



fractionnaires). Pour un système MIMO non carré  $G(s)$ , il existe un régulateur découplant et stabilisant si la matrice pseudo-inverse du procédé nominal  $G_o(s)$  existe et si  $G(s)$  ne comporte pas de simplification pôle/zéro [6].

La matrice  $\beta_o(s)$  est paramétrée de manière à satisfaire les objectifs suivants :

1. un découplage parfait pour le procédé nominal,
2. les spécifications sur les marges de stabilité de la boucle ouverte pour le procédé nominal et pour les procédés reparamétrés (comportement autour des fréquences de coupures),
3. les spécifications sur les  $n$  efforts de commandes aux hautes fréquences,
4. les spécifications de précisions aux basses fréquences,
5. la stabilité du système bouclé (stabilité interne et robuste).

Considérons tout d'abord que  $G_o(s)$  s'écrit :

$$G_o(s) = \begin{bmatrix} g_{011}(s) & \dots & g_{01n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{0m1}(s) & \dots & g_{0mm}(s) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

où :

- $g_{0ij}(s) = h_{ij}(s)e^{-L_{ij}s}$ , (4)
- $h_{ij}(s)$  est une fonction de transfert strictement propre à minimum de phase,
- $L_{ij}$  est une constante positive.

Le régulateur est défini à partir de

$$K(s) = G_o^\dagger(s)\beta_o(s) = G_o^\dagger(s)\text{diag}\left[\frac{n_j(s)}{d_j(s)}\right]_{j \in N}, \quad (5)$$

où  $G_o^\dagger(s)$  est la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Graybill [7] a établi des expressions permettant de calculer la matrice inverse de Moore-Penrose d'une matrice complexe  $A$  de plein rang :

- si  $m < n$ , alors  $A^\dagger = A^H(AA^H)^{-1}$  et  $AA^\dagger = I_{m \times m}$ ,
- si  $m = n$ , alors  $A^\dagger = A^{-1}$  et  $AA^\dagger = I_{m \times m}$ ,
- si  $m > n$ , alors  $A^\dagger = (A^H A)^{-1} A^H$  et  $A^\dagger A = I_{n \times n}$ ,

où  $A^H$  est la matrice conjuguée hermitienne de  $A$ , c'est-à-dire sa matrice trans-conjuguée.

$G_o^\dagger(s)$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$G_o^\dagger(s) = P(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s)e^{\gamma_{11}s} & \dots & p_{1m}(s)e^{\gamma_{1m}s} \\ \vdots & p_{ij}(s)e^{\gamma_{ij}s} & \vdots \\ p_{n1}(s)e^{\gamma_{n1}s} & \dots & p_{nm}(s)e^{\gamma_{nm}s} \end{bmatrix} \quad (7)$$

où :

- $p_{ij}(s)$  est une somme de polynôme en  $s$  retardés de type  $\sum_i a_i s^i e^{-\zeta_i s}$ ,
- $\gamma_{ij}$  est un réel positif.

**B. Définition des éléments de la matrice de transfert diagonale en boucle ouverte,  $\beta_o(s)$**

Si ni  $G_o(s)$  ni  $G_o^\dagger(s)$  ne comportent de zéro/pôle à partie réelle positive et/ou de terme de retard, chaque élément de  $\beta_o(s)$  est décrit en utilisant la stratégie de troisième génération de la commande CRONE SISO. Dans un premier temps, chaque élément peut s'écrire comme un transfert d'ordre fractionnaire  $n_f$  borné en fréquence par l'intervalle  $[\omega_A, \omega_B]$ . Tel que le décrit la figure 2 dans le plan de Nichols, l'ordre complexe  $n_f = a+ib$  permet de créer un segment de droite (sur l'intervalle d'étude) de direction et de position quelconque, appelé gabarit généralisé.

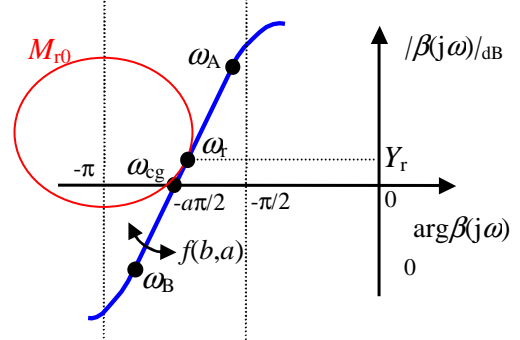


Figure 2 : Gabarit généralisé

La partie réelle de l'ordre non entier  $n_f$  détermine le placement en phase du gabarit à  $-\text{Re}(n_f)\pi/2$  à la fréquence au gain unité en boucle ouverte  $\omega_{cg}$ . La partie imaginaire permet ensuite de modifier son inclinaison par rapport à la verticale. Ce gabarit généralisé est alors décrit par la restriction dans le plan opérationnel  $C_j$  de la transmittance d'un intégrateur d'ordre fractionnaire complexe, soit :

$$\beta_{0i}(s) = \left[ \left( \frac{\omega_{cgi}}{s} \right)^{n_{fi}} \right]_{C_j}, \quad (8)$$

avec  $s = \sigma + j\omega \in C_j$  et  $n_{fi} = a_i + ib_i \in C_i$ .

