

# Identification d'un Système Multivariables utilisant les fonctions de la Base Orthogonale Généralisée

Jalel GHABI<sup>1</sup>, Ali DOUIK<sup>1</sup>, Hassani MESSAOUD<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Automatique, Traitement de Signal et Imagerie  
Département de Génie Electrique

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, Rue Ibn El Jazzar, 5019 Monastir Tunisie  
*jalel.ghabi@yahoo.fr, Ali.douik@enim.rnu.tn, hassani.messaoud@enim.rnu.tn*

**Résumé**— Ce papier considère la construction d'une méthode générale pour la modélisation et l'identification d'un système LTI multivariables en utilisant les fonctions de la base orthogonale généralisée. Dans ce cas une reformulation de la représentation d'état des fonctions de la base est proposée et une nouvelle méthode d'optimisation des pôles est développée. Ainsi, dans le but de la synthèse d'une commande robuste, l'ensemble des coefficients de Fourier est un ellipsoïde mis à jour par les approches à erreur inconnue mais bornée.

**Mots-clés**— Modélisation, Identification, Multivariables, Base Orthogonale Généralisée, Optimisation, UBBE.

## I. INTRODUCTION

Les principales bases de fonctions orthogonales connues dans la littérature sont la base FIR (Finite Impulse Response), la base de Laguerre, la base de Kautz et la base orthogonale généralisée (BOG). Toutes ces bases permettent de représenter un système par un modèle défini par une combinaison linéaire des fonctions de la base. Cependant selon la nature du système considéré le nombre de fonctions qui définissent la base change d'une base à une autre. Pour la base FIR, ce nombre doit être élevé pour mieux représenter le comportement réel du système [1]. Quant à la base de Laguerre, celui-ci peut accomplir les mêmes tâches avec un nombre de fonctions réduit si les dynamiques du système sont réelles est rapprochées [2], [3]. De même pour la base de Kautz lorsque le système considéré est oscillant [4], [5]. Pour pouvoir étudier des systèmes qui regroupent des dynamiques de différentes natures, il serait raisonnable d'adopter les bases orthogonales généralisées [6], [7]. Toutefois, l'ordre de troncature et par suite la complexité du modèle dépend du choix des pôles de la base et l'ordre le plus réduit correspond aux valeurs optimales de ces pôles. Ainsi, une étape d'optimisation des pôles est impérative.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour la modélisation et l'identification des systèmes multivariables [8], [9], [10]. Dans ces méthodes, soit on dispose d'une connaissance a priori du système à identifier, afin de permettre un choix adéquat des pôles, soit on optimise l'erreur quadratique directement par rapport à ces pôles. Pour surmonter ces difficultés nous proposons des modèles BOG pour des systèmes multivariables à sorties couplées en appliquons une nouvelle technique d'optimisation des pôles des fonctions de la BOG utilisant la reformulation de la représentation d'état et la nouvelle modélisation. Lorsque l'ordre de troncature est défini on procède à l'estimation des paramètres du modèle BOG qui sont les coefficients de Fourier. Comme on vise à synthétiser une commande ro-

buste, on est amené à déterminer le domaine d'incertitude paramétriques de ces coefficients en adoptant l'approche de l'erreur inconnue mais bornée (UBBE). Contrairement à l'approche d'identification classique, basée sur les moindres carrées, qui aboutit à la détermination d'un seul vecteur de paramètres, l'approche UBBE résulte en un ensemble de vecteurs tous compatibles avec les mesures, la structure du modèle et les bornes de l'erreur. Cet ensemble appelé ensemble d'appartenance des paramètres, est un polyèdre convexe dont sa mise à jour peut être accompagnée d'une complexité croissante. Pour surmonter cette complexité, on met à jour une approximation de ce polyèdre par des formes géométriques simples telles que l'ellipsoïde [11], [12], l'orthotope [13] ou le polytope à complexité limitée [14].

Le reste de ce papier est organisé comme suit : dans le deuxième paragraphe la formulation du problème de modélisation d'un système multivariables et la