

L'analyse de stabilité des machines asynchrones par le critère de Hurwitz complexe

Marc BODSON¹

¹Department of Electrical and Computer Engineering
University of Utah, 50 S Central Campus Dr Rm 3280
Salt Lake City, UT 84112, U.S.A.
bodson@eng.utah.edu

Résumé— L'article montre comment la stabilité de certaines machines asynchrones peut être déterminée sur base des racines d'un polynôme à coefficients complexes. Il est possible de vérifier si les racines ont toutes des parties réelles strictement négatives en appliquant un résultat peu connu, c'est-à-dire le test de Hurwitz pour les polynômes à coefficients complexes. La méthode proposée dans l'article est utilisée pour trouver des conditions analytiques déterminant l'auto-excitation spontanée d'une génératrice asynchrone, ainsi que pour garantir la stabilité en boucle fermée d'une loi de commande proportionnelle intégrale pour une génératrice asynchrone à double alimentation. Dans le premier cas, des formules sont obtenues qui permettent de prédire l'auto-excitation en fonction de la résistance de charge, de la capacité et de la vitesse. Dans le second cas, des conditions sont obtenues sur les gains proportionnel et intégral de la loi de commande, garantissant la stabilité d'un algorithme proposé précédemment par d'autres, mais pour lequel une preuve de stabilité n'était pas disponible jusqu'à présent.

I. INTRODUCTION

Les génératrices asynchrones sont des convertisseurs de puissance électromécanique particulièrement appropriés aux énergies renouvelables [13], [23]. Elles sont robustes et ne nécessitent pas que la fréquence de rotation soit précisément ajustée. L'article considère deux types de génératrices asynchrones : les génératrices auto-excitées (typiquement à cage d'écureuil) qui ne sont pas raccordées au réseau, et les génératrices à double alimentation que l'on trouve souvent dans les parcs éoliens.

Des revues de l'opération des génératrices auto-excitées, avec de longues listes de références, sont fournies par [2] et [4]. En particulier, on trouve des études de l'application à l'énergie micro-hydro électrique [26] et l'énergie éolienne [20]. Ces génératrices sont également utilisées comme génératrices de secours, en cas de pannes de réseau [17]. Un récent domaine de recherche est la conception de régulateurs de tension et fréquence des signaux produits [9], [24], [25]. La compréhension de l'auto-excitation est également importante pour les génératrices asynchrones reliée au réseau, en raison de la nécessité de protéger ces machines de survitesse et de surtension lorsque déconnectées accidentellement [10].

L'article examine également les génératrices à double alimentation [15], [21]. Elles sont connectées au réseau, mais les courants statoriques sont contrôlés indirectement par l'intermédiaire des courants rotoriques. Leur avantage, vis-à-vis des génératrices dont les courants statoriques sont directement contrôlés, est que la conversion électronique de puissance n'est nécessaire qu'au niveau de puissance

inférieur du rotor. Des méthodes ont été proposées pour contrôler les puissances active et réactive produites [1], [3], [14], [27], [28]. En règle générale, la stabilité du système en boucle fermée n'est pas prouvée, excepté dans certains cas, par linéarisation autour de la condition de fonctionnement permanent. Certaines approches récentes ont exploité des résultats de commande non linéaire en utilisant un modèle exprimé dans le référentiel des tensions du réseau [5], [19]. Ce référentiel a l'avantage d'être indépendant des paramètres incertains de la machine. En outre, en supposant un réseau infini, la commande des courants dans le référentiel du réseau est identique à la commande des puissances active et réactive produites par la génératrice.

Pour les génératrices auto-excitées comme pour les génératrices à double alimentation, la contribution de l'article est de montrer que la représentation de la machine en système dynamique à coefficients complexes conduit à une analyse simplifiée de stabilité. Plus précisément, l'article utilise le test de Hurwitz pour polynômes à coefficients complexes. C'est un ancien résultat de la littérature [11], probablement peu connu en raison de l'absence d'applications pertinentes (jusqu'à présent). L'article dérive des nouvelles conditions concernant l'auto-excitation spontanée des génératrices ainsi que la stabilité des génératrices à double alimentation avec commande proportionnelle intégrale.

II. CRITÈRE DE HURWITZ POUR LES POLYNÔMES À COEFFICIENTS COMPLEXES

Il est possible de déterminer si les racines d'un polynôme à coefficients réels ont des parties réelles négatives en utilisant le test de Hurwitz, qui est bien connu dans les systèmes de commande sous la forme du critère de Routh-Hurwitz, et du tableau qui y est associé. L'extension du test de Hurwitz aux polynômes à coefficients complexes est donnée par le lemme suivant [11].