En tenant compte d'une troncature en haute et basse fréquences, la fonction de transfert en boucle ouverte est définie aux fréquences moyennes par :

$$\beta_{mi}(s) = C_i^{\text{sign}(b_i)} \left( \frac{1+s/\omega_{hi}}{1+s/\omega_{li}} \right)^{a_i} \left( \text{Re}_{i} \left\{ \left( C_{gi} \frac{1+s/\omega_{hi}}{1+s/\omega_{li}} \right)^{ib_i} \right\} \right)^{-q_i \text{sign}(b_i)}, \quad (9)$$

$$\text{avec } C_{gi} = \left( 1 + \left( \frac{\omega_{ri}}{\omega_{li}} \right)^2 \right) / \left( 1 + \left( \frac{\omega_{ri}}{\omega_{hi}} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Chaque fonction de transfert  $\beta_{mi}(s)$  est alors complétée par une partie basse et haute fréquence. On a alors :

$$\beta_{0i}(s) = \beta_{li}(s)\beta_{mi}(s)\beta_{hi}(s), \quad (11)$$

avec :

$$\beta_{li}(s) = C_{li} \left( \frac{\omega_{li}}{s} + 1 \right)^{n_{li}} \quad \text{et} \quad \beta_{hi}(s) = \frac{C_{hi}}{\left( \frac{s}{\omega_{hi}} + 1 \right)^{n_{hi}}} \quad (12)$$

où l'ordre entier  $n_{li}$  fixe les spécifications de précision aux basses fréquences, et où l'ordre  $n_{hi}$  permet au régulateur d'être propre.

Pour des pulsations  $\omega_i$  et  $\alpha_{hi}$  et paramètres de résonance  $\alpha_i$  et  $Y_{ri}$  donnés, les valeurs de  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $q_i$ ,  $C_i$ ,  $C_{gi}$ ,  $C_{li}$  et  $C_{hi}$  sont calculées afin d'assurer la tangence de  $\beta_{0i}(j\omega)$  à un contour d'amplitude nominal de valeur  $M_{r0i}$  (figure 2).

C. *Prise en compte de termes de type retard présents dans la matrice  $G_o^\dagger(s)$*

Compte tenu des relations (5) et (7), chaque terme du régulateur s'écrit :

$$k_{ij}(s) = p_{ij}(s)e^{\gamma_{ij}s}\beta_{0j}(s). \quad (13)$$

Afin que chaque terme  $k_{ij}(s)$  soit réalisable, il est bien évident que le retard global qu'il comporte ne doit pas correspondre à un effet de prédiction pure. Il est donc parfois nécessaire de faire apparaître des termes de retard dans les termes de boucle ouverte  $\beta_{0j}(s)$ . En considérant la matrice  $Q(s)$  définie par

$$Q = G_0 G_0^H = [q_{ij}] = \left[ \sum_{k=1}^n h_{ik} \cdot \bar{h}_{jk} \cdot e^{-(L_{ik} - L_{jk})s} \right]_{1 \leq i, j \leq m}, \quad (14)$$

et sa comatrice  $Q^{ij}(s)$ , il a été montré [5] que la  $j^{\text{ème}}$  fonction de transfert  $\beta_{0j}(s)$  de la matrice de transfert de la boucle ouverte doit comporter un retard pur au moins supérieur à la différence entre le plus grand des retards purs  $\alpha_{q1}$  du déterminant de  $Q(s)$  et le plus petit des retards purs de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $G_0^H(s)(Q^{ij}(s))^T$ .

