

# Sur la stabilité, commande et optimisation des systèmes dynamiques hybrides

José C. GEROMEL

Faculté de Génie Électrique et Informatique  
 Université de Campinas  
 CP 6101, 13083 - 970, Campinas, SP, Brésil  
 geromel@dsce.fee.unicamp.br

*Résumé*— Dans cet article on considère les systèmes dynamiques hybrides et, plus particulièrement, les systèmes linéaires à commutation en temps continu et en temps discret. Le but principal est d'exposer d'une façon simple et la plus rigoureuse possible les résultats les plus récents d'un sujet vaste, riche et important soit dans l'aspect théorique soit pour la possibilité réelle d'applications pratiques. D'autre part, notre objectif est aussi de mettre en évidence plusieurs possibilités actuellement envisagées pour la détermination d'une règle de commutation de telle façon à assurer en même temps la stabilité et la minimisation d'un coût garanti indicatif de la qualité des performances. Cela est traduit par l'existence d'une solution définie positive d'un ensemble d'inégalités dénommées *inégalités de Lyapunov-Metzler*. Les résultats théoriques sont illustrés par quelques exemples numériques extraits de la littérature. Finalement, deux applications pratiques sont présentées.

*Mots-clés*—Systèmes dynamiques hybrides, systèmes linéaires à commutation, stabilité, coût garanti, synthèse de commande pour les systèmes linéaires à commutation, inégalités matricielles linéaires (LMI).

## I. INTRODUCTION

Dans le cas le plus général, les systèmes hybrides sont des systèmes dynamiques variant dans le temps définis par la représentation d'état suivante

$$h \circ x(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), w(t)) \quad (1)$$

$$y(t) = g_{\sigma(t)}(x(t), w(t)) \quad (2)$$

$$z(t) = q_{\sigma(t)}(x(t), w(t)) \quad (3)$$

$$x(t_k^+) = \psi_{\sigma(t_k)}(x(t_k)) \quad (4)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état soumis à la condition initiale  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des perturbations,  $y(t) \in \mathbb{R}^s$  est le vecteur des sorties mesurées,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur des sorties contrôlées et la fonction scalaire  $\sigma(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$  est la *fonction de commutation*. Les fonctions  $f_\sigma \in \{f_1, \dots, f_N\}$ ,  $g_\sigma \in \{g_1, \dots, g_N\}$ ,  $q_\sigma \in \{q_1, \dots, q_N\}$  et  $\psi_\sigma \in \{\psi_1, \dots, \psi_N\}$  sont supposées Lipschitz continues et  $t_{k+1} > t_k > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N} = \{0, \dots, \infty\}$  sont les instants de commutation. La relation (4) permet le calcul de l'état immédiatement après une commutation à partir de la définition  $t_k^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (t_k + \epsilon)$  et il est important de noter que (4) peut introduire une discontinuité (imposée par la modélisation) au vecteur d'état quand  $x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t) \neq x(t_k)$ . La notation  $h \circ x(t)$  est utilisée indistinctement pour les systèmes en temps continu quand  $h \circ x(t) := \dot{x}(t)$  est l'opérateur différentiel et en temps discret où  $h \circ x(t) := x(t+1)$  est l'opérateur un pas en avant.

Une importante classe de systèmes dynamiques hybrides est la classe des *systèmes linéaires à commutation* dont le

modèle d'état le plus simple est sous la forme

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}w(t) \quad (5)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}w(t) \quad (6)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) \quad (7)$$

$$x(t_k^+) = S_{\sigma(t_k)}x(t_k) \quad (8)$$

où  $(A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, S_i)$ ,  $i \in \mathbb{K}$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées. Pour simplifier les calculs, la notation, et mettre en évidence les aspects les plus importants de cette classe de systèmes dynamiques, on considère  $S_{\sigma(t_k)} = I$  ce qui clairement impose la continuité du vecteur d'état  $x(t) \forall t \geq 0$  et que la sortie  $z(t)$  est indépendante de l'entrée  $w(t)$ . En principe, concernant la fonction de commutation  $\sigma(t)$ , deux situations distinctes peuvent être considérées, à savoir :

- **Perturbation** : La fonction de commutation  $\sigma(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction arbitraire, constante par morceaux. La stabilité et la performance du système en question doivent être préservées. Fréquemment, à la fonction de commutation on impose un *temps de permanence* (dwell time)  $T > 0$ , défini par

$$\mathcal{D}_T = \{\sigma(\cdot) : t_{k+1} - t_k \geq T \forall k \in \mathbb{N}\} \quad (9)$$

Nous devons noter les cas extrêmes. Si  $T \rightarrow +\infty$  alors la fonction de commutation est constante par rapport au temps  $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}, \forall t \geq 0$ . D'autre part, si  $T \rightarrow 0^+$  alors la fonction de commutation est arbitraire  $\sigma(t) \in \mathbb{K}, \forall t \geq 0$  permettant ainsi des fréquences de commutation arbitraires.

- **Commande** : La fonction de commutation est de la forme  $\sigma(t) = u(x(t))$  où  $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  est un retour d'état à déterminer. Une fois de plus, améliorer les conditions de stabilité et performance du système en boucle fermée par la synthèse de  $u(\cdot)$  est l'objectif principal<sup>1</sup>.

Les systèmes dynamiques hybrides et en particulier les systèmes linéaires à commutation ont reçu une grande attention et par conséquent un grand effort de recherche depuis les années 80. Les récents ouvrages [29] et [38] donnent des informations précises sur son développement et un ensemble complet de références bibliographiques. Les excellents articles de synthèse [9], [15], [28], [31] et [36] ainsi que

1. Si le vecteur d'état n'est pas disponible alors on peut envisager la synthèse de  $\sigma(t) = u(y(t))$ , où  $y(t) \in \mathbb{R}^s$  est le vecteur des sorties mesurées, voir [19].

leurs références bibliographiques sont aussi des sources à consulter. Comme nous venons de le mettre en évidence, la fonction de commutation  $\sigma(\cdot)$  peut être interprétée comme un signal exogène. Dans ce cas, le système (5)-(8) doit être vu comme un système linéaire avec incertitude variant dans le temps et si on remplace la description mathématique  $\sigma(t) \in \mathbb{K}$  arbitraire par

$$\begin{bmatrix} A_\sigma & B_\sigma \\ C_\sigma & D_\sigma \\ E_\sigma & 0 \end{bmatrix} \in \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \\ E_i & 0 \end{bmatrix}, i \in \mathbb{K} \right\} \quad (10)$$

où  $\text{co}\{\cdot\}$  indique l'enveloppe convexe des sommets alors les résultats de robustesse, par exemple [1] et [35], sont directement applicables. Bien sûr, cette procédure simplificatrice fournit généralement des conditions très pessimistes et ne permet pas le traitement du temps de permanence fini ( $T < +\infty$ ). En général, les problèmes liés à l'analyse (perturbations) sont plus simples à résoudre que ceux liés à la synthèse (commande), [20], [23] et [37].

Dans le domaine de l'analyse, la stabilité des systèmes dynamiques à commutation, a été étudiée par plusieurs auteurs parmi lesquels [22], [25], [27] et [43]. Dans [22] on trouve une discussion complète sur la stabilité uniforme. Les références [15], [28] et [29] proposent aussi une bonne synthèse de l'analyse de stabilité en considérant avec détail un système à commutation composé de deux sous-systèmes linéaires. D'autre part, dans le domaine de la synthèse, surtout de la stabilisation par retour de sortie, un nombre réduit de résultats sont à l'heure actuelle disponibles, [16] et [19]. Dans [29] on trouve une discussion sur la synthèse de la fonction de commutation  $\sigma(\cdot)$  pour les systèmes hybrides dépendant du vecteur des sorties mesurées mais la procédure ne s'applique pas aux problèmes qui seront introduits plus tard. Tout ça est restreint aux systèmes dynamiques en temps continu. Pour des systèmes en temps discret très peu de références bibliographiques existent, voir [11], [12], [13], [41] et [44].