Lemme 1 : les racines du polynôme $P(s)$

$$P(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \dots + c_n \quad (1)$$

aux coefficients complexes

$$c_k = a_k + jb_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2)$$

ont toutes des parties réelles strictement négatives *si et*

seulement si les déterminants

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_k &= \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5, & \dots, & a_{2k-1}, & -b_2, & -b_4, \\ 1, & a_2, & a_4, & \dots, & a_{2k-2}, & -b_1, & -b_3, \\ & & & \dots, & & & \\ 0, & & & \dots, & a_k, & 0, & \\ 0, & b_2, & b_4, & \dots, & b_{2k-2}, & a_1, & a_3, \\ 0, & b_1, & b_3, & \dots, & b_{2k-3}, & 1, & a_2, \\ & & & \dots, & & & \\ 0, & & & \dots, & b_k, & 0, & \\ \dots, & -b_{2k-2} & & & & & \\ \dots, & -b_{2k-3} & & & & & \\ \dots, & & & & & & \\ \dots, & -b_{k-1} & & & & & \\ \dots, & a_{2k-3} & & & & & \\ \dots, & a_{2k-4} & & & & & \\ \dots, & & & & & & \\ \dots, & a_{k-1} & & & & & \end{vmatrix} \\ k &= 2, 3, \dots, n \quad (a_r = b_r = 0 \text{ for } r > n) \end{aligned} \quad (3)$$

sont tous strictement positifs.

Dans cet article, les exemples qui sont considérés sont associés à des polynômes du troisième ordre de la forme

$$p(s) = a_0 s^3 + (a_1 + j b_1) s^2 + (a_2 + j b_2) s + (a_3 + j b_3) \quad (4)$$

où les a_i et b_j sont réels, et $a_0 > 0$. Alors, le test de Hurwitz spécifie que les racines de $p(s)$ ont des parties réelles strictement négatives si et seulement si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, et $\Delta_3 > 0$, où

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & -b_2 \\ a_0 & a_2 & -b_1 \\ 0 & b_2 & a_1 \end{pmatrix} \\ \Delta_3 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & -b_2 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 & -b_1 & -b_3 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 & -b_2 \\ 0 & b_2 & 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_3 & a_0 & a_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

III. APPLICATION DU CRITÈRE DE HURWITZ COMPLEXE AUX GÉNÉRATRICES ASYNCHRONES AUTO-EXCITÉES

A. Modèle d'une génératrice asynchrone

Considérons le modèle d'une génératrice asynchrone diphasée aux enroulements rotoriques court-circuités

$$\begin{aligned} L_S \frac{di_{SA}}{dt} + R_S i_{SA} + M \frac{di_{RA}}{dt} &= v_{SA} \\ L_S \frac{di_{SB}}{dt} + R_S i_{SB} + M \frac{di_{RB}}{dt} &= v_{SB} \\ M \frac{di_{SA}}{dt} + n_P \omega M i_{SB} + L_R \frac{di_{RA}}{dt} \\ &+ R_R i_{RA} + n_P \omega L_R i_{RB} = 0 \\ -n_P \omega M i_{SA} + M \frac{di_{SB}}{dt} - n_P \omega L_R i_{RA} \\ &+ L_R \frac{di_{RB}}{dt} + R_R i_{RB} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

où v_{SA}, v_{SB} sont les tensions statoriques, i_{SA}, i_{SB} sont les courants statoriques, i_{RA}, i_{RB} sont les courants rotoriques (ou équivalents dans le cas d'une génératrice à cage d'écuriel) transformés dans le référentiel statorique, et ω est la vitesse de la génératrice. Les paramètres de la génératrice sont L_S , l'inductance propre statorique, L_R , l'inductance propre rotorique, M , l'inductance mutuelle stator/rotor, R_S , la résistance statorique, R_R , la résistance rotorique, et n_P , le nombre de paires de pôles. Dans le cas d'une génératrice triphasée, une transformation de trois phases à deux phases doit être appliquée avant d'utiliser les résultats.

Attachés à chaque enroulement statorique sont une résistance de charge R_L et un condensateur C , celui-ci étant ajouté pour fournir la puissance réactive requise. Le condensateur C est placé en parallèle avec la charge. Les résultats sont présentés en fonction de la conductance $Y_L = 1/R_L$ afin que le cas où la charge est absente corresponde à $Y_L = 0$ au lieu de $R_L = \infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} C \frac{dv_{SA}}{dt} + i_{SA} + Y_L v_{SA} &= 0 \\ C \frac{dv_{SB}}{dt} + i_{SB} + Y_L v_{SB} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

