) de la DM-decomposition de $B(\Sigma_\lambda)$.
- Les capteurs inutiles pour l'absence de contraction correspondent aux sommets de la composante B_∞ de la DM-decomposition de $B(\Sigma_\lambda)$ qui ne sont pas couverts par un couplage maximum avec un nombre minimum des sommets de sortie.

Exemple 6 : Reprenons le système linéaire structuré Σ_λ de l'Exemple 5. La DM-decomposition de $B(\Sigma_\lambda)$ est donnée Figure 12.

Comme on peut le voir sur la Figure 12, le couplage maximum est de cardinalité 6, par exemple $\{(x_1^+, x_2^-), (x_4^+, y_1), (x_2^+, x_3^-), (x_3^+, x_4^-), (x_5^+, y_2), (x_6^+, x_6^-)\}$, et il n'y a pas de partie B_0 . Donc le système de l'Exemple 5 n'a pas de contraction. Le capteur y_1 est donc essentiel pour l'absence de contraction. On peut vérifier que quand y_1 est en panne $\{x_1, x_4\}$ est une contraction sur $G(\Sigma_\lambda)$.

Analysons maintenant la composante B_∞ de la DM-Decomposition présentée Figure 12. Pour caractériser les capteurs inutiles pour l'absence de contraction, nous cherchons des sommets de sortie qui ne sont pas indispensables

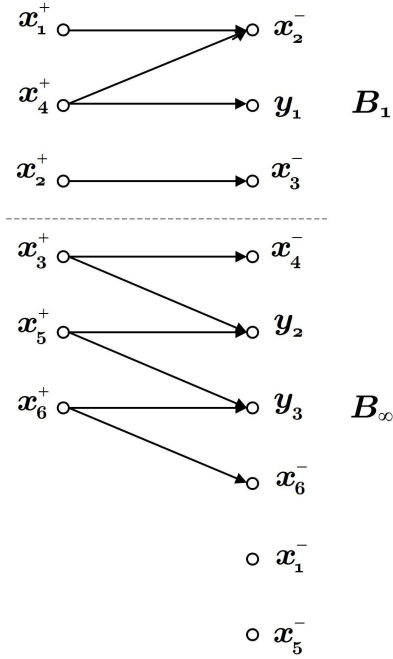


Fig. 12. DM-decomposition de $B(\Sigma_\lambda)$ de l'Exemple 5

pour construire un couplage maximum ayant un nombre minimum de sommets de sortie. On a ici les couplages maximum $\{(x_3^+, x_4^-), (x_5^+, y_2), (x_6^+, x_6^-)\}$ et $\{(x_3^+, x_4^-), (x_5^+, y_3), (x_6^+, x_6^-)\}$. Il s'avère que pour cet exemple il n'y a pas de capteur inutile.

C. Classification de capteurs pour l'observabilité

Il est facile de montrer que les capteurs essentiels pour l'observabilité sont l'union des capteurs essentiels pour la connexion et l'absence de contraction. Le problème est plus difficile pour les capteurs inutiles. En effet, comme le montre l'Exemple 5, un capteur peut être utile pour chacune des sous-propriétés et inutile pour l'observabilité. Les capteurs essentiels pour l'observabilité sont y_3 et y_1 . Notons qu'avec ces capteurs (y_1, y_3) , la connexion à la sortie est assurée. De plus, on peut construire un couplage maximum ayant un nombre minimum de sommets de sortie dans la DM-decomposition de $B(\Sigma_\lambda)$ i.e. $\{(x_1^+, x_2^-), (x_4^+, y_1), (x_2^+, x_3^-), (x_3^+, x_4^-), (x_5^+, y_3), (x_6^+, x_6^-)\}$ ce qui assure qu'il n'y a pas de contraction dans $G(\Sigma_\lambda)$. Donc y_2 est inutile pour la propriété alors qu'il est utile pour les deux sous-propriétés. Dans [38] on donne la classification complète avec en particulier un algorithme de construction de l'ensemble des inutiles.

VI. CLASSIFICATION DE CAPTEURS POUR D'AUTRES PROBLÈMES

On peut étudier la classification des capteurs pour toutes les propriétés des systèmes qui dépendent de ces capteurs. L'approche précédente est très générale et ne dépend ni du type de modèle ni de la propriété. A titre d'exemple nous allons considérer le rejet de perturbation par retour de mesure (DRMF) et la détection et l'isolation de défauts (FDI).