Dans ce texte, nous utiliserons les conditions de stabilité pour les systèmes en temps continu et en temps discret proposées respectivement dans [17] et [18]. Elles sont décrites par un ensemble d'inégalités non linéaires appelées *inégalités de Lyapunov-Metzler*. Comme elles sont non-convexes, une version certainement plus conservative mais plus simple à résoudre est proposée. Étant convexes, elles sont réduites à un ensemble d'inégalités matricielles linéaires - LMIs plus un scalaire positif et sont donc solvables en temps polynomial par diverses méthodes de la littérature actuelle, [6]. Il est important de mentionner qu'au contraire de quelques résultats disponibles, voir par exemple [26], la stabilité des régimes glissants est automatiquement considérée. Les conditions de stabilité sont généralisées pour prendre en compte un critère de performance quadratique. Comme dans le cas général, le coût associé à une règle de commutation quelconque ne peut pas être calculé de manière explicite, une borne supérieure (coût garanti) du critère quadratique est déterminée. Le problème de commande sous-optimal associé à la minimisation d'un coût garanti par rapport la fonction de commutation est discuté. Une règle de commutation qui assure la stabilité a un coût quadratique par rapport à l'état défini à partir d'un ensemble de perturbations impulsives. Plus

ieurs exemples seront proposés dans le but d'illustrer les divers résultats théoriques et deux applications pratiques seront présentées avec plus de détails.

Le texte est organisé de la façon suivante. La section qui suit est entièrement dédiée aux considérations préliminaires et à la formulation des problèmes à résoudre. Les conditions de stabilité et la synthèse de la loi de commutation pour les systèmes en temps continu et en temps discret selon les propositions des références [17] et [18] sont abordées dans la section III. La section IV est consacrée au calcul et à l'optimisation d'un coût garanti quadratique défini à partir d'une série d'entrées impulsives. Deux applications pratiques dans les domaines du génie électrique et mécanique sont discutées en détail dans la section V. Elles sont illustrées par des simulations numériques. Finalement, la section VI contient les conclusions et les recommandations plus générales à mettre en évidence.

La notation est standard. Des lettres majuscules sont utilisées pour les matrices et des minuscules pour les vecteurs. Les lettres grecques minuscules sont utilisées pour les scalaires. Le symbole ( $'$ ) indique la transposition. La fonction linéaire  $\text{Tr}(X)$  est la trace d'une matrice carrée étant égale à la somme des valeurs propres de  $X$ . Exclusivement pour les matrices symétriques, les blocs symétriques sont indiqués par le symbole ( $\bullet$ ). L'ensemble des matrices de Metzler est indiqué par  $\mathcal{M}$ . Il est composé de toutes les matrices carrées  $\Pi = \{\pi_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  avec des éléments non-négatifs hors diagonale. Deux sous-ensembles de  $\mathcal{M}$  dénotés  $\mathcal{M}_c$  et  $\mathcal{M}_d$  contiennent les matrices de Metzler telles que  $\sum_{i=1}^N \pi_{ij} = 0$  et  $\sum_{i=1}^N \pi_{ij} = 1$ , pour tout  $j = 1, \dots, N$ , respectivement. Par conséquent, chaque matrice dans l'ensemble  $\mathcal{M}_c$  ( $\mathcal{M}_d$ ) a une valeur propre de Perron-Frobenius nulle (unitaire) associée à un vecteur propre non-négatif  $\nu \geq 0 \in \mathbb{R}^N$ . L'ensemble des vecteurs  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  tels que  $\lambda_i \geq 0$ , pour tout  $i = 1, \dots, N$  et  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  est dénoté par  $\Lambda$ . Étant données les matrices  $U_1, \dots, U_N$  de dimensions compatibles et  $\lambda \in \Lambda$ , la matrice  $U_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i U_i$  indique la combinaison convexe. La matrice identité de dimension appropriée est notée par  $I$ . Finalement  $\delta(t)$  indique l'impulsion unitaire dans les domaines continu et discret. La norme carrée d'une trajectoire  $\xi(t)$  définie pour tout  $t \geq 0$  est égale à  $\|\xi\|_2^2 = \int_0^\infty \xi(t)' \xi(t) dt$  dans le domaine continu et  $\|\xi\|_2^2 = \sum_{t=0}^\infty \xi(t)' \xi(t)$  dans le domaine discret. Indistinctement, l'ensemble des trajectoires non nulles avec une norme finie, c'est-à-dire, satisfaisant  $0 < \|\xi\|_2 < \infty$ , est indiqué par  $\mathcal{L}_2$ .

## II. CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES

Dans cette section on considère les systèmes linéaires à commutation sous la forme suivante

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} w(t) \quad (11)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)} x(t) + D_{\sigma(t)} w(t) \quad (12)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)} x(t) \quad (13)$$

où les matrices de dimensions appropriées sont réelles et  $x(0) = 0$ . Dans la section précédente nous avons caractérisé les fonctions de commutation  $\sigma(\cdot)$ . Maintenant, nous voulons caractériser précisément les entrées des perturbations  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ . Trois types d'entrées de perturbations sont

les plus importantes. En premier, nous devons mentionner les *entrées impulsives* de la forme  $w(t) = e_k \delta(t)$  où  $e_k \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur correspondant à la  $k$ -ième colonne de la matrice identité. Si on applique successivement les entrées  $w(t)$ , les sorties  $z_k(t)$  correspondantes permettent la définition du coût associé

$$J_2(\sigma) = \sum_{k=1}^m \|z_k\|_2^2 \quad (14)$$

Il est intéressant de vérifier que sans commutation, c'est-à-dire  $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}, \forall t \geq 0$ , le coût (14) est égal à la norme  $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert entre  $w$  et  $z$  du  $i$ -ième sous-système. D'autre part, pour une fonction  $\sigma(\cdot)$  donnée le système à commutation devient variant dans le temps ce qui complique énormément le calcul de  $J_2(\sigma)$ .

Le deuxième cas est caractérisé par les *entrées avec une norme finie*, c'est-à-dire  $w \in \mathcal{L}_2$  arbitraire<sup>2</sup>. Le vecteur des sorties  $z(t)$  obtenu comme la réponse du système à l'entrée  $w(t)$  permet la détermination du critère

$$J_\infty(\sigma) = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (15)$$

Comme précédemment, si la fonction de commutation est constante dans le temps,  $J_\infty(\sigma)$  devient égal à la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de la fonction de transfert entre  $w$  et  $z$  d'un des sous-systèmes. Bien sûr, pour  $w \in \mathcal{L}_2$  arbitraire le calcul de  $J_\infty(\sigma)$  est, en général, très difficile et prohibitif.

Finalement, la dernière possibilité importante est caractérisée par les *entrées constantes* de la forme  $w(t) = w_0, \forall t \geq 0$  où  $w_0 \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur constant dans le temps. Dans ce cas le système à commutation devient affine et des points de fonctionnement différents de l'origine peuvent être considérés. On doit vérifier si, la synthèse d'une fonction de commutation assurant qu'un vecteur  $x_e \in \mathbb{R}^n$  donné soit un point d'équilibre stable est possible.

Les critères de performance (14) et (15) peuvent être utilisés pour calculer une fonction de commutation optimale. Dans cette direction, nous pouvons établir le problème d'optimisation

$$\inf_{\sigma \in \mathcal{S}} J_\alpha(\sigma) \quad (16)$$

où  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des fonctions assurant la stabilité asymptotique globale de l'origine et  $\alpha = \{2, \infty\}$ . La version *boucle fermée* est obtenue en imposant  $\sigma = u(x)$  quand l'état est mesuré ( $C_\sigma = I, D_\sigma = 0$ ) ou  $\sigma = u(y)$  quand seulement la sortie  $y(\cdot)$  est disponible. Comme d'habitude, la synthèse d'une fonction de commutation  $\sigma(\cdot)$  via un retour d'état est beaucoup plus simple que via un retour de sortie. Il faut reconnaître qu'obtenir la solution optimale du problème (16) soit en boucle ouverte soit en boucle fermée quand  $n > 2$  et  $N > 2$  est une tâche virtuellement impossible. Les références intéressantes [2], [5], [32], [34] et [42] donnent aussi une idée des difficultés. D'autre part, en supposant que  $\sigma(t)$  est une perturbation avec temps de permanence  $T > 0$  on doit résoudre

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{D}_T} J_\alpha(\sigma) \quad (17)$$

2. Une normalisation de l'entrée du type  $\|w\|_2 = 1$  peut être introduite sans perte de généralité.

où  $T > 0$  est fixé a priori. Pour chaque valeur de  $T > 0$  la dégradation de la performance due à la présence de la fonction de commutation est quantifiée. La valeur optimale de (17) est une information très importante quand  $\sigma(t)$  devient arbitraire, ce qui correspond à fixer  $T > 0$  arbitrairement petit, [24], [30], [45] et [46]. Alternativement, étant donné un niveau de dégradation de performance  $\gamma > 0$  acceptable, le temps de permanence minimal est donné par

$$T_\alpha^*(\gamma) = \inf_{T > 0} \{T : J_\alpha(\sigma) < \gamma^2, \forall \sigma \in \mathcal{D}_T\} \quad (18)$$

ce qui permet de mettre en évidence un compromis entre la performance du système et la richesse du signal de commutation (perturbation). D'après (18) il est clair que  $T_\alpha^*(\gamma)$  est une fonction non croissante.