B. Auto-excitation spontanée des génératrices asynchrones

L'auto-excitation des génératrices asynchrones est un phénomène inhabituel des machines électriques, et un exemple fascinant de système dynamique non linéaire. L'opération en régime permanent est caractérisée par un cycle limite dans la région de saturation magnétique [8], [16], [18]. Toutefois, indépendamment de l'existence d'un cycle produisant de l'énergie, il existe toujours un équilibre stable avec courants nuls qui n'en produit pas. Ce n'est que pour certaines conditions que l'opération à des tensions et courants différents de zéro est possible. Dans certains cas, l'instabilité de l'équilibre à valeurs nulles déclenche un départ de l'équilibre et un transfert à des valeurs non nulles en régime permanent. Dans ce cas, nous parlerons d'*auto-excitation spontanée*. Il s'agit d'un cas inhabituel où *l'instabilité est désirée* pour atteindre le résultat recherché. En cours d'auto-excitation spontanée, les tensions croissent de manière exponentielle jusqu'à ce que la saturation magnétique est atteinte et l'énergie est produite. Des conditions initiales provenant de l'aimantation rémanente ou de condensateurs pré-chargés, déclenchent la croissance des tensions et des courants. La figure 1 montre des données expérimentales d'auto-excitation obtenues avec un petit moteur asynchrone.

L'application de la transformée de Laplace aux équations décrivant la génératrice asynchrone, suivie de réorganisation des équations, produit les equations

$$A_R(s) \begin{pmatrix} I_{SA} \\ I_{RA} \\ V_{SA} \\ I_{SB} \\ I_{RB} \\ V_{SB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_S i_{SA}(0) + M i_{RA}(0) \\ M i_{SA}(0) + L_R i_{RA}(0) \\ C v_{SA}(0) \\ L_S i_{SB}(0) + M i_{RB}(0) \\ M i_{SB}(0) + L_R i_{RB}(0) \\ C v_{SB}(0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

où les lettres majuscules indiquent que les variables sont

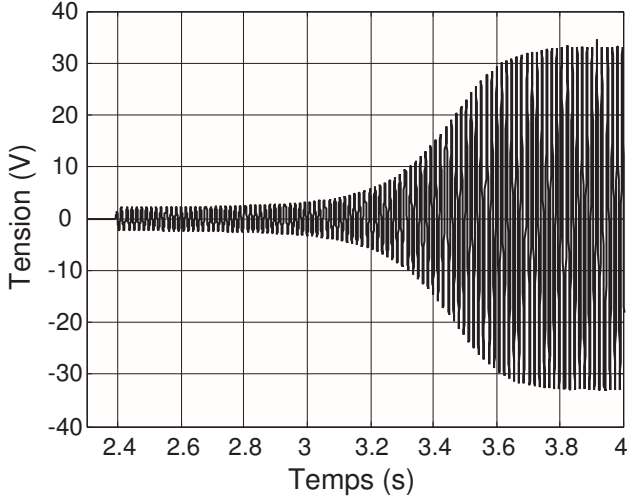


Fig. 1. Croissance de la tension d'une génératrice asynchrone auto-excitée

les transformées de Laplace des signaux originaux et

$$A_R(s) = \begin{pmatrix} sL_S + R_S & Ms & -1 \\ Ms & sL_R + R_R & 0 \\ 1 & 0 & sC + Y_L \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_P\omega M & -n_P\omega L_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ n_P\omega M & n_P\omega L_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ sL_S + R_S & Ms & -1 \\ Ms & sL_R + R_R & 0 \\ 1 & 0 & sC + Y_L \end{pmatrix} \quad (9)$$

Le phénomène transitoire de l'auto-excitation spontanée est lié à l'existence d'au moins une racine de $\det A_R(s) = 0$ avec partie réelle positive [12]. En raison de la taille de la matrice $A_R(s)$, des conditions analytiques pour l'instabilité ne sont pas trouvées dans [12], et la détermination a été réalisée numériquement. Quoique les calculs peuvent être effectués rapidement avec des ordinateurs modernes, la recherche des conditions couvre un large espace, avec plusieurs paramètres variables comme la résistance de charge, la capacité et la vitesse, et aucune connaissance disponible quant à l'emplacement, la forme, et le nombre de régions instables possibles. En théorie, des conditions précises de stabilité pourraient être obtenues en appliquant le test de Routh-Hurwitz au polynôme caractéristique $\det A_R(s)$. Cette tâche, toutefois, est difficile, vu la dimension du problème (matrice 6×6 et donc polynôme de degré 6). Heureusement, le problème peut être converti en un problème de plus petite taille dans le domaine complexe, où il devient traitable par l'application du critère complexe de Hurwitz.

C. Conditions analytiques d'auto-excitation spontanée

Nous définissons la matrice $A_C(s)$ par

$$A_C(s) = \begin{pmatrix} sL_S + R_S & Ms \\ Ms - jn_P\omega M & sL_R + R_R - jn_P\omega L_R \\ 1 & 0 \\ -1 \\ 0 \\ sC + Y_L \end{pmatrix} \quad (10)$$

et considérons le polynôme cubique aux *coefficients complexes* $\det A_C(s)$. Le fait suivant a été prouvé [7].