D. *Prise en compte de termes de zéros/pôles à partie réelle positive (PRP) présents dans les matrice  $G_o(s)$  et  $G_o^\dagger(s)$*

La stabilité interne de la commande en boucle fermée d'un système MIMO comportant des zéros/pôles à partie réelle positive ne peut être assurée que si aucune compensation pôle/zéro PRP n'existe entre les matrice de transfert  $G(s)$  et  $K(s)$ . Pour cela, compte tenu de (5), il est notamment nécessaire que si  $G_o(s)$  possède un zéro PRP en  $z$  alors  $\beta_o(s)$  doit avoir un zéro en  $z$ . Il en est de même si  $G_o(s)$  possède un pôle PRP en  $p$ . Ainsi la première étape de validation de la stabilité interne du bouclage consiste à rechercher les polynômes  $z(s)$  et  $\phi(s)$  contenant respectivement les zéros et pôles de la matrice  $G_o(s)$ . De ces polynômes sont extraits les zéros et pôles PRP à intégrer à la boucle ouverte. La façon la plus simple d'assurer la stabilité interne du bouclage est ainsi de compléter la matrice de transfert en boucle ouverte initiale  $\beta_o(s)$  par une matrice de transfert  $D(s)$  diagonale tel que :

$$\beta_{\text{SIO}}(s) = D(s)\beta_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{z^+(s)}{\phi^+(s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{z^+(s)}{\phi^+(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{o1}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{om}(s) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

où  $z^+(s)$  et  $\phi^+(s)$  sont respectivement les polynômes contenant tous les zéros et pôles PRP de  $z(s)$  et de  $\phi(s)$ .

Une solution plus élégante et induisant moins de contraintes sur les performances atteignables en boucle fermée consiste à répartir les différents zéros et pôles PRP de  $z(s)$  et de  $\phi(s)$  dans les différents éléments de la matrice de transfert diagonale  $D(s)$  [8]. Cette répartition nécessite la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice de transfert  $G_o(s)$  au voisinage des différents zéros et pôles PRP. On peut ainsi détecter sur quelles sorties agissent les différents zéros et pôles PRP, et donc décider dans quel terme de  $D(s)$  les intégrer. On obtient alors :

$$\beta_{\text{SIO}}(s) = D(s)\beta_o(s) = \begin{bmatrix} D_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_m(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{o1}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{om}(s) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

L'ensemble des termes  $D_j(s)$  contient l'ensemble des zéros et pôles PRP de la matrice  $G_o(s)$ . Comme pour la commande CRONE SISO [9], chacun des  $D_j(s)$  comprend aussi une partie associée tenant compte de ses pôles PRP et permettant de vérifier le critère de stabilité de Nyquist.

E. *Prise en compte d'objectif de rejet de perturbation et de réalisabilité du régulateur*

En utilisant (13), le régulateur est propre si :

$$\deg(d_j(s)) + \deg(D_{p_{ij}}(s)) \geq \deg(N_{p_{ij}}(s)) + \deg(n_j(s)), \forall j \in N, \quad (16)$$

en posant

$$p_{ij}(s) = \frac{N_{p_{ij}}(s)}{D_{p_{ij}}(s)}. \quad (17)$$

Sachant qu'aux hautes fréquences :

$$\deg(d_j(s)) = n_{hj}, \quad (18)$$

on obtient la condition suivante :

$$n_{hi} \geq \max_{j \in N} (\deg(N_{p_{ij}}(s)) - \deg(D_{p_{ij}}(s))). \quad (19)$$

(19) doit aussi absolument prendre en compte la matrice  $D(s)$  de (15) quand celle-ci est différente de la matrice identité et particulièrement quand elle comporte des zéros PRP de  $G_o(s)$ .

Aux basses fréquences, les perturbations en entrée sont rejetées si, considérant la fonction de transfert  $S_0(s)G_o(s)$  :

$$\eta_0(S_0(s)) + \eta_0(G_o(s)) \geq 0. \quad (20)$$

$\eta_0(\cdot)$  étant une fonction permettant de comptabiliser le nombre relatif de racine en  $s = 0$  d'une fonction de transfert. Cet ordre étant donné pour chaque élément diagonal de  $S_0(s)$  par celui de  $\beta_{oi}(s)$ , on obtient

$$\eta_0(S(s)) \approx -\eta_0(\beta_{oi}(s)) = n_{li}. \quad (21)$$

En posant

$$g_{ij}(s) = \frac{N_{g_{ij}}(s)}{D_{g_{ij}}(s)}, \quad (22)$$

on obtient finalement la condition :

$$n_{li} \geq \max_{j \in N} (\eta_0(D_{g_{ij}}(s)) - \eta_0(N_{g_{ij}}(s))). \quad (23)$$