A. Classification de capteurs pour le rejet de perturbation par retour de mesure

Dans le cas général, quand le problème de rejet de perturbation par retour de mesure est soluble, il a été montré qu'un capteur ne mesurant que des sommets d'état en dehors de \mathcal{I}^* est inutile [39]. Pour l'exemple des 5 bacs, de l'équation (26), il résulte que mesurer $\{x_3, x_4, x_5\}$ est inutile.

Dans le cas où la perturbation est unique ($q = 1$), on peut obtenir facilement une classification complète des capteurs. Ceci implique de définir la notion de disque associé à la perturbation. Définissons $F_{\mathcal{I}^*}$, la *frontière de \mathcal{I}^** comme l'ensemble des sommets :

$F_{\mathcal{I}^*} = \{x_i \in \mathcal{I}^* \mid \exists(x_i, x_j) \in W, x_j \notin \mathcal{I}^*\}$. Notons r_d la longueur d'un plus court chemin de d à $F_{\mathcal{I}^*}$. Soit \mathcal{D}_d l'ensemble des sommets :

$\mathcal{D}_d = \{x_i \in \mathcal{I}^* \text{ tels que la longueur } l(d, x_i) \text{ d'un plus court chemin de } d \text{ à } x_i \text{ satisfait } 0 < l(d, x_i) \leq r_d\}$. On appelle cet ensemble de sommets le *disque* associé à d . On a les résultats suivants [40] :

- les mesures en dehors du disque \mathcal{D}_d sont inutiles
- les mesures à l'intérieur du disque \mathcal{D}_d sont utiles
- s'il y a une seule mesure dans le disque \mathcal{D}_d , elle est essentielle.

Revenons à l'exemple des bacs, il y a une seule perturbation et le disque associé est $\mathcal{D}_d = \{x_1, x_2\}$. Les capteurs mesurant x_1 ou x_2 sont utiles. Dans le cas de la Figure 8, on a un seul capteur qui mesure x_2 , il est donc essentiel.

B. Classification de capteurs pour la détection et l'isolation de défauts

Considérons un système linéaire structuré avec défauts de la forme suivante :

$$\Sigma_{f\lambda} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Lf(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Mf(t) \end{cases} \quad (28)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est vecteur d'état, $f(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur défaut, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur sortie mesurée. Le graphe associé $G(\Sigma_{f\lambda})$ est défini comme précédemment.

On met en oeuvre un ensemble dédié de résidus utilisant une banque de r observateurs pour le système (28), voir [41], voir Figure 13. Le i ème observateur de la banque de r observateurs est conçu comme suit :

$$\dot{\hat{x}}^i(t) = A\hat{x}^i(t) + K^i(y(t) - C\hat{x}^i(t)) + Bu(t), \quad (29)$$

où $\hat{x}^i(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du i ème observateur, K^i est le gain de l'observateur à calculer pour que $\hat{x}^i(t)$ converge asymptotiquement vers $x(t)$, quand $f(t) = 0$.

Les résidus sont définis par :

$$r_i(t) = Q^i(y(t) - C\hat{x}^i(t)), \text{ for } i = 1, \dots, r, \quad (30)$$

où Q^i est une matrice $1 \times p$.

Définition 2 : Soit $\Sigma_{f\lambda}$ un système linéaire structuré donné par (28) avec un ensemble de capteurs $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$. Le problème de détection et localisation de défauts (FDI) avec une banque d'observateurs a une solution si le système est observable et s'il existe des matrices K^i et Q^i , telles que, pour $i = 1, 2, \dots, r$, la matrice de

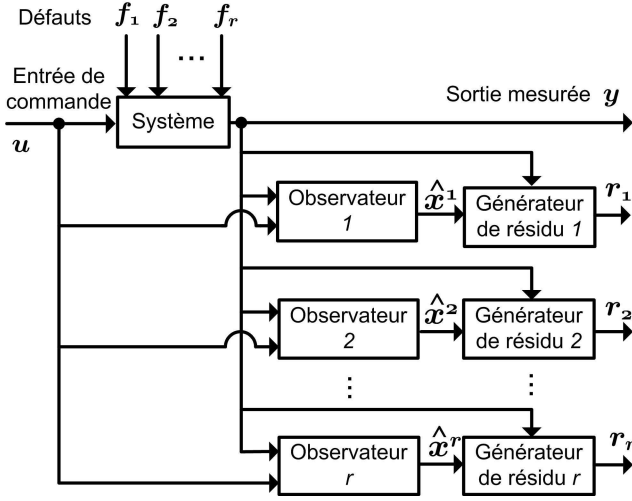


Fig. 13. Générateur de résidus avec une banque d'observateurs

transfert des fautes aux résidus est propre et diagonale non singulière.