Fait 1 : toute racine de $\det A_C(s) = 0$ est une racine de $\det A_R(s) = 0$. D'autre part, si s_0 est une racine de $\det A_R(s) = 0$, alors s_0 ou son conjugué complexe s_0^* est une racine de $\det A_C(s) = 0$.

Le fait n° 1 implique que $A_C(s)$ contient les informations complètes sur le comportement dynamique du système d'origine, étant donné que tous les pôles du système d'origine peuvent être obtenus à partir des racines de $\det A_C(s)$. Appliquant le critère de Hurwitz pour les polynômes à coefficients complexes [11] à $\det A_C(s)$, le fait suivant peut alors être prouvé.

Fait 2 : l'auto-excitation spontanée se produit si et seulement si les paramètres de la génératrice asynchrone satisfont

$$\beta < -2\sqrt{\alpha\gamma} \quad (11)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1 - b_2)b_1b_2^2b_3 \\ \beta &= a_1^2a_2b_2b_3 - a_1^3b_3^2 - 3a_1a_3b_1b_2b_3 + 2a_1^2a_3b_1b_3 \\ &\quad + a_1a_2a_3b_1b_2 - a_1a_3^2b_1^2 - a_2a_3b_1b_2^2 - a_3^2b_1^2b_2 \\ \gamma &= a_3(a_1a_2 - a_3b_1)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

et les constantes a_i et b_j sont les coefficients réels et imaginaires du polynôme complexe $\det A_C(s)$, donnés par

$$\begin{aligned} a_0 &= C(L_S L_R - M^2) \\ a_1 &= Y_L(L_S L_R - M^2) + C(L_S R_R + L_R R_S) \\ a_2 &= Y_L(L_S R_R + L_R R_S) + (C R_S R_R + L_R) \\ a_3 &= R_R(Y_L R_S + 1), \quad b_1 = a_0 \\ b_2 &= Y_L(L_S L_R - M^2) + C L_R R_S \\ b_3 &= L_R(Y_L R_S + 1) \end{aligned} \quad (13)$$

En outre, l'auto-excitation spontanée ne peut se produire que :

- pour une seule gamme de vitesses $\omega \in (\omega_{\min}, \omega_{\max})$, telle que

$$\begin{aligned} \omega_{\min} &= \frac{1}{n_P} \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \\ \omega_{\max} &= \frac{1}{n_P} \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \end{aligned} \quad (14)$$

- pour une résistance de charge satisfaisant

$$R_L > \frac{4\sqrt{\sigma}}{(\sqrt{\sigma} - 1)^2} R_S \quad (15)$$

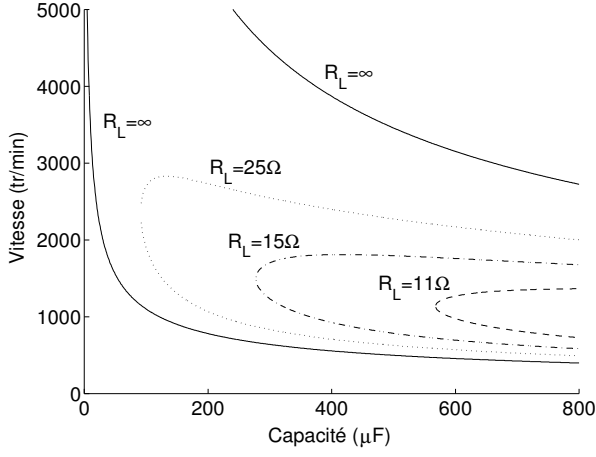


Fig. 2. Vitesses critiques pour l'auto-excitation spontanée

où $\sigma = L_S L_R - M^2$,
 – et pour une capacité $C \in (C_{\min}, C_{\max})$ telle que

$$\begin{aligned} C_{\min} &= \frac{-g_2 - \sqrt{g_2^2 - 4g_1g_3}}{2g_1} \\ C_{\max} &= \frac{-g_2 + \sqrt{g_2^2 - 4g_1g_3}}{2g_1} \end{aligned} \quad (16)$$

où

$$\begin{aligned} g_1 &= R_S^2, \quad g_2 = 2L_S(R_S Y_L + 1)\sqrt{\sigma} - (\sigma + 1)L_S \\ g_3 &= \sigma L_S^2 Y_L^2 \end{aligned} \quad (17)$$

La preuve complète du fait n° 2 est disponible dans [7]. Il s'avère que les déterminants Δ_1 et Δ_2 sont toujours positifs. D'autre part, Δ_3 est de la forme

$$\Delta_3 = \alpha(n_P\omega)^4 + \beta(n_P\omega)^2 + \gamma \quad (18)$$

où α, β, γ sont spécifiés par (12). La condition (11) garantit que Δ_3 est négatif pour une certaine gamme de vitesses. Les autres résultats découlent de l'observation que les limites de l'auto-excitation spontanée sont déterminées par det $A_C(j\omega_e) = 0$ pour une fréquence particulière ω_e .