F. *Optimisation des paramètres de la matrice de transfert nominale et diagonale en boucle ouverte  $\beta_o(s)$*

Les fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire s'écrivent :

$$S_0(s) = [I + \beta_o(s)]^{-1} = \text{diag}[S_{0i}(s)]_{1 \leq i \leq n}, \quad (24)$$

$$T_0(s) = [I + \beta_o(s)]^{-1} \beta_o(s) = \text{diag}[T_{0i}(s)]_{1 \leq i \leq n}, \quad (25)$$

$$\text{avec : } T_{0i}(s) = \frac{\beta_{0i}(s)}{1 + \beta_{0i}(s)} \quad \text{et} \quad S_{0i}(s) = \frac{1}{1 + \beta_{0i}(s)}. \quad (26)$$

Il est toutefois évident que pour les procédés reparamétrés, les matrices de transfert de la boucle fermée  $T(s)$  et  $S(s)$  ne restent pas diagonales. Leurs éléments diagonaux  $T_{ii}(s)$  et  $S_{ii}(s)$  peuvent néanmoins être interprétés comme étant les fonctions

de transfert en boucle fermée résultant d'une fonction de transfert en boucle ouverte équivalente  $\beta_i(s)$  :

$$\beta_i(s) = \frac{T_{ii}(s)}{1 - T_{ii}(s)} = \frac{1 - S_{ii}(s)}{S_{ii}(s)}. \quad (27)$$

Pour chaque élément de la matrice de transfert de la boucle ouverte nominale  $\beta_0(s)$ , de nombreux gabarits peuvent tangenter le contour d'isoamplitude associé à  $M_{r0i}$ . Le gabarit optimal est obtenu par optimisation des  $4n$  paramètres indépendants de la boucle ouverte nominale pour minimiser la fonction de coût

$$J = \sum_{i=1}^n \left( \max_{\omega} \sup_G |T_{ii}(j\omega)| - \min_{\omega} \sup_G |T_{ii}(j\omega)| \right)^2, \quad (28)$$

sous des contraintes définies par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \inf_G |T_{ij}(j\omega)| &\geq T_{ij_u}(\omega) \text{ et } \sup_G |T_{ij}(j\omega)| \leq T_{ij_u}(\omega), \\ \sup_G |S_{ij}(j\omega)| &\leq S_{ij_u}(\omega), \quad \sup_G |KS_{ij}(j\omega)| \leq KS_{ij_u}(\omega), \\ \sup_G |SG_{ij}(j\omega)| &\leq SG_{ij_u}(\omega), \end{aligned} \quad (29)$$

quels que soient  $\omega \in \mathbb{R}^+$ ,  $i, j \in G$ .

La méthode d'optimisation utilisée étant non linéaire (fmincon de Matlab), le problème est bien sûr non convexe. Cela rend d'autant plus intéressant l'utilisation de peu de paramètres de réglage de haut niveau (permise par l'utilisation des ordres fractionnaires) ayant chacun un effet particulier et relativement indépendant sur la forme des réponses fréquentielles des boucles ouvertes nominales (11) et équivalentes (27). Comme les fonctions de sensibilité nominale et reparamétrées, ces réponses fréquentielles en boucle ouverte peuvent être tracées afin d'effectuer un réglage rapide des paramètres à optimiser et en fixer ainsi des valeurs initiales correctes pour l'algorithme d'optimisation utilisé.

### III. SYNTHÈSE CRONE MIMO D'UNE COMMANDE DECENTRALISÉE

Pour des système MIMO carrés et présentant une dominance diagonale suffisante (estimée par un critère RGA), nous avons montré [10] que la mise en œuvre et la synthèse d'une commande CRONE MIMO peut être extrêmement simplifiée par le choix arbitraire d'un modèle diagonal du procédé nominal  $G_o(s)$ , choix conduisant à un régulateur diagonal dit aussi décentralisé. Le calcul de la matrice pseudo-inverse  $G_o^\dagger(s)$  nécessaire pour la synthèse CRONE MIMO pour les systèmes non carrés rend cette remarque encore plus intéressante. Pour ces systèmes non carrés, nous nous concentrerons ici sur les systèmes sur-actionnés (cas  $n > m$ ) pour lesquels on souhaite utiliser toutes les entrées de commande disponibles. Quand un sous-ensemble des entrées disponibles est utilisé pour commander chacune des sorties du système, on parle de commande par blocs. En effet, après un ordonnancement correct des différents signaux, la structure du régulateur est de type diagonal par blocs.