Il est clair que la solubilité de ce problème est liée à l'ensemble des capteurs. La classification précédente est donc pertinente. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts soit soluble a été donnée dans [42].

Théorème 4 : Considérons un système linéaire structuré avec r défauts $\Sigma_{f\lambda}$ défini en (28) et son graphe associé $G(\Sigma_{f\lambda})$. Le problème de détection et localisation de défauts de la Définition 2 est génériquement soluble si et seulement si :

1. $\Sigma_{f\lambda}$ est structurellement observable,
2. $k = r$ où k est la taille maximum d'un couplage défauts-sorties dans $G(\Sigma_{f\lambda})$.

La seconde condition du Théorème 4 sera appelée la condition de rang pour le problème FDI.

L'observabilité ayant été étudiée précédemment, nous nous concentrons sur la classification de capteurs pour la condition de rang.

Les capteurs inutiles peuvent être caractérisés comme suit :

Proposition 5 : Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{f\lambda}$ défini en (28) avec l'ensemble de capteurs Y et le graphe associé $G(\Sigma_{f\lambda})$. Un capteur $y_i \in Y$ est inutile pour la condition de rang du FDI si et seulement si il n'y a pas de chemin $F-\{y_i\}$ dans $G(\Sigma_{f\lambda})$, où F est l'ensemble des sommets défauts.

Définissons maintenant un ensemble important de sommets.

Définition 3 : L'ensemble des sommets *essentiels*, V_{ess} de $G(\Sigma_{f\lambda})$ est l'ensemble des sommets qui appartiennent à tout couplage maximum défauts-sorties.

Ceci nous permet de caractériser les capteurs essentiels pour la condition de rang [43] :

Proposition 6 : Considérons le système linéaire structuré avec r défauts $\Sigma_{f\lambda}$ défini en (28) et son graphe associé $G(\Sigma_{f\lambda})$. L'ensemble des capteurs essentiels pour la condition de rang du FDI, est donné par $Y_e = Y \cap V_{ess}$, où Y est l'ensemble des capteurs et V_{ess} est l'ensemble des sommets essentiels de $G(\Sigma_{f\lambda})$.

Pour la condition de rang, les capteurs inutiles et essentiels peuvent être calculés de manière polynomiale.

Revenons à la classification des capteurs pour le problème général (condition de rang + observabilité). L'ensemble des capteurs essentiels pour ce problème est l'union des capteurs essentiels pour chacun des sous-problèmes. Le problème est plus complexe pour la détermination des capteurs inutiles. Il est résolu dans [44] dans un cadre un peu plus général incluant des perturbations.

VII. CLASSIFICATION QUANTITATIVE DES CAPTEURS

Dans cette section on quantifie l'importance relative des capteurs par rapport à une propriété \mathcal{P} . Pour cela introduisons le degré de criticité.

Définition 4 : (Degré de criticité) Soit K l'ensemble des ensembles admissibles de capteurs pour la propriété \mathcal{P} dont on a enlevé les capteurs inutiles. Soit K_{y^*} l'ensemble des ensembles admissibles de capteurs contenant y^* . Le *degré de criticité* du capteur y^* pour la propriété \mathcal{P} est défini comme le ratio entre la cardinalité de K_{y^*} et la cardinalité de K . Le degré de criticité de y^* est noté $\mathcal{D}(y^*)$.

Proposition 7 : Soit Σ un système linéaire ayant un ensemble de capteurs Y et une propriété \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}(Y) = 1$.

- Le degré de criticité d'un capteur inutile est zéro
- Le degré de criticité d'un capteur essentiel est un
- Le degré de criticité d'un capteur utile est positif inférieur à un. Quand $\mathcal{D}(y_i) > \mathcal{D}(y_j)$ le nombre d'ensembles admissibles de capteurs restants quand y_i est défaillant est plus petit que quand y_j est défaillant.

Sur l'Exemple 5 dont le graphe est donné Figure 11 et pour la propriété \mathcal{P} de connexion à la sortie, $\mathcal{D}(y_3) = 1$ car c'est un capteur essentiel pour \mathcal{P} . Il y a trois ensembles admissibles de capteurs pour \mathcal{P} : $\{y_1, y_2, y_3\}$, $\{y_1, y_3\}$ et $\{y_2, y_3\}$, donc les degrés de criticité pour \mathcal{P} sont $\mathcal{D}(y_1) = \mathcal{D}(y_2) = 2/3$. Des détails sont donnés dans [45].