Le fait n° 2 précise qu'il ne peut y avoir qu'une seule gamme de vitesse. Il donne un calcul direct de la gamme de vitesse pour laquelle l'auto-excitation spontanée se produit et spécifie les conditions que les paramètres doivent satisfaire. En utilisant les résultats, on peut rapidement déterminer les combinaisons de vitesse et de capacités pour lesquelles l'auto-excitation spontanée se produit. La figure 2 montre les limites supérieures et inférieures de la vitesse calculées par les formules, et en fonction de la valeur de la capacité. Plusieurs valeurs de la résistance de charge sont utilisées pour un exemple présenté dans [22] (avec $R_S = 1.7\Omega$, $R_R = 2.7\Omega$, $L_S = L_R = 191.4mH$, et $M = 180mH$). La figure est comparable aux figures de [22] obtenues numériquement.

Un cas intéressant est obtenu lorsque $Y_L = 0$ et $R_S = 0$ (pas de résistance de charge et résistance statorique nulle) et la condition pour l'auto-excitation est simplement

$$\omega > \frac{1}{n_p} \sqrt{\frac{1}{L_S C}} \quad (19)$$

En d'autres termes, la condition pour l'auto-excitation est que la fréquence électrique correspondant à la vitesse doit être supérieure à la fréquence résonante du circuit LC composé de l'inductance statorique et de la capacité. Il n'y a pas de limite supérieure à la plage de vitesse dans ce cas parce que $\alpha = 0$.

IV. APPLICATION DU CRITÈRE DE HURWITZ COMPLEXE AUX GÉNÉRATRICES ASYNCHRONES À DOUBLE ALIMENTATION

A. Modèle d'une génératrice asynchrone à double alimentation

En contraste avec la génératrice auto-excitée, le modèle utilisé dans la présente section est exprimé en coordonnées du réseau tournant à une vitesse synchrone ω_S et comprend des tensions extérieures appliquées aux enroulements du rotor. Le modèle est

$$\begin{aligned} L_S \frac{di_{SF}}{dt} + R_S i_{SF} - \omega_S L_S i_{SG} + M \frac{di_{RF}}{dt} - \omega_S M i_{RG} &= v_{SF} \\ L_S \frac{di_{SG}}{dt} + R_S i_{SG} + \omega_S L_S i_{SF} + M \frac{di_{RG}}{dt} + \omega_S M i_{RF} &= v_{SG} \\ M \frac{di_{SF}}{dt} + (n_P \omega - \omega_S) M i_{SG} + L_R \frac{di_{RF}}{dt} + R_R i_{RF} + (n_P \omega - \omega_S) L_R i_{RG} &= v_{RF} \\ M \frac{di_{SG}}{dt} - (n_P \omega - \omega_S) M i_{SF} + L_R \frac{di_{RG}}{dt} + R_R i_{RG} - (n_P \omega - \omega_S) L_R i_{RF} &= v_{RG} \end{aligned} \quad (20)$$

où v_{SF}, v_{SG} sont les tensions statoriques, i_{SF}, i_{SG} sont les courants statoriques, v_{RF}, v_{RG} sont les tensions rotoriques, i_{RF}, i_{RG} sont les courants rotoriques, et ω est la vitesse de la génératrice. Les paramètres de la génératrice sont définis comme précédemment. Les indices F et G indiquent que les variables de phase ont été transformées dans un référentiel tournant à la fréquence ω_S . Pour les tensions statoriques (et de même pour les courants statoriques)

$$\begin{pmatrix} v_{SF} \\ v_{SG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_S) & \sin(\theta_S) \\ -\sin(\theta_S) & \cos(\theta_S) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{SA} \\ v_{SB} \end{pmatrix} \quad (21)$$

où v_{SA}, v_{SB} sont les tensions sur les enroulements statoriques A et B et

$$\frac{d\theta_S}{dt} = \omega_S \quad (22)$$

Pour les tensions rotoriques (et de même pour les courants rotoriques)

$$\begin{pmatrix} v_{RF} \\ v_{RG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_S - n_P \theta) & \sin(\theta_S - n_P \theta) \\ -\sin(\theta_S - n_P \theta) & \cos(\theta_S - n_P \theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{RA} \\ v_{RB} \end{pmatrix} \quad (23)$$

où v_{RA}, v_{RB} sont les tensions sur les enroulements rotoriques A et B .