Avant de finir cette section un exemple intéressant proposé premièrement dans [24] pour  $\alpha = \infty$  est résolu. Il s'agit de la commutation de deux sous-systèmes scalaires.

*Exemple 1* : Deux sous-systèmes en temps continu sont définis par  $(A_1, B_1, E_1) = (-1, 1, 1)$  et  $(A_2, B_2, E_2) = (-1, 0.1, 10)$ . Sans difficulté, on vérifie que les deux fonctions de transfert entre  $w$  et  $z$  ont une norme  $\mathcal{H}_2$  égal à  $1/\sqrt{2}$  et une norme  $\mathcal{H}_\infty$  égal à 1. Avec le signal d'entrée

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

qui satisfait la condition  $w \in \mathcal{L}_2$  car  $\|w\|_2 = 1$ , on peut déterminer facilement les quantités  $J_2(\sigma) = 7.1991$  et  $J_\infty(\sigma) = 20.1469$  correspondantes à la règle

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2, & t > 1 \end{cases}$$

L'amplification de chaque critère due à l'existence de la fonction de commutation est remarquable. Les systèmes à commutation, bien sûr, sont des systèmes variant dans le temps et pour cette raison ils ont un comportement dynamique plus riche que chaque sous-système isolé.

Les problèmes (16), (17) et (18) sont très semblables vis-à-vis de la difficulté de résolution et comme nous l'avons déjà dit les solutions optimales respectives sont virtuellement impossibles à calculer. Dans un tel contexte l'idée est de déterminer des solutions sous-optimales par l'optimisation d'un coût garanti plus simple associé au critère de performance  $J_\alpha(\sigma)$ .

### III. STABILITÉ

Dans cette section, considérons le modèle simplifié

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad (19)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)} x(t) \quad (20)$$

avec une condition initiale  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Notre premier but est d'établir les conditions sous lesquelles l'origine de l'espace d'état est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable (pour simplifier, la dénomination utilisée sera simplement *stable*). En considérant la fonction de Lyapunov  $v(x) = x' P x$  où  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice définie positive qui satisfait les LMIs

$$A_i' P + P A_i + E_i' E_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (21)$$

en temps continu ou

$$A_i' P A_i - P + E_i' E_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (22)$$

en temps discret, nous arrivons à deux conclusions valables pour les systèmes de la forme (19)-(20). Ils sont stables et  $\|z\|_2^2 < v(x_0) = x_0' P x_0$  pour  $\sigma(\cdot) \in \mathbb{K}$  arbitraire. La stabilité dépend de l'existence d'une seule matrice  $P > 0$  qui satisfait toutes les inégalités de Lyapunov simultanément. En général, cette condition appelée *condition de stabilité quadratique* fournit des résultats très pessimistes.

#### A. $\sigma$ - perturbation

L'ensemble  $\mathcal{D}_T$  est constitué par des trajectoires constantes par morceaux c'est-à-dire  $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$  est constant entre deux instants de commutation successifs  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Il est donc possible d'utiliser une fonction de Lyapunov multiple [7] du type (voir [3] où les fonctions polyédrales sont traitées).

$$v(x(t)) = x(t)' P_{\sigma(t)} x(t) \quad (23)$$

où chaque matrice de l'ensemble  $\{P_1, \dots, P_N\}$  est définie positive. Les conditions de stabilité<sup>3</sup> sont obtenues en imposant  $d \circ v(x(t)) < 0$  pour tout  $t \in [t_k, t_{k+1})$  et la convergence de la série  $\{v(x(t_k))\}_{k=0}^\infty$ . Bien sûr, il faut prendre en compte d'éventuelles discontinuités de la fonction de Lyapunov  $v(\cdot)$  aux instants de commutation. Il est important de mentionner que  $\sigma(\cdot)$  considérée comme une perturbation impose que toutes les matrices de l'ensemble  $\{A_1, \dots, A_N\}$  soient asymptotiquement stables.

*Théorème 1* : Soit  $T > 0$  un scalaire donné et

$$R_i(T) = \int_0^T e^{A_i' \tau} E_i' E_i e^{A_i \tau} d\tau \quad (24)$$

Si les matrices  $P_i > 0$  satisfont les LMIs

$$A_i' P_i + P_i A_i + E_i' E_i < 0 \quad (25)$$

$$e^{A_i' T} P_j e^{A_i T} - P_i + R_i(T) < 0 \quad (26)$$

pour tout  $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  alors le système à commutation (19)-(20) en temps continu est stable et la sortie contrôlée est telle que  $\|z\|_2^2 < v(x_0) = x_0' P_{\sigma(0)} x_0, \forall \sigma \in \mathcal{D}_T$ .

La preuve est une conséquence de [17] avec l'application de la généralisation proposée dans [21]. Les cas extrêmes sont inclus dans le résultat du Théorème 1. En faisant  $T \rightarrow +\infty$ , alors  $P_i > 0$  pour tout  $i \in \mathbb{K}$  arbitrairement proche de

$$R_i(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{A_i' \tau} E_i' E_i e^{A_i \tau} d\tau \quad (27)$$

sont des solutions faisables. D'autre part, avec  $T \rightarrow 0$  l'existence de  $P > 0$  satisfaisant (21) et  $R_i(0) = 0$  assurent la faisabilité de (25) et (26) avec  $P_1 = \dots = P_N = P$ . Clairement les conditions du Théorème 1 sont simplement suffisantes. Il est important de mentionner les conditions nécessaires et suffisantes présentées dans les références [9] et [40] qui sont néanmoins plus difficiles à résoudre. La version en temps

3. L'opérateur est défini par  $d \circ v(x(t)) = \dot{v}(x(t))$  pour les systèmes en temps continu et  $d \circ v(x(t)) = v(x(t+1)) - v(x(t))$  pour les systèmes en temps discret.

discret du Théorème 1 est établie de manière similaire. Pour la preuve, voir la référence [18] et plus récemment [10] avec généralisations et détails. Il est intéressant de mettre en évidence la similitude des résultats.

*Théorème 2* : Soit  $T > 0$  un entier donné et

$$R_i(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} A_i'^{\tau} E_i' E_i A_i^{\tau} \quad (28)$$

Si les matrices  $P_i > 0$  satisfont les LMIs

$$A_i' P_i A_i - P_i + E_i' E_i < 0 \quad (29)$$

$$A_i'^T P_j A_i^T - P_i + R_i(T) < 0 \quad (30)$$

pour tout  $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  alors le système à commutation (19)-(20) en temps discret est stable et la sortie contrôlée est telle que  $\|z\|_2^2 < v(x_0) = x_0' P_{\sigma(0)} x_0, \forall \sigma \in \mathcal{D}_T$ .

Le fait d'avoir les conditions de stabilité décrites par des LMIs est important du point de vue numérique. Par exemple, on peut trouver sans difficultés le temps de permanence minimum défini selon le problème (18) par un algorithme de programmation convexe couplé à une procédure de recherche unidimensionnelle.

#### B. $\sigma$ - commande

Le point central pour le développement d'une stratégie de commutation du type retour d'état  $\sigma(t) = u(x(t))$  est le choix de la fonction de Lyapunov

$$v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x \quad (31)$$

où les matrices  $\{P_1, \dots, P_N\}$  sont définies positives. La fonction  $v(x)$  est une fonction continue, positive pour  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  et nulle si et seulement si  $x = 0$ . Par contre, comme elle n'est pas toujours dérivable, l'étude des systèmes continus dans le temps nécessite un peu plus d'attention. Avec la fonction de commutation

$$u(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x \quad (32)$$

le résultat suivant, spécifique pour les systèmes en temps continu est établi. La preuve est donnée dans [17].