VIII. CONCLUSION

Dans cet article nous avons essayé de motiver et de présenter les résultats importants de la théorie des systèmes structurés. Nous avons montré que l'analyse structurelle des systèmes dynamiques permettait, à partir d'un modèle très simple, d'obtenir facilement des informations qualitatives importantes sur le comportement de ces systèmes. Les aspects classification qualitative et quantitative des capteurs pour une propriété générale donnée nous paraissent particulièrement prometteurs et peuvent s'étendre à des classes plus générales de systèmes. La classification peut s'étendre également aux actionneurs ou plus généralement à des composants ou ensembles de composants d'un système. De nombreux problèmes restent ouverts ou à approfondir, soit dans le domaine des conditions théoriques de solubilité de problèmes, soit dans la recherche d'algorithmes numériques efficaces pour leur résolution.

Remerciements Les auteurs remercient Trong Hieu Do qui a collaboré à la réalisation de cet article et leurs anciens doctorants dont les travaux sont repris ici.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki, *Diagnosis and Fault-tolerant Control*. Springer-Verlag, 2003.
- [2] J. Bertrand, C. Sueur, and Dauphin-Tanguy, "Bond graph for modeling and control : structural analysis tools for the design of

- input-output decoupling state feedbacks,” in *Int. Conf. on Bond Graph Modeling and Simulation*, 1997.
- [3] J. Montmain and S. Gentil, “Dynamic causal model diagnosis reasoning for online technical process supervision,” *Automatica*, vol. 36, no. 8, pp. 1137–1152, 2000.
 - [4] C. Lin, “Structural controllability,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 19, pp. 201–208, 1974.
 - [5] K. Reinschke, *Multivariable Control, A Graph-theoretic Approach*. Springer-Verlag, 1988.
 - [6] J. van der Woude, “A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system,” *Math. Control Signals Systems*, vol. 4, pp. 33–40, 1991.
 - [7] C. Commault, J. M. Dion, and A. Perez, “Disturbance rejection for structured systems,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 36, pp. 884–887, 1991.
 - [8] J. van der Woude, “On the structure at infinity of a structured system,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 148, pp. 145–169, 1991.
 - [9] J. M. Dion and C. Commault, “Feedback decoupling of structured systems,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 38, pp. 1132–1135, 1993.
 - [10] A. Linnemann, “Decoupling of structured systems,” *Systems Control Lett.*, vol. 1, pp. 79–86, 1981.
 - [11] —, “Fixed modes in parametrized systems,” *Int. J. of Control*, vol. 38, pp. 319–335, 1983.
 - [12] C. Commault, J. M. Dion, and D. H. Trinh, “Observability preservation under sensor failure,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1554–1559, 2008.
 - [13] C. Commault and J. M. Dion, “Sensor location for diagnosis in linear systems : a structural analysis,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 52, no. 2, pp. 155–169, 2007.
 - [14] T. Boukhobza, F. Hamelin, and D. Sauter, “Observability of structured linear systems in descriptor form : A graph-theoretic approach,” *Automatica*, vol. 42, no. 4, pp. 629–635, 2006.
 - [15] K. Murota, *Systems Analysis by Graphs and Matroids*, ser. Algorithms and Combinatorics. Springer-Verlag New-York, Inc., 1987, vol. 3.
 - [16] J. M. Dion, C. Commault, and J. van der Woude, “Generic properties and control of linear structured systems : a survey,” *Automatica*, vol. 39, no. 7, pp. 1125–1144, 2003.
 - [17] M. Bahar, J. Jantzen, C. Commault, J. M. Dion, and V. Hovelaque, “Structural decoupling and disturbance rejection in a distillation column,” in *World Congress IFAC’96*, vol. M, San Francisco, USA, 1996.
 - [18] K. Murota, *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, ser. Algorithms and Combinatorics 20. Springer, 2000.
 - [19] T. Boukhobza and F. Hamelin, “Observability analysis for structured bilinear systems : A graph-theoretic approach,” *Automatica*, vol. 43, no. 11, pp. 1968–1974, 2007.
 - [20] T. Boukhobza, F. Hamelin, and S. Martinez-Martinez, “State and input observability for structured linear systems : a graph theoretic approach,” *Automatica*, vol. 43, no. 7, pp. 1204–1210, 2007.