B. Loi de commande proportionnelle-intégrale

La loi de commande proportionnelle intégrale (PI) de [5] est un algorithme intéressant de commande non linéaire à

faible complexité. Obtenu en appliquant des techniques de passivité de commande non linéaire, c'est un algorithme de linéarisation par rétroaction qui produit un système linéaire en boucle fermée. Les auteurs de [5] n'ont pas prouvé la stabilité de leur algorithme. Pourtant, des analyses pour des cas spéciaux, des simulations et des expériences, ont démontré un large éventail de valeurs de paramètres conduisant à la stabilité.

La loi de commande PI est donnée par

$$\begin{aligned}
v_{RF} &= (n_P\omega - \omega_S)Mi_{SG} + R_R i_{RF} \\
&\quad + (n_P\omega - \omega_S)L_R i_{RG} + u_{RF} \\
u_{RF} &= k_P(i_{SG} - i_{SG}^*) + k_I \int (i_{SG} - i_{SG}^*) dt \\
v_{RG} &= -(n_P\omega - \omega_S)Mi_{SF} + R_R i_{RG} \\
&\quad - (n_P\omega - \omega_S)L_R i_{RF} + u_{RG} \\
u_{RG} &= -k_P(i_{SF} - i_{SF}^*) - k_I \int (i_{SF} - i_{SF}^*) dt \quad (24)
\end{aligned}$$

où i_{SF}^* et i_{SG}^* sont les valeurs désirées des courants statoriques, et k_P et k_I sont les gains proportionnel et intégral. La régulation des courants statoriques permet la commande des puissances active et réactive délivrées par la génératrice. La théorie peut aussi être appliquée aux moteurs, puisque les courants peuvent avoir des valeurs positives ou négatives. Une particularité curieuse de l'algorithme est son asymétrie, de sorte que l'erreur dans l'axe F produit une commande dans l'axe G , et vice-versa (dans [5], le signe de k_I est opposé à ce que nous avons ici, mais nous pensons qu'il y a eu une erreur dans la transcription de l'algorithme).

L'application de la transformée de Laplace aux équations de la génératrice, négligeant les conditions initiales (car le système s'avérera être stable), et ré-ordonnant les équations, on obtient

$$A_R(s) \begin{pmatrix} V_{SF} \\ I_{RF} \\ U_{RF} \\ I_{SG} \\ I_{RG} \\ U_{RG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{SF} \\ 0 \\ -(k_P s + k_I) I_{SG}^* \\ V_{SG} \\ 0 \\ (k_P s + k_I) I_{SF}^* \end{pmatrix} \quad (25)$$

où les lettres majuscules indiquent que les nouvelles variables sont les transformées de Laplace des signaux ($I_{SG}^* = i_{SG}^*/s$ et $I_{SF}^* = i_{SF}^*/s$) et

$$A_R(s) = \begin{pmatrix} L_S s + R_S & M s & 0 \\ M s & L_R s & -1 \\ 0 & 0 & s \\ \omega_S L_S & \omega_S M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_P s + k_I & 0 & 0 \\ -\omega_S L_S & -\omega_S M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_P s - k_I & 0 & 0 \\ L_S s + R_S & M s & 0 \\ M s & L_R s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \quad (26)$$

La stabilité du système en boucle fermée est déterminée par les racines de $\det A_R(s) = 0$. Toutes les racines

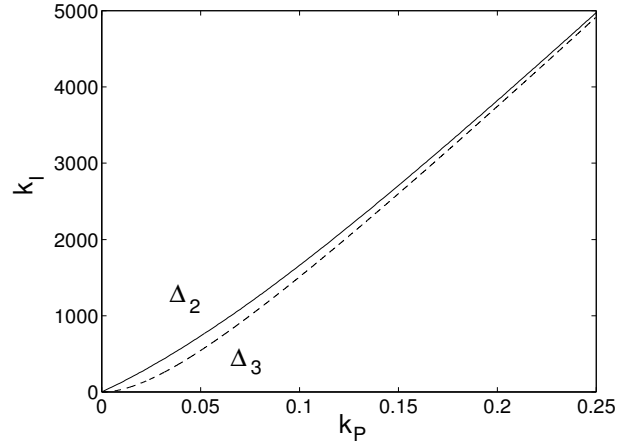


Fig. 3. Région stable pour la loi de commande PI déterminée par les tests Δ_2 and Δ_3 (la région stable en dessous de la courbe Δ_3)

doivent avoir des parties réelles strictement négatives pour que le système soit stable. Dans [5], l'application du test de Routh-Hurwitz au polynôme caractéristique du 6^{ème} ordre a été considérée, mais les calculs étaient trop compliqués pour donner un résultat utile. Par contre, l'application du critère de Hurwitz au polynôme complexe donne une réponse simple et élégante.