Parmi les outils d'analyse utilisés pour déterminer le bien fondé d'une approche décentralisée et effectuer le pairage entre les entrées et les sorties du système, l'analyse RGA

(Relative Gain Array [11]) utilisée pour les systèmes carrés ne peut plus l'être pour les systèmes non carrés. Alors que l'analyse NRG (Non-square Relative Gain [12]) qui est l'extension directe de l'analyse RGA s'adapte bien aux systèmes pour lesquels on a  $m > n$ , on préférera l'analyse BRG (Block Relative Gain [13, 14]) pour  $m < n$  afin de pouvoir utiliser toutes les entrées disponibles. L'analyse BRG est une méthode d'analyse similaire à la méthode RGA permettant d'analyser le couplage par bloc de la matrice de transfert du système.

Chaque élément  $\gamma_{Bij}(s)$  de la matrice BRG est défini comme le ratio du gain de boucle ouverte du bloc considéré par le gain apparent du même bloc lorsque toutes les autres boucles sont fermées. Il peut être calculé par le produit de Schur suivant :

$$[\Lambda_B(s)]_k = G_k(s) \times [G^\dagger(s)]_k, \quad (30)$$

avec :

- $G_k(s)$  la matrice de transfert du bloc  $k$  de taille  $m_k \times n_k$  qui relie  $m_k$  entrées à  $n_k$  sorties de  $G(s)$ ,
- $[G^\dagger(s)]_k$  la matrice de transfert du bloc de taille  $m_k \times n_k$  qui relie  $m_k$  entrées à  $n_k$  sorties de  $G^\dagger(s)$ .

Une analyse NRG faite sur l'ensemble des procédés  $G(s)$  peut tout d'abord permettre de simplifier le procédé  $G_o(s)$  en annulant tous les transferts  $g_{oij}(s)$  correspondant à des  $\gamma_{ij}$  proches de zéro, avec :

$$[\gamma_{ij}(s)] = G(s) \times G^\dagger(s)^T. \quad (31)$$

Cette analyse NRG peut aussi être utilisée pour orienter le choix des pairages à évaluer. En effet, contrairement aux approches RGA ou NRG, pour déterminer le pairage idéal, l'analyse BRG doit être faite pour un ensemble de pairages possibles. Des blocs diagonaux correspondant à une valeur  $\gamma_{Bij}$  proche de 1 correspondent à des groupes d'entrées et de sorties fortement couplées. Un tel résultat valide le pairage évalué et permet alors d'annuler les blocs non diagonaux de la nouvelle matrice de transfert nominale  $G_o'(s)$ . Le modèle nominal et diagonal par blocs  $G_o'(s)$  obtenu reflète alors le comportement et les phénomènes de couplage dominants du modèle complet  $G_o(s)$ . La plupart de ses termes "hors diagonale" étant nuls, une fois la matrice de transfert en boucle ouverte nominale optimisée, l'utilisation de la relation (5) conduit à un régulateur diagonal du même type, c'est-à-dire diagonal par blocs. En effet, la forme simplifiée du procédé nominal  $G_o'(s)$  permettant d'obtenir une matrice pseudo inverse  $G_o'^\dagger(s)$  elle aussi simplifiée, le régulateur est en partie décentralisé :

$$K(s) = G_o'^\dagger \beta_0(s) \quad (32)$$

Les fonctions de transfert en boucle ouverte nominales  $\beta_0(s)$  correspondantes à un bloc donné ne sont définies qu'à partir des caractéristiques des élément du bloc correspondant de  $G_0(s)$  : ordres basse et haute fréquence, zéros et pôles PRP, retard et modes propres peu amortis. L'utilisation du modèle nominal simplifié  $G_o'(s)$  facilite bien évidemment aussi la détermination de ces caractéristiques.

Bien que le procédé nominal soit choisi diagonal par bloc, les paramètres de tous les termes  $\beta_0(s)$  sont optimisés simultanément conformément au paragraphe II.F. Les couplages négligées dans le modèle nominal sont alors

pleinement pris en compte dans le calcul des fonctions de sensibilités reparamétrées  $T(s)$ ,  $S(s)$ ,  $S_i(s)$  et  $S_u(s)$  ou des fonctions de transfert en boucle ouverte équivalentes (27).

#### IV. APPLICATION

La méthodologie présentée dans cet article est appliquée à commande d'une cuve de mélange [5, 15] comportant deux sorties et trois entrées. Les sorties sont la hauteur  $h(t)$  et concentration  $c(t)$  du mélange contenu par la cuve. Les entrées sont les débits des trois vannes  $F_1, F_2, F_3$  (figure 3).