 - [21] G. Basile and G. Marro, *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice Hall, 1992.
 - [22] W. M. Wonham, *Linear multivariable control : a geometric approach*. Springer Verlag, 1979.
 - [23] C. Commault and J. M. Dion, “A comprehensive introduction to the geometric theory of linear multivariable systems,” *IEEE Trans. Educ.*, vol. 35, no. 1, pp. 92–97, 1992.
 - [24] C. Commault, J. M. Dion, and A. Perez, “Disturbance rejection for structured systems,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 36, pp. 884–887, 1991.
 - [25] J. Schumacher, “Compensator synthesis using (C,A,B) pairs,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. AC-25, pp. 1133–1138, 1980.
 - [26] J. Willems and C. Commault, “Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole placement,” *SIAM J. Cont. and Opt.*, vol. 19, pp. 490–504, 1981.
 - [27] C. Commault, J. M. Dion, and V. Hovelaque, “A geometric approach for structured systems : Application to the disturbance decoupling problem,” *Automatica*, vol. 33, pp. 403–409, 1997.
 - [28] J. van der Woude, “Disturbance decoupling by measurement feedback for structured systems : a graph theoretic approach,” in *Proc. 2-th European Control Conference ECC’93*, Groningen, 1993, pp. 1132–1137.
 - [29] D. H. Trinh, “Analyse structurelle de la localisation et de la classification de capteurs,” Ph.D. dissertation, INPG, 2008.
 - [30] C. Commault, J. M. Dion, and J. Montoya, “Simultaneous decoupling and disturbance rejection : a structural approach,” *Int. J. of Cont.*, vol. 59, pp. 1325–1344, 1994.
 - [31] C. Commault, J. M. Dion, and M. Benahcène, “Decoupling of structured systems by parameter independent precompensation and state feedback,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 44, no. 2, pp. 348–352, 1999.
 - [32] O. Sename, V. Hovelaque, C. Commault, and J. M. Dion, “Structured time delay systems : a graph approach,” *Int. J. of Cont.*, vol. 74, no. 4, pp. 373–386, 2001.
 - [33] C. Commault, J. M. Dion, and J. W. van der Woude, “Characterization of generic properties of linear structured systems for efficient computations,” *Kybernetika*, vol. 38, no. 5, pp. 503–520, 2002.
 - [34] V. Hovelaque, C. Commault, and J. M. Dion, “Analysis of linear systems using a primal-dual algorithm,” *Systems and Control Letters*, vol. 27, pp. 73–85, 1996.
 - [35] C. Commault, J. M. Dion, and D. H. Trinh, “Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems,” in *IEEE CDC Conf.*, Séville, Spain, 2005, pp. 7193–7197.
 - [36] C. Commault, J. M. Dion, and S. Yacoub, “Structural analysis for the sensor location problem in fault detection and isolation,” *Automatica*, vol. 44, no. 8, pp. 2074–2080, 2008.
 - [37] J. E. Hopcroft and R. M. Karp, “An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs,” *SIAM J. on Comp.*, vol. 2, pp. 225–231, 1973.
 - [38] T. H. Do, C. Commault, and J. M. Dion, “Sensor classification for observability of structured systems,” in *7th Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, Zielona Gora, Poland, 2009.
 - [39] C. Commault, J. M. Dion, and T. H. Do, “The disturbance rejection by measurement feedback problem revisited,” in *ACC Conf.*, Baltimore, USA, 2010.
 - [40] —, “Sensor location for the disturbance rejection by measurement feedback problem,” in *IFAC SSSC Symp.*, Ancona, Italy, 2010.
 - [41] J. Chen and R. Patton, *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
 - [42] C. Commault, J. M. Dion, O. Sename, and R. Motyeian, “Observer-based fault detection and isolation for structured systems,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 47, no. 12, pp. 2074–2079, 2002.
 - [43] C. Commault, J. M. Dion, and S. Yacoub, “Sensor classification for the fault detection and isolation problem,” in *IFAC Symp. SSC 07*, Iguazu Falls, Brazil, 2007.
 - [44] C. Commault, J. M. Dion, D. H. Trinh, and T. H. Do, “Sensor classification for the fault detection and isolation, a structural approach,” *Int. J. of Adapt. Cont. and Sign. Proc.*, to appear.
 - [45] C. Commault, J. M. Dion, T. H. Do, and D. H. Trinh, “Sensor classification for observability preservation under sensor failure,” in *IFAC SafeProcess*, Barcelona, Spain, 2009.