C. Stabilité de la loi de commande PI

Dans ce cas, la matrice $A_C(s)$ est définie par

$$A_C(s) = \begin{pmatrix} L_S s + R_S + j\omega_S L_S & M(s + j\omega_S) & 0 \\ M s & L_R s & -1 \\ j(k_P s + k_I) & 0 & s \end{pmatrix} \quad (27)$$

Le fait n° 2 peut être appliqué à cette matrice, et la stabilité est déterminée par les racines du polynôme aux coefficients complexes, avec parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned}
a_0 &= L_S L_R - M^2, & a_1 &= L_R R_S, & a_2 &= \omega_S k_P M \\
a_3 &= \omega_S k_I M, & b_1 &= (L_S L_R - M^2)\omega_S - M k_P \\
b_2 &= -k_I M, & b_3 &= 0
\end{aligned} \quad (28)$$

En supposant que $k_P > 0$ et $k_I > 0$, il s'avère que les déterminants du test de Hurwitz sont tels que $\Delta_1 > 0$, et que $\Delta_2 > 0$ si et seulement si

$$k_P > \frac{k_I \mu (2\omega_S R_S L_R + k_I M)}{R_S L_R (R_S L_R \omega_S + k_I M)} \quad (29)$$

D'un autre côté, $\Delta_3 > 0$ si et seulement si

$$k_I < \frac{k_P^2 R_S L_R M}{\mu (\mu \omega_S + k_P M)} \quad (30)$$

La figure 3 montre les limites définies par Δ_2 (à droite de la courbe) et Δ_3 (en dessous de la courbe) pour le moteur de [5] (avec $R_S = 4.92\Omega$, $R_R = 4.42\Omega$, $L_S = 7.25mH$, $L_R = 7.15mH$, $M = 7.1mH$, et une fréquence synchrone $\omega_S = 100\pi$ rad/s). Il se fait que $\Delta_3 > 0$ implique $\Delta_2 > 0$ et donc que $\Delta_3 > 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité [6].

L'inégalité quadratique (30) est une condition très simple. Ceci rend l'algorithme de [5] bien plus utile, surtout que la plupart des méthodes de commande proposées

dans la littérature ne sont pas prouvées être stables. Il est intéressant de noter que la loi de commande de [19] peut également être prouvée stable en utilisant les techniques du présent article. Pour cette loi de commande, la stabilité a été prouvée dans [19] en utilisant une fonction de Lyapunov. Notre méthode élimine l'incertitude dans la recherche d'une telle fonction.

V. REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier le professeur John Chiasson pour avoir stimulé son intérêt pour les génératrices auto-excitées et le professeur Oleh Kiselychnyk pour des discussions multiples sur le sujet ainsi que pour le recueil des données présentées dans la figure 1.

VI. CONCLUSIONS

L'article a présenté une nouvelle méthode pour l'analyse des machines asynchrones sur base d'un test complexe de Hurwitz. L'approche simplifie le calcul des conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent la stabilité. Le test complexe de Hurwitz a été appliqué pour trouver des conditions d'auto-excitation spontanée des génératrices asynchrones. Des conditions analytiques ont remplacé la recherche numérique qui était nécessaire auparavant. L'application de la nouvelle méthode aux lois de commande pour les génératrices asynchrones à double alimentation a également été examinée. La méthode a permis une preuve de stabilité remarquablement simple d'un algorithme pour lequel seulement des réponses partielles étaient connues auparavant. En général, le test complexe de Hurwitz est un nouvel outil pour aborder certains problèmes dont l'analyse dans le domaine réel est intraitable, ou dépend de la possibilité incertaine de découvrir une fonction de Lyapunov.