*Théorème 3* : Si les matrices  $P_i > 0$  et  $\Pi \in \mathcal{M}_c$  satisfont les inégalités de Lyapunov-Metzler

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + E_i' E_i < 0 \quad (33)$$

pour tout  $i \in \mathbb{K}$  alors avec  $\sigma(t) = u(x(t))$  le système à commutation (19)-(20) en temps continu est stable et la sortie contrôlée est telle que  $\|z\|_2^2 < v(x_0) = \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$ .

La stabilité de l'ensemble  $\{A_1, \dots, A_N\}$  n'est pas une condition nécessaire pour assurer l'existence de solution des inégalités de Lyapunov-Metzler. En effet, simplement les matrices  $A_i + (\pi_{ii}/2)I$  avec  $\pi_{ii} \leq 0$  doivent exhiber cette propriété. L'existence de solution est assurée par l'existence d'une matrice  $A \in \text{co}\{A_1, \dots, A_N\}$  asymptotiquement stable. Les inégalités de Lyapunov-Metzler (33) ne sont pas convexes par rapport aux variables  $\{P_1, \dots, P_N, \Pi\}$  et pourtant sont très difficiles à résoudre. Heureusement,

le résultat du Théorème 3 reste valable si elles sont remplacées par les inégalités plus simples

$$A'_i P_i + P_i A_i + \mu(P_j - P_i) + E'_i E_i < 0 \quad (34)$$

pour tout  $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  et  $\mu > 0$ . On peut alors explorer numériquement le fait que pour le scalaire  $\mu > 0$  fixé, les inégalités (34) sont linéaires.

*Théorème 4* : Si les matrices  $P_i > 0$  et  $\Pi \in \mathcal{M}_d$  satisfont les inégalités de Lyapunov-Metzler

$$A'_i \left( \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i + E'_i E_i < 0 \quad (35)$$

pour tout  $i \in \mathbb{K}$  alors avec  $\sigma(t) = u(x(t))$  le système à commutation (19)-(20) en temps discret est stable et la sortie contrôlée est telle que  $\|z\|_2^2 < v(x_0) = \min_{i \in \mathbb{K}} x'_0 P_i x_0$ .

De même, sans changer le résultat précédant les inégalités non convexes (35) peuvent être remplacées par

$$A'_i (\mu P_i + (1 - \mu) P_j) A_i - P_i + E'_i E_i < 0 \quad (36)$$

pour tout  $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  et  $0 < \mu \leq 1$ . Les observations déjà faites à propos des systèmes en temps continu concernant la non convexité et l'existence de solution des inégalités de Lyapunov-Metzler sont aussi valables pour les systèmes en temps discret. Il est intéressant de mentionner que l'existence d'une combinaison convexe stable des matrices  $\{A_1, \dots, A_N\}$  n'est pas un point important pour cette classe de systèmes dynamiques. Des informations plus détaillées sur des systèmes à commutation en temps discret sont disponibles dans les références [18] et [44].

*Exemple 2* : Premièrement, pour un système en temps continu, considérons deux sous-systèmes instables définis par les matrices  $E_1 = E_2 = I$  et

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Avec le scalaire  $\mu = 11.80$ , une solution possible des inégalités (34) est

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6.7196 & 1.6293 \\ 1.6293 & 1.0222 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 6.0825 & 2.1293 \\ 2.1293 & 2.2206 \end{bmatrix}$$

Pour illustrer l'efficacité de la loi de commande (32), la Figure 1 montre l'évolution temporelle des deux variables d'état du système en boucle fermée à partir de la condition initiale  $x(0) = [1 \ 1]'$ .

Deuxièmement, un système en temps discret avec deux sous-systèmes instables a été considéré. Ils sont définis par les matrices  $E_1 = E_2 = I$  et

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0076 & 0.0662 \\ 0.1323 & 0.4122 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.9867 & 0.1527 \\ -0.3054 & 2.2082 \end{bmatrix}$$

Avec  $\mu = 0.006$  une solution possible des inégalités (36) est donnée par

$$P_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.3009 & 0.3312 \\ 0.3312 & 0.4287 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.1341 & 0.4560 \\ 0.4560 & 2.3795 \end{bmatrix}$$

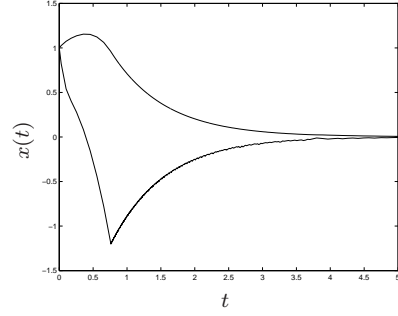


Fig. 1. Simulation en temps continu.

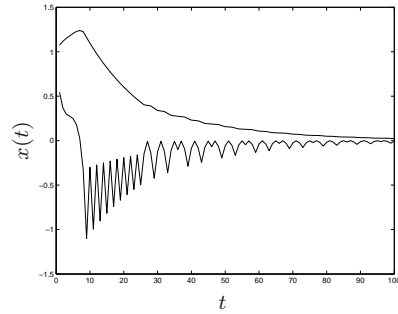


Fig. 2. Simulation en temps discret.

La Figure 2 montre l'évolution temporelle des variables d'état du système commandé par la loi de commutation (32) à partir de  $x(0) = [1 \ 1]'$ .

Les résultats de cette section forment une base qui permet un certain nombre de généralisations. En particulier, les bornes supérieures de la norme carrée de la sortie  $z(t)$  seront utiles pour faire face aux problèmes de commande optimale discutés par la suite.

#### IV. OPTIMISATION

Dans cette section un système à commutation plus complet avec la représentation d'état

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} w(t) \quad (37)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)} x(t) \quad (38)$$

et une condition initiale nulle est considéré. Le but est de calculer les coûts  $J_2(\sigma)$  et  $J_\infty(\sigma)$  pour  $\sigma \in \mathcal{S}$  donnée. Dans ce sens, on vérifie que pour une entrée impulsive<sup>4</sup> du type  $w(t) = e_k \delta(t)$  la sortie de (37)-(38) sous condition initiale nulle est égale à la sortie de (19)-(20) sous la condition initiale  $x_0 = B_{\sigma(0)} e_k$ . Par conséquent, s'il existe  $P > 0$  satisfaisant une des conditions (21) ou (22) alors  $\|z_k\|_2^2 < x'_0 P x_0$  permet la détermination du coût garanti

$$J_2(\sigma) < \sum_{k=1}^m e'_k B'_{\sigma(0)} P B_{\sigma(0)} e_k$$

$$< \text{Tr} \left( B'_{\sigma(0)} P B_{\sigma(0)} \right) \quad (39)$$

comme étant une borne supérieure valable pour  $\forall \sigma \in \mathbb{K}$ . De façon similaire, si à la place de (21) et (22) on impose

4. Voir la référence [19] où certains aspects de cette fonction définie dans les domaines continu et discret sont discutés.

respectivement

$$A'_i P + P A_i + E'_i E_i + \gamma^{-2} P B_i B'_i P < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (40)$$

pour les systèmes en temps continu et

$$A'_i P A_i - P + E'_i E_i + A'_i P B_i \Gamma_i^{-1} B'_i P A_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (41)$$

avec le scalaire  $\gamma > 0$  tel que  $\Gamma_i = \gamma^2 I - B'_i P B_i > 0$  pour les systèmes en temps discret alors, une simple comparaison montre que (40)-(41) sont plus contraignantes que (21)-(22) ce qu'impose la stabilité. D'autre part, comme  $x(0) = x(\infty) = 0$  et la fonction de Lyapunov  $v(x) = x' P x$  satisfait  $d \circ v(x(t)) < -z(t)' z(t) + \gamma^2 w(t)' w(t)$  pour  $\forall t \geq 0$  et  $\forall w \in \mathcal{L}_2$  nous pouvons conclure que  $J_\infty(\sigma) < \gamma^2, \forall \sigma \in \mathbb{K}$ . Il faut dire une fois de plus que les conditions obtenues, basées sur l'existence d'une solution unique  $P > 0$  pour les inégalités de Riccati précédentes sont, en général, très conservatives.

#### A. $\sigma$ - perturbation

Le calcul du coût garanti associé au critère  $J_2(\cdot)$  est basé sur l'ensemble des perturbations faisables  $\sigma \in \mathcal{D}_T$  et sur la fonction de Lyapunov multiple (23). Avec les résultats de la section précédente, les cas continu et discret sont considérés simultanément.

*Théorème 5 :* Soit  $T > 0$  un scalaire donné. Si les matrices  $P_i > 0, i \in \mathbb{K}$  satisfont les conditions du Théorème 1 (Théorème 2) et la condition supplémentaire

$$\text{Tr} \left( B'_{\sigma(0)} P_{\sigma(0)} B_{\sigma(0)} \right) < \gamma^2 \quad (42)$$

alors le système à commutation (37)-(38) en temps continu (discret) est stable et le critère de performance satisfait  $J_2(\sigma) < \gamma^2, \forall \sigma \in \mathcal{D}_T$ .

Il est évident qu'il faut disposer de la valeur initiale du signal de commutation  $\sigma(0) \in \mathbb{K}$ . Nous pouvons confirmer qu'en supposant  $\sigma(0) = \ell \in \mathbb{K}$  et  $T \rightarrow +\infty$ , le minimum  $\gamma > 0$  faisable est égal à la norme  $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert entre  $w$  et  $z$  du  $\ell$ -ième sous-système. Finalement, avec le résultat du Théorème 5 une borne supérieure du temps de permanence minimal définie selon (18) peut être calculée sans trop de difficulté.

Le calcul du coût garanti associé au critère  $J_\infty(\cdot)$  basé toujours sur l'ensemble des perturbations faisables  $\sigma \in \mathcal{D}_T$  et sur la fonction de Lyapunov multiple (23) nécessite des manipulations algébriques plus élaborées. Supposant que  $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$  et qu'à l'instant  $t = t_{k+1}$  la fonction de commutation devient  $\sigma(t_{k+1}) = j \in \mathbb{K}$ , le but est d'imposer la fonction (23) comme étant une solution de l'inégalité d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} (z' z - \gamma^2 w' w) dt + v(x(t_{k+1})) \right\} < v(x(t_k)) \quad (43)$$

associée au système (37)-(38) en temps continu sous une condition initiale  $x(0) = x_0 \in R^n$  arbitraire. Heureusement, le  $\sup(\cdot)$  peut être calculé à partir de l'équation différentielle de Riccati

$$-\dot{W} = A'_i W + W A_i + E'_i E_i + \gamma^{-2} W B_i B'_i W \quad (44)$$

sous la condition en temps final  $W(\tau_k) = P_j$  où  $\tau_k = t_{k+1} - t_k \geq T > 0$  et, si  $W(0) < P_i$  l'équation (43) est satisfaite.

Pour un temps de permanence  $T > 0$  donné, si on arrive à imposer la validité de cette dernière condition pour tout  $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  et pour tout  $\tau_k \geq T$  alors en faisant  $x_0 = 0$  on obtient le coût garanti  $J_\infty(\sigma) < \gamma^2$  valide  $\forall \sigma \in \mathcal{D}_T$ . Dans ce sens, on considère les matrices

$$H_i = A_i + B_i L_i \quad (45)$$

$$Q_i = E'_i E_i - \gamma^2 L'_i L_i \quad (46)$$

$$L_i = \gamma^{-2} B'_i W_i \quad (47)$$

où  $W_i > 0$  est la solution de l'équation algébrique de Riccati qui impose  $H_i$  asymptotiquement stable. Il est intéressant de noter que la solution de l'équation algébrique de Riccati satisfait aussi  $H'_i W_i + W_i H_i + Q_i = 0$  mais comme  $Q_i$  n'est pas nécessairement définie positive, la matrice  $W_i > 0$  n'est pas une matrice de Lyapunov associée au système en boucle fermée, un fait bien connu dans la théorie  $\mathcal{H}_\infty$ , voir [8].

*Théorème 6 :* Soit  $T > 0$  un scalaire donné et

$$S_i = \int_0^\infty e^{H_i \tau} B_i B'_i e^{H_i \tau} d\tau \quad (48)$$

$$R_i(T) = \int_0^T e^{H_i \tau} Q_i e^{H_i \tau} d\tau \quad (49)$$

Si les matrices  $P_i > 0$  satisfont les LMIs

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + E'_i E_i & P_i B_i \\ \bullet & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} e^{H_i T} P_j e^{H_i T} - P_i + R_i(T) & e^{H_i T} (P_j - W_i) \\ \bullet & P_j - W_i - \gamma^2 S_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

pour tout  $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  alors le système à commutation (37)-(38) en temps continu est stable et le critère de performance satisfait  $J_\infty(\sigma) < \gamma^2, \forall \sigma \in \mathcal{D}_T$ .

Les conditions sur l'observabilité et la commandabilité des paires  $(A_i, E_i)$  et  $(A_i, B_i)$  pour tout  $i \in \mathbb{K}$  sont suffisantes pour assurer l'existence de la solution  $W_i > 0$  de l'équation algébrique de Riccati et aussi  $S_i \in R^{n \times n}$  strictement définie positive et donc inversible. Comme attendu, en faisant  $\gamma \rightarrow \infty$  nous obtenons les valeurs limites  $Q_i \rightarrow E'_i E_i, H_i \rightarrow A_i$  et par conséquent les mêmes inégalités que dans le Théorème 1.

Les systèmes en temps discret sont traités de façon similaire à partir de la version discrète de (43), [10]. En introduisant les matrices

$$H_i = A_i + B_i L_i \quad (52)$$

$$Q_i = E'_i E_i - \gamma^2 L'_i L_i \quad (53)$$

$$L_i = (\gamma^2 I - B'_i W_i B_i)^{-1} B'_i W_i A_i \quad (54)$$

où  $W_i > 0$  est la solution de l'équation algébrique de Riccati discrète qui impose  $H_i$  asymptotiquement stable, on obtient une fois de plus la factorisation  $H'_i W_i H_i - W_i + Q_i = 0$  qui joue un rôle important dans le but d'établir le résultat suivant.

*Théorème 7 :* Soit  $T > 0$  un entier donné et

$$S_i = \sum_{\tau=0}^{\infty} H_i^\tau B_i (I - \gamma^{-2} B'_i W_i B_i)^{-1} B'_i H_i^{\tau} \quad (55)$$

$$R_i(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} H_i^{\tau} Q_i H_i^{\tau} \quad (56)$$

Si les matrices  $P_i > 0$  satisfont les LMIs

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i A_i - P_i + E'_i E_i & A'_i P_i B_i \\ \bullet & B'_i P_i B_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} H'_i{}^T P_j H_i{}^T - P_i + R_i(T) & H'_i{}^T (P_j - W_i) \\ \bullet & P_j - W_i - \gamma^2 S_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (58)$$

pour tout  $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  alors le système à commutation (37)-(38) en temps discret est stable et le critère de performance satisfait  $J_\infty(\sigma) < \gamma^2, \forall \sigma \in \mathcal{D}_T$ .

Malheureusement dans le cas discret, les hypothèses sur l'observabilité et la commandabilité des paires  $(A_i, E_i)$  et  $(A_i, B_i)$  pour tout  $i \in \mathbb{K}$  ne sont pas suffisantes pour prouver le théorème précédent. Il faut ajouter la condition supplémentaire  $\det(H_i) \neq 0$  pour tout  $i \in \mathbb{K}$ . En particulier, l'existence de la solution  $W_i > 0$  de l'équation algébrique de Riccati et aussi  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  strictement définie positive et donc inversible sont assurées. Finalement, pour  $\gamma$  arbitrairement grand nous avons  $Q_i \rightarrow E'_i E_i$ ,  $H_i \rightarrow A_i$  et les conditions du Théorème 2 sont obtenues. Si, de plus, on impose  $T = 1$  alors  $R_i(T) = E'_i E_i$  et les conditions du Théorème 7 sont réduites à  $A'_i P_j A_i - P_i + E'_i E_i < 0, \forall i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ , c'est-à-dire les conditions de stabilité et performance robuste proposées dans [11]. Avec le théorème précédent une borne supérieure du temps de permanence minimal (18) est calculé par programmation convexe et un algorithme de recherche unidimensionnelle.

### B. $\sigma$ - commande

La fonction de Lyapunov non-convexe du type *min* et la règle de commutation définies respectivement dans (31) et (32) sont encore utilisées pour la synthèse de la loi de commande  $\sigma(t) = u(x(t)), \forall t \geq 0$  en considérant le système en boucle ouverte (37)-(38). En appliquant successivement l'entrée  $w(t) = e_k \delta(t)$ , s'il existe des matrices  $P_i > 0$  qui satisfont les inégalités (33) ou (35) il est possible de déterminer le coût garanti

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &< \sum_{k=1}^m \min_{i \in \mathbb{K}} e'_k B'_{\sigma(0)} P_i B_{\sigma(0)} e_k \\ &< \min_{i \in \mathbb{K}} \text{Tr} \left( B'_{\sigma(0)} P_i B_{\sigma(0)} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

associé à la fonction de commutation considérée. La valeur de  $\sigma(0) = u(x(0))$  étant arbitraire due à la condition initiale nulle permet imposer  $\sigma(0) = i$  comme une variable d'optimisation additionnelle du problème (59). Les systèmes en temps continu et en temps discret sont traités simultanément.

*Théorème 8* : Si les matrices  $P_i > 0$  pour tout  $i \in \mathbb{K}$  et  $\Pi \in \mathcal{M}_c(\mathcal{M}_d)$  satisfont les conditions du Théorème 3 (Théorème 4) et la condition supplémentaire

$$\min_{i \in \mathbb{K}} \text{Tr} (B'_i P_i B_i) < \gamma^2 \quad (60)$$

alors avec  $\sigma(t) = u(x(t))$  le système à commutation (37)-(38) en temps continu (discret) est stable et le critère de performance satisfait  $J_2(\sigma) < \gamma^2$ .

Une solution sous-optimale du problème (16) basée sur la minimisation du coût garanti (59) émerge de la minimisation de  $\gamma^2$  par rapport aux variables  $P_i > 0$  et

$\Pi \in \mathcal{M}_c(\mathcal{M}_d)$  sous les contraintes (33) ((35)) et (60). Il s'agit d'un problème non-convexe mais avec les simplifications (34) ((36)) il devient parfaitement solvable.

Notre attention va maintenant vers le critère  $J_\infty(\cdot)$ . L'obtention d'un coût garanti est basée sur la fonction de Lyapunov (31), la loi de commutation (32) et les versions en temps continu et en temps discret d'un ensemble d'inégalités dénommées *inégalités de Riccati-Metzler*.

*Théorème 9* : Si les matrices  $P_i > 0$  et  $\Pi \in \mathcal{M}_c$  satisfont les inégalités de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + E'_i E_i & P_i B_i \\ \bullet & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (61)$$

pour tout  $i \in \mathbb{K}$  alors avec  $\sigma(t) = u(x(t))$  le système à commutation (37)-(38) en temps continu est stable et le critère de performance satisfait  $J_\infty(\sigma) < \gamma^2$ .

La preuve est une conséquence immédiate des inégalités (61), de la stabilité globale du point d'équilibre  $x = 0$  et de la fonction de Lyapunov. Avec les conditions initiale et la finale nulles, la condition  $d \circ v(x(t)) < -z(t)'z(t) + \gamma^2 w(t)'w(t)$  valable  $\forall t \geq 0$  et  $\forall w \in \mathcal{L}_2$  permet d'affirmer que  $J_\infty(\sigma) < \gamma^2$  est satisfait par la fonction de commutation  $\sigma(t) = u(x(t))$ .

*Théorème 10* : Si les matrices  $P_i > 0$  et  $\Pi \in \mathcal{M}_d$  satisfont les inégalités de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} A'_i \\ B'_i \end{bmatrix} \left( \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) \begin{bmatrix} A'_i \\ B'_i \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} P_i - E'_i E_i & 0 \\ \bullet & \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (62)$$

pour tout  $i \in \mathbb{K}$  alors avec  $\sigma(t) = u(x(t))$  le système à commutation (37)-(38) en temps discret est stable et le critère de performance satisfait  $J_\infty(\sigma) < \gamma^2$ .

Finalement, une fois de plus on doit mettre en évidence les difficultés numérique auxquelles il faut faire face pour résoudre le problème de commande optimale (16) avec  $\alpha = \infty$ . Les Théorèmes 9 et 10 sont utiles pour obtenir une solution sous-optimale basée sur le coût garanti et sur l'adoption des simplifications du type (34) et (36), encore valables pour les inégalités de Riccati-Metzler.

## V. APPLICATIONS PRATIQUES

Dans cette section deux applications pratiques sont présentées comme illustration des résultats théoriques introduits dans les sections précédentes. Les valeurs numériques des paramètres ont été choisies en conformité avec les systèmes réels respectifs.

### A. Suspension active

L'objectif est la synthèse d'une loi de commutation pour améliorer le confort des passagers embarqués. Le modèle dynamique d'une voiture avec suspension demi-active est le suivant

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi}(t) &= -c(t)(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_t(t)) - k(\xi(t) - \xi_t(t)) + \\ &\quad + k\Delta_s - Mg \\ m\ddot{\xi}_t(t) &= c(t)(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_t(t)) + k(\xi(t) - \xi_t(t)) - \\ &\quad - k_t(\xi_t(t) - \xi_r(t)) - k\Delta_s + k_t\Delta_t - mg \\ \dot{c}(t) &= -\beta c(t) + \beta c_{in}(t) \end{aligned}$$

où  $\xi(t)$ ,  $\xi_t(t)$  et  $\xi_r(t)$  sont les positions verticales du véhicule (M), de la masse supplémentaire des pneus, freins, etc (m) et du profil de la route. Les coefficients  $\beta$ ,  $k$ ,  $k_t$  et  $\Delta_s, \Delta_t$  définissent l'absorbeur actif d'impact, la souplesse et longueur de la suspension et des pneus, respectivement. Finalement,  $c(t)$  et  $c_{in}(t)$  sont les coefficients d'amortissement réel et demandé de l'absorbeur passif d'impact. Pour simplifier,  $\beta$  est supposé très grand de telle façon que  $c(t) \approx c_{in}(t)$  et  $c(t) \in \{c_{min}, c_{max}\}$ . On veut déterminer une loi de commutation  $c(t)$  qui minimise l'accélération verticale du véhicule  $\ddot{\xi}(t)$ . Dans la littérature actuelle on peut trouver les propositions (SH, en [39]) où la loi de commutation est basée sur le signe du produit  $\dot{\xi}(t)(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_t(t))$  et (ADD, en [33]) où la loi de commutation est basée sur le signe du produit  $\ddot{\xi}(t)(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_t(t))$ .

Après l'adoption d'un point de fonctionnement défini par une route de profil nul, la dynamique du système est donnée par les équations d'état (11)-(13) où  $w(t) \in \mathbb{R}^3$  contient l'accélération du profil de la route et les bruits des mesures,  $y(t) \in \mathbb{R}^2$  contient le coup  $\xi(t) - \xi_t(t)$  et sa dérivée,  $z(t) \in \mathbb{R}$  contient simplement l'accélération verticale du véhicule et  $\sigma(t) = c(t)$ . Les matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c_{min}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{min}}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c_{min}}{m} & -\frac{(k+k_t)}{m} & -\frac{c_{min}}{m} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c_{max}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{max}}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c_{max}}{m} & -\frac{(k+k_t)}{m} & -\frac{c_{max}}{m} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

définissent l'évolution de l'état et on note que la matrice d'entrée ne dépend pas de la règle de commutation. De la même manière les matrices

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

permettent la détermination des sorties mesurées. Finalement, avec les matrices dépendantes de la règle de commutation

$$E_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{M} & -\frac{c_{min}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{min}}{M} \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c_{max}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{max}}{M} \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{M} & -\frac{c_{min}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{min}}{M} \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c_{max}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{max}}{M} \end{bmatrix}$$

la sortie d'intérêt est définie. Le modèle est complet avec les valeurs numériques  $M = 400kg$ ,  $m = 50kg$ ,  $k = 2.0 \times 10^4 N/m$ ,  $k_t = 2.5 \times 10^5 N/m$ ,  $c_{min} = 3.0 \times 10^2 Ns/m$  et  $c_{max} = 3.9 \times 10^3 Ns/m$ . En adoptant le critère de performance  $J_2(\sigma)$  on doit déterminer la loi de commutation  $\sigma(t)$  qui minimise le coût garanti associé au problème (59). Malheureusement, le résultat du Théorème 8 ne peut pas être directement utilisé car la modélisation précédente exige une

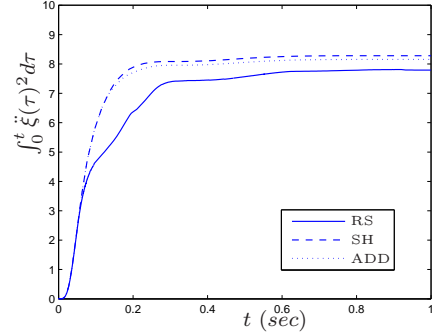


Fig. 3. Simulation du système à commutation.

loi de commutation du type retour de sortie. Cette difficulté est résolue par l'introduction d'un filtre d'ordre complet

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_{\sigma(t)} \hat{x}(t) + \hat{B}_{\sigma(t)} y(t) \quad (63)$$

avec une condition initiale nulle et les matrices  $\hat{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times s}$  pour tout  $i \in \mathbb{K}$ . Comme la dynamique du système plus filtre est décrite par le vecteur d'état augmenté  $\tilde{x} = [x' \ \hat{x}']' \in \mathbb{R}^{2n}$  si on cherche une solution des inégalités de Lyapunov-Metzler avec la structure

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X & V \\ V' & \hat{X}_i \end{bmatrix}, \quad \det V \neq 0 \quad (64)$$

on vérifie que la fonction de commutation  $\sigma(\cdot)$  satisfait  $\sigma(\tilde{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \tilde{x}' \tilde{P}_i \tilde{x} = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{x}' \hat{X}_i \hat{x} = \sigma(\hat{x})$ . Elle ne dépend que des variables disponibles, dans ce cas les variables d'état du filtre. Une méthode basée sur des LMIs et une recherche unidimensionnelle pour la détermination conjointe du filtre (63) et de la règle de commutation est proposée dans la référence [19]. Les courbes de la Figure 3 permettent la comparaison de la méthode précédente (RS) avec deux autres de la littérature actuelle (SH) et (ADD), en considérant l'entrée impulsive  $\ddot{\xi}_r(t) = \delta(t)$  et la matrice de Metzler

$$\Pi = 10^3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il est clair que la loi de commutation proposée par (RS) impose une réduction plus significative de l'accélération verticale du véhicule.

## B. Convertisseur CC-CC

Les convertisseurs sont des circuits électriques avec une structure variable dans le temps. La Figure 4 montre un convertisseur CC-CC classique du type *Boost* qui doit alimenter la résistance  $R_o$ . En considérant  $\sigma(t) \in \{1, 2\}$  définie par les positions des interrupteurs  $S_1$  et  $S_2$ , le vecteur d'état  $x(t) = [i_L(t) \ v_C(t)]'$  défini par le couple courant-tension, l'entrée  $w(t) = w_0 = V_o$  définie par la tension constante d'une source externe et  $z(t) = v_C(t)/\sqrt{R_o}$  la variable de sortie d'intérêt, le modèle dynamique en temps continu est de la forme (37)-(38). Il est impératif de noter qu'il s'agit d'un système à commutation affine caractérisé

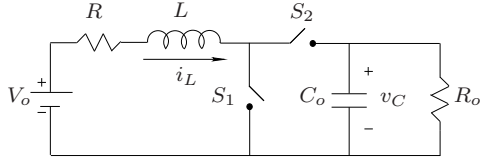


Fig. 4. Convertisseur Boost.

par les matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 0 & -1/R_o C_o \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C_o & -1/R_o C_o \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices qui définissent la variable de sortie sont données par

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{R_o} \end{bmatrix}$$

et ne dépendent pas de la règle de commutation. Le choix de la variable de sortie  $z(t) = v_C(t)/\sqrt{R_o}$  est important car  $\|z\|_2^2$  n'est rien d'autre que l'énergie totale dissipée dans la résistance électrique de sortie  $R_o$ . Notre objectif principal est la synthèse d'une fonction de commutation par retour d'état  $\sigma(t) = u(x(t))$  de telle façon à minimiser un coût garanti du type  $J_2(\sigma)$ .

Dans cette direction, tout d'abord nous devons observer que les matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont quadratiquement stables car les inégalités

$$A_i'P + PA_i + E_i'E_i < 0, \quad i \in \{1, 2\} \quad (65)$$

admettent une solution  $P > 0$ . En effet, on peut facilement vérifier que toutes les matrices de la forme

$$P = \epsilon \begin{bmatrix} L/2 & 0 \\ 0 & C_o/2 \end{bmatrix} \quad (66)$$

avec  $\epsilon > 1$  satisfont (65) simultanément. D'autre part, il faut se demander quels sont les points du plan de phase atteint avec une règle de commutation dépendant de l'état, c'est-à-dire  $x(t) \rightarrow x_e$  en régime permanent. Selon [14], les points de l'ensemble

$$\mathcal{X}_e = \{-A_\lambda^{-1}B_\lambda w_0 : \forall \lambda \in \Lambda\} \quad (67)$$

ont cette importante propriété et sont éligibles comme points d'équilibre du système en boucle fermée. Observons que l'existence de  $P > 0$  satisfaisant (65) assure que  $A_\lambda$  soit inversible pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Finalement,  $\forall x_e = [i_e \ v_e]' \in \mathcal{X}_e$  la fonction de commutation est

$$u(x) = \arg \min_{i \in \{1, 2\}} (x - x_e)' P (A_i x_e + B_i w_0)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } c_e'(x - x_e) \leq 0 \\ 2 & \text{si } c_e'(x - x_e) > 0 \end{cases} \quad (68)$$

où  $c_e = P(A_1 - A_2)x_e \in \mathbb{R}^2$ . Il est aussi intéressant d'observer que  $\sigma(x) = u(x)$  est une règle de commutation linéaire et donc facile à implanter en pratique. Voir aussi [4].

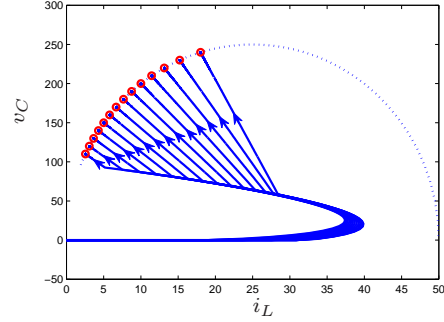


Fig. 5. Plan de phase.

La Figure 5 montre le plan de phase d'un convertisseur Boost avec les composants électriques  $w_0 = 100$  V,  $R = 2$   $\Omega$ ,  $L = 500$   $\mu$ H,  $C_o = 470$   $\mu$ F et  $R_o = 50$   $\Omega$ . Avec la matrice  $P > 0$  déterminée de telle façon à minimiser le coût garanti associé au critère de performance  $\|z(t) - v_e/\sqrt{R_o}\|_2^2$  la fonction de commutation a été définie par le vecteur

$$c_e = \begin{bmatrix} -0.1182 & 0.5726 \\ -1.0506 & 0.1111 \end{bmatrix} x_e$$

Les trajectoires en ligne continue partent de l'origine (condition initiale nulle) et arrivent aux points d'équilibre tels que  $v_e = \{110, 120, \dots, 240\}$  V sur l'ensemble  $\mathcal{X}_e$  qui est l'arc d'ellipse représenté en ligne pointillée. Le régime glissant imposé par la fonction de commutation linéaire est parfaitement visible. Les trajectoires ont un transitoire plus petit que 60 sec. et un pic de courant plus petit que 40 A.

## VI. CONCLUSION

Les systèmes dynamiques hybrides et plus particulièrement les systèmes linéaires à commutation ont reçu de la part de la communauté scientifique une attention croissante pendant les deux dernières décennies. On peut dire qu'à l'origine de cette attention réside non seulement les aspects théoriques mais aussi l'énorme potentiel dans le domaine des applications pratiques. Le but de cet article n'était pas de fournir un ensemble complet d'informations et résultats à propos d'un domaine de recherche riche et vaste. Nous avons simplement choisi de mettre en évidence les résultats plus récents qui sont aussi opérationnels vis-à-vis de la synthèse de règles de commutation par la minimisation d'un coût garanti associé aux performances.

Les signaux de commutation ont été classés en deux types - perturbation et commande. Le premier est caractérisé par un temps de permanence minimal qui doit être déterminé en assurant la stabilité asymptotique globale et un certain niveau de performance. Le deuxième est plus adapté à la synthèse de règles de commutation dépendantes des informations disponibles, c'est-à-dire le vecteur d'état ou le vecteur des sorties et avec le but d'imposer la stabilité globale et la performance adéquate.

La qualité de la performance a été mesurée par des critères similaires aux critères du type  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  valables pour les systèmes dynamiques invariants dans le temps. Étant donné que les problèmes de commande optimale ainsi formulés sont très difficiles à résoudre, des solutions

sous-optimales basées sur l'optimisation des coûts garantis ont été proposées. Il faut mentionner l'utilisation fréquente des outils numériques pour l'optimisation convexe et la recherche unidimensionnelle.

Finalement, il faut mettre une fois de plus en évidence les applications pratiques. Nous croyons qu'elles sont représentatives des grandes possibilités d'application de la théorie des systèmes dynamiques hybrides.

### Remerciements

Cet article ne pouvait pas être écrit sans la collaboration des personnes avec lesquelles j'ai eu le privilège de travailler dans ce domaine : mes collègues Paolo Bolzern, Patrizio Colaneri et Jamal Daafouz et mon étudiante de doctorat Grace S. Deaecto. Mes remerciements s'adressent aussi à l'agence scientifique brésilienne "Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq".

### RÉFÉRENCES

- [1] Apkarian P. et Gahinet P. A convex characterization of gain-scheduled  $H_\infty$  controllers. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, n° 9, pp. 853-864, 1995.
- [2] Bengea S. C. et De Carlo R. A. Optimal control of switching systems. *Automatica*, vol. 41, pp 11-27, 2005.
- [3] Blanchini F. et Miani S. *Set Theoretic Methods in Control*. Birkhauser, Boston, 2008.
- [4] Bolzern P. et Spinelli W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, pp. 3890-3895, 2004.
- [5] Bolzern P., Colaneri P. et Geromel J. C. Optimal switching of 1-dof oscillating systems. *Lecture Notes in Computer Science*. A. Bemporad, A. Bicchi et G. Buttazzo (Eds.), pp. 118-130, Springer, 2007.
- [6] Boyd S. P., El Ghaoui L., Feron E. et Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [7] Branicky M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp. 475-482, 1998.
- [8] Colaneri P., Geromel J. C. et Locatelli A. *Control Theory and Design - An  $RH_2$  and  $RH_\infty$  viewpoint*. Academic Press, 1997.
- [9] Colaneri P. Dwell time analysis of deterministic and stochastic switched systems. *Proceedings of the European Control Conference - ECC'09*, pp. 15-31, 2009 et *European Journal of Control*, vol. 15, pp. 228-248, 2009.
- [10] Colaneri P., Bolzern P. et Geromel J. C. Root mean square gain of discrete-time switched linear systems under dwell time constraints. *Submitted*, 2009.
- [11] Daafouz J. et Bernussou J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, vol. 43, pp. 355-359, 2001.
- [12] Daafouz J., Riedinger P. et Iung C. Observer-based switched control design for discrete-time switched systems. *European Control Conference*, Cambridge, UK, 2003.
- [13] Deaecto G. S., Geromel J. C. et Daafouz J. Trajectory dependent filter design for discrete-time switched linear systems. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, vol. 4, pp. 1-8, 2010.
- [14] Deaecto G. S., Geromel J. C., Garcia F. S. et Pomilio J. A. Switched affine systems control design with application to dc-dc converters", *IET Control and Applications*, to appear, 2010.
- [15] DeCarlo R. A., Branicky M. S., Pettersson S. et Lennartson B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, n° 7, pp. 1069-1082, 2000.
- [16] Feron E. Quadratic stability of switched systems via state and output feedback. *Report CICS - P - 468*, Laboratory for Information and Decision Systems, MIT, 1996.
- [17] Geromel J. C. et Colaneri P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, vol. 45, n° 5, pp. 1915-1930, 2006.
- [18] Geromel J. C. et Colaneri P. Stability and stabilization of discrete-time switched systems. *International Journal of Control* vol. 79, n° 7, pp. 719-728, 2006.
- [19] Geromel J. C., Bolzern P. et Colaneri P. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 53, pp. 720-733, 2008.
- [20] Geromel J. C. et Deaecto G. S. Switched state feedback control for continuous time uncertain Systems. *Automatica*, vol. 45, n° 2, pp. 593-597, 2009.
- [21] Geromel J. C. et Colaneri P.  $H_\infty$  and dwell time specifications of continuous-time switched linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 55, n° 1, pp. 207-212, 2010.
- [22] Hespanha J. P. Uniform stability of switched linear systems : extensions of LaSalle's principle. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, pp. 470-482, 2004.
- [23] Hespanha J. P. et Morse A. S. Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, vol. 38, pp. 1905-1917, 2002.
- [24] Hespanha J. P. Root-Mean-Square Gains of Switched Linear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, pp. 2040-2045, 2003.
- [25] Hockerman-Frommer J., Kulkarni S. R. et Ramadge P. J. Controller switching based on output predictions errors. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp. 596-607, 1998.
- [26] Ishii H., Basar T. et Tempo R. Randomized algorithms for synthesis of switching rules for multimodal systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, n° 6, pp. 754-767, 2005.
- [27] Johansson M. et Rantzer A. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp. 555-559, 1998.
- [28] Liberzon D. et Morse A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 19, pp. 59-70, 1999.
- [29] Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston, 2003.
- [30] Margaliot M. et Hespanha J. P. Root-mean-square gains of switched linear systems : a variational approach. *Automatica*, vol. 44, pp. 2398-2402, 2008.
- [31] Morse A. S. Supervisory control of families of linear set-point controllers - part 1 : exact matching. *IEEE Transac. on Autom. Control*, vol. 41, n° 10, pp. 1413-1431, 1996.
- [32] Rantzer A. et Johansson M. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, pp. 629-637, 2000.
- [33] Savaresi S. M., Silani E. et Bittanti S. Acceleration-Driven-Damper (ADD) : An optimal control algorithm for confort-oriented semiactive suspensions. *Trans. of the ASME*, vol. 127, pp. 218-228, 2006.
- [34] Seatzu C., Corona D., Giua A. et Bemporad A. Optimal control of continuous-time switched affine systems. *IEEE Transac. on Autom. Control*, vol. 51, n° 5, pp. 726-741, 2006.
- [35] Scherer C. W. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, vol. 37, pp. 361-375, 2001.
- [36] Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulff K. et King C. Stability criteria for switched and hybrid systems", *SIAM Review*. vol. 49, n° 4, pp. 545-592, 2007.
- [37] Skafidas E., Evans R. J., Savkin A. V. et Petersen I. R. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, vol. 35, pp. 553-564, 1999.
- [38] Sun Z. et Ge S. S. *Switched Linear Systems : Control and Design*, Springer, London, 2005.
- [39] Williams R. A. Automotive active suspensions, part I : basic principles. *IMEchE*, vol. 211, pp. 415-426, 1997.
- [40] Wirth F. A converse Lyapunov theorem for linear parameter varying and linear switching systems. *SIAM J. Control Optim.*, vol. 44, pp. 210-239, 2005.
- [41] Xie G. M. et Wang L. Reachability realization and stabilizability of switched linear discrete-time systems. *Journal of Math. Analysis and Applications*, vol. 280, pp. 209-220, 2003.
- [42] Xu X. et Antsaklis P. J. Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, pp. 2-16, 2004.
- [43] Ye H., Michel A. N. et Hou L. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp. 461-474, 1998.
- [44] Zhai G. Quadratic stability of discrete-time switched systems via state and output feedback. *Proceedings of the 40th IEEE CDC*, pp. 2165-2166, 2001.
- [45] Zhai G., Hu B., Yasuda K. et Michel A. N. Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 338, pp. 765-779, 2001.
- [46] Zhao J. et Hill D. J. On stability  $L_2$  gain and  $H_\infty$  control for switched systems. *Automatica*, vol. 44, pp. 1220-1232, 2008.