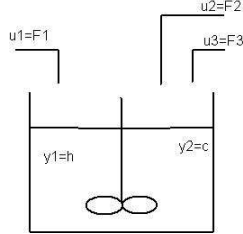


Figure 3: Schéma de la cuve de mélange

Les incertitudes de modèle des systèmes chimiques étant souvent introduites par des retards purs sur les entrées, le système est modélisé par l'équation suivante :

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (33)$$

avec

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_1 s} & \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_2 s} & \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_3 s} \\ \frac{3}{10s+1} e^{-\theta_1 s} & \frac{-3}{10s+1} e^{-\theta_2 s} & \frac{5}{10s+1} e^{-\theta_3 s} \end{bmatrix} \quad (34)$$

et où  $0 \leq \theta_1 \leq 2, 0 \leq \theta_2 \leq 1, 0 \leq \theta_3 \leq 0.5$ .

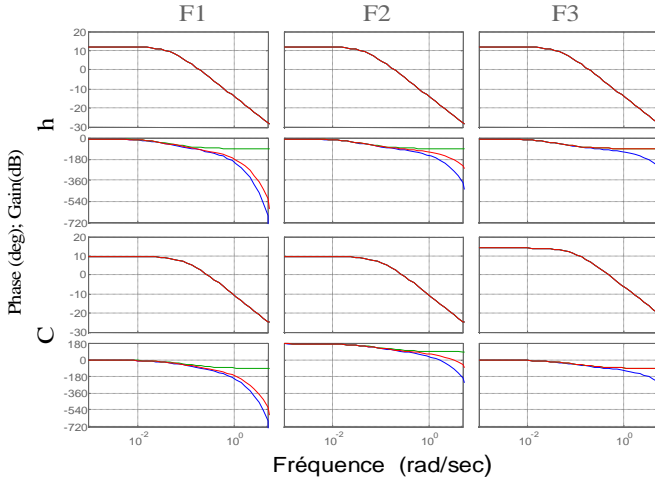


Figure 4: Diagramme de Bode du procédé nominal (-) puis reparamétrisé :  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$  (-) et  $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = 0.5, \theta_3 = 0$  (-)

Que les éléments de  $G$  soient tous du premier ordre avec des constantes de temps communes n'apporte aucune propriété utile à notre approche. Nous choisirons comme procédé nominal celui pour lequel  $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$  et  $\theta_3 = 0.5$ .

La figure 4 présente la réponse fréquentielle du procédé nominal et des procédés reparamétrisés. L'analyse de cette matrice de transfert indique que :

- les trois débits agissent de manière identique sur la hauteur,
- les trois débits ont la même dynamique sur la concentration, cependant il est évident que l'entrée

$F_3$  aura une action plus importante sur la valeur statique de la concentration.

Une analyse BRG du procédé avec un pairage (1-2,1) et (3,2) confirme le couplage de la sortie  $h$  avec les entrées  $F_1$  et  $F_2$  et la deuxième sortie  $c$  avec l'entrée  $F_3$  (figure 5).

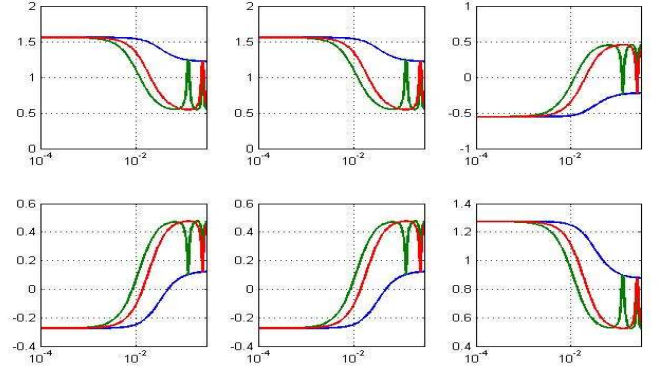


Figure 5 : Analyse BRG du système  $G(s)$

Le procédé nominal utilisé pour pré-paramétriser la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire est alors :

$$G'_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_1 s} & \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_2 s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{10s+1} e^{-\theta_3 s} \end{bmatrix} \quad (35)$$

La matrice pseudo-inverse de la matrice de transfert nominale est définie par :

$$G'^0_{\dagger}(s) = \begin{bmatrix} \frac{20s+1}{8} e^{\theta_1 s} & 0 \\ \frac{20s+1}{8} e^{\theta_2 s} & 0 \\ 0 & \frac{10s+1}{5} e^{\theta_3 s} \end{bmatrix} \cdot \quad (36)$$

La méthodologie proposée est alors appliquée. La matrice  $Q(s)$  ne comporte pas de retard, on obtient :

- $\alpha_{q1} = 0$ ,
- $\tau(G^H_0 [Q^{ji}(s)]_{11}) = -\theta_1 = -2$
- $\tau(G^H_0 [Q^{ji}(s)]_{21}) = -\theta_2 = -1$
- $\tau(G^H_0 [Q^{ji}(s)]_{32}) = -\theta_3 = -0.5$ .

Les plus petits retards purs des 2 colonnes de la matrice  $G^H_0(s)(Q^{ji}(s))^T$  sont donc :

$$\tau_1 = -2 \text{ et } \tau_2 = -0.5$$

Finalement, les retards à intégrer à  $\beta_{01}(s)$  et  $\beta_{02}(s)$  sont :

$$\tau(\beta_{01}) \geq \alpha_{q1} - \tau_1 = 2 \text{ et } \tau(\beta_{02}) \geq \alpha_{q1} - \tau_2 = 0.5.$$

Pour tous les états paramétriques, les spécifications suivantes doivent être satisfaites :

- erreur en régime permanent nulle pour les deux sorties,
- un temps de montée le plus petit possible,
- robustesse vis à vis des perturbations et des variations paramétriques.

En considérant ces spécifications, certains paramètres de la matrice de boucle ouverte fractionnaire peuvent être initialisés. Ainsi, le degré relatif maximum de la matrice  $G'^0_{\dagger}$  étant de 1,  $n_h$  doit être plus grand ou égal à 2 pour les deux

transfert en boucle ouverte. Une erreur nulle en régime permanent nécessite un ordre  $n_1$  égal à 1.

L'optimisation simultanée des paramètres de  $\beta_{01}(s)$  et de  $\beta_{02}(s)$  conduit à :  $\omega_{r1} = 0.25\text{rad/s}$ ,  $\omega_{h1} = 0.03\text{rad/s}$ ,  $\omega_{h1} = 31\text{rad/s}$ ,  $\|\beta_{01}(j\omega)\|_{\omega=\omega_{r1}} = 0\text{dB}$ ,  $a_1 = 0.95$ ,  $b_1 = 0.13$  et  $\omega_{r2} = 0.25\text{rad/s}$ ,  $\omega_{h2} = 0.025\text{rad/s}$ ,  $\omega_{h2} = 1.7\text{rad/s}$ ,  $\|\beta_{02}(j\omega)\|_{\omega=\omega_{r2}} = 2\text{dB}$ ,  $a_2 = 1.10$ ,  $b_2 = -0.44$ .

La figure 6 présente le tracé des boucles ouvertes nominales optimisées et des boucles ouvertes équivalentes correspondantes.

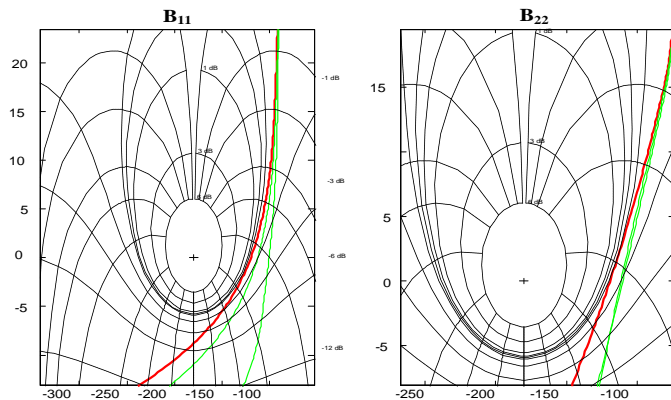


Figure 6 : Boucles ouvertes fractionnaires nominales (—) et boucles ouvertes équivalentes (---)

Le régulateur finalement déterminé par identification fréquentielle à partir de (32) est évalué temporellement :

- par la réponse à des entrées de référence du système bouclé de type échelon appliquées aux temps  $t=10\text{s}$  pour  $h_{\text{ref}}=70$  et  $t=50\text{s}$  pour  $c_{\text{ref}}=50$ ,
- pour des retards variant dans les intervalles définis par la relation (34).

La figure 7 présente les résultats obtenus en simulation par une loi de commande IMC proposée par Loh and Chiu [15] et par des lois de commande CRONE centralisée [5] et décentralisée par blocs. En plus de l'état paramétrique nominal, deux autres états sont ici considérés : pour le premier état paramétrique,  $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0.5$  ; pour le second  $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$ . Toutes les spécifications sont satisfaites. On peut cependant remarquer que la loi de commande décentralisée est évidemment moins découplante que la loi de commande CRONE centralisée qui, pour l'état nominal, contre les effets de couplage. Malgré tout, ses performances restent supérieures aux performances de la loi de commande IMC en terme de rapidité de suivi de consigne et de rejet de perturbation.

## V. CONCLUSION

Cet article a tout d'abord rappelé la méthodologie CRONE pour la synthèse MIMO de régulateurs robustes, notamment pour des systèmes non carrés. Nous avons ensuite montré comment cette approche pouvait être simplifiée pour la synthèse de régulateurs décentralisés par blocs. Si cette proposition est fondée sur une synthèse MIMO, le procédé nominal (et uniquement lui) est arbitrairement choisi diagonal par blocs à l'aide d'une analyse BRG. Un système chimique

(de dimension  $2 \times 3$ ) de la littérature a été utilisé pour appliquer la méthodologie proposée. Conformément aux attentes, les résultats obtenus s'avèrent aussi supérieurs à ceux d'une loi de commande synthétisée par une approche IMC.

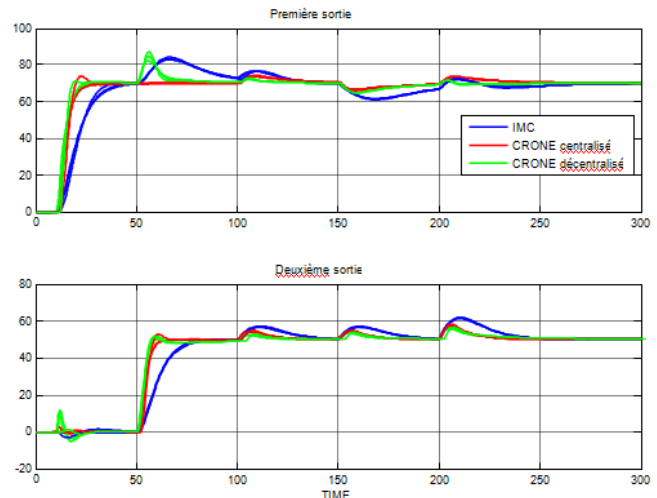


Figure 7 : Performances du bouclage pour différents états paramétriques : (—) régulateur IMC, (---) régulateur CRONE centralisé et (—) régulateur CRONE décentralisé

## VI. REFERENCES

- [1] A. Oustaloup, B. Mathieu and P. Lanusse, The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission, *European Journal of Control*, Vol. 1 n°2, 1995.
- [2] I.D. Landau, D. Rey, A. Karimi, A. Voda and A. Franco, A flexible transmission system as a benchmark for digital control, *European Journal of Control*, Vol. 1 n°2, 1995.
- [3] P. Lanusse, A. Oustaloup and D. Sutter, Multi-scalar CRONE control of multivariable plants; *Proc. WAC'96-ISIAC Symposia*, Montpellier, France, 1996.
- [4] A. Oustaloup et B. Mathieu - La commande CRONE : du scalaire au multivariable - *Editions Hermès*, Paris, 1999.
- [5] D. Nelson Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup : Commande robuste de systèmes multi-entrées multi-sorties non-carrés retardés - Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2008) - Bucarest, Roumanie, 3-5 Septembre, 2008.
- [6] A.I.G. Vardulakis, Decoupling of linear multivariable systems by unity output feedback compensation, *International Journal of Control*, vol. 50, 1989.
- [7] F.A. Graybill, Introduction to matrices with applications in statistics, Wadsworth, 1969
- [8] D. Nelson Gruel, Extension de la commande CRONE multivariable aux systèmes non carrés : Application à un système d'air de moteurs essence et diesel, Thèse de Doctorat l'Université de Bordeaux, à soutenir 10/10/2009.
- [9] P. Lanusse - De la commande CRONE de première génération à la commande CRONE de troisième génération, Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, (1994)
- [10] - P. Lanusse, D. Nelson Gruel, J. Sabatier, R. Lasnier et A. Oustaloup - Synthèse multivariable d'une commande CRONE décentralisée - Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2008) - Bucarest, Roumanie, 3-5 Septembre, 2008.
- [11] E.H. Bristol, On a new measure of interactions for multivariable process control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 11, pp. 133-134, 1966.
- [12] J.W. Chang and C.C. Yu, The relative gain for non-square multivariable systems, *Chemical Enymeering Science*, Vol. 45, No. 5, pp. 1309-1323, 1990.
- [13] V. Manousiouthakis, R. Savage and Y. Arkun, Synthesis of decentralized process control structures using the concept of block relative gain, *AIChE journal*, vol. 32, no6, pp. 991-1003, 1986
- [14] Y. Arkun, Dynamic block relative gain and its connection with the performance and stability of decentralized control structures, *International Journal of Control*, vol. 46, n°4, pp. 1187-1193, 1987.
- [15] E.J. Loh et M.S. Chiu, Robust decentralized control of nonsquare systems, *Chemical Engineering Communication*, 158, 1997.