RÉFÉRENCES

- [1] H. Akagi & H. Sato, "Control and performance of a doubly-fed induction machine intended for a flywheel energy storage system," *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 17, no. 1, 2002, pp. 109-116.
- [2] R. C. Bansal, "Three-phase self-excited induction generators: an overview," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 20, no. 2, 2005, pp. 292-299.
- [3] H. Banakar, C. Luo, & B. T. Ooi, "Steady-state stability analysis of doubly-fed induction generators under decoupled P-Q control," *IEE Proceedings - Electric Power Applications*, vol. 153, no. 2, 2006, pp. 300-306.
- [4] R. C. Bansal, T.S. Bhatti, & D.P. Kothari, "Bibliography on the application of induction generators in nonconventional energy systems," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 18, no. 3, 2003, pp. 433-439.
- [5] C. Batlle, A. Doria-Cerezo, R. Ortega, "Robustly stable PI controller for the doubly-fed induction machine," *Proc of the 32nd IEEE Annual Conference on Industrial Electronics (IECON 2006)*, 2006, pp. 5113-5118.
- [6] M. Bodson, "The complex Hurwitz test for the stability analysis of induction generators," *American Control Conference*, Baltimore, MD, 2009.
- [7] M. Bodson & O. Kiselychnyk, "Analytic conditions for spontaneous self-excitation in induction generators," *American Control Conference*, Baltimore, MD, 2009.
- [8] T. F. Chan, "Steady-state analysis of self-excited induction generators," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 9, no. 2, 1994, pp. 288-296.
- [9] J. K. Chatterjee, B. V. Perumal, & N. R. Gopu, "Analysis of operation of a self-excited induction generator with generalized impedance controller," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 22, no. 2, 2006, pp. 307-315.
- [10] M. Ermis, Z. Cakir, I. Cadirci, G. Zenginobuz, and H. Tezcan, "Self-excitation of induction motors compensated by permanently connected capacitors and recommendations for IEEE std 141-1993," *IEEE Trans. on Industry Applications*, vol. 39, no. 2, 2003, pp. 313-324.
- [11] E. Frank, "On the zeros of polynomials with complex coefficients," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 52, no. 2, 1946, pp. 144-157.
- [12] C. Grantham, D. Sutanto, & B. Mismail, "Steady-state and transient analysis of self-excited induction generators," *IEE Proc.*, vol. 136, pt. B, no. 2, 1989, pp. 61-68.
- [13] L. L. Lai & T. F. Chan, *Distributed generation: Induction and permanent magnet generators*, Wiley & Sons, Chichester, England, 2007.
- [14] J. Marques & H. Pinheiro, "Dynamic behavior of the doubly-fed induction generator in stator flux vector reference frame," *Proc. of the 36th IEEE Power Electronics Specialists Conference*, 2005, pp. 2104 - 2110.
- [15] S. Muller, M. Deicke, & R. W. De Doncker, "Doubly fed induction generator systems for wind turbines," *IEEE Industry Applications Magazine*, vol. 8, no. 3, 2002, pp. 26-33.
- [16] S. S. Murthy, O. P. Malik, & A.K. Tandon, "Analysis of self-excited induction generators," *IEE Proc.*, vol. 129, pt. C, no. 6, 1982, pp. 260-265.
- [17] H. Nash, "The truth about standby generator excitation support systems," *IEEE Trans. on Industry Applications*, vol. 26, no. 4, 1990, pp. 726-734.
- [18] L. Ouazene & G. Mepheron, "Analysis of the isolated induction generator," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. 102, no. 8, 1983, pp. 2793 - 2798.
- [19] S. Peresada, A. Tilli, & A. Tonielli, "Power control of a doubly fed induction machine via output feedback," *Control Engineering Practice*, vol. 12, 2004, pp. 41-57.
- [20] B. V. Perumal & J. K. Chatterjee, "Voltage and frequency control of a stand alone brushless wind electric generation using generalized impedance controller," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 23, no. 2, 2008, pp. 632-641.
- [21] A. Petersson, L. Harnefors, & T. Thiringer, "Evaluation of current control methods for wind turbines using doubly-fed induction machines," *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 20, no. 1, 2005, pp. 227-235.
- [22] D. Seyoum, C. Grantham, F. Rahman, & M. Nagrial, "An insight into the dynamics of loaded and free running isolated self-excited induction generators," *Proc. of the International Conference on Power Electronics, Machines and Drives*, Bath, UK, IEE, 2002.
- [23] M. G. Simoes & F. A. Farret, *Renewable Energy Systems: Design and Analysis with Induction Generators*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
- [24] B. Singh, S. S. Murphy, & S. Gupta, "Transient analysis of self-excited induction generator with electronic load controller (ELC) supplying static and dynamic loads," *IEEE Trans. on Industry Applications*, vol. 41, no. 5, 2005, pp. 1194-1204.
- [25] B. Singh, S. S. Murphy, & S. Gupta, "Analysis and design of electronic load controller for self-excited induction generators," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 21, no. 1, 2006, pp. 285-293.
- [26] D. Sutanto, C. Grantham, & F. Rahman, "A regulated self-excited induction generator for use in a remote area power supply," *Sixth International Conference on Electrical Machines and Drives, 1993*, pp. 234-239.
- [27] A. Tapia, G. Tapia, J. X. Ostolaza, & J. R. Saenz, "Modeling and control of a wind turbine driven doubly fed induction generator," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 18, no. 2, 2003, pp. 194-204.
- [28] Y. Zheng, Y. Li, & J. Chai, "Stability analysis of doubly-fed induction wind generator operating at low power factor mode," *Proc. of the 34th IEEE Annual Conference on Industrial Electronics (IECON 2008)*, 2008, pp. 2241-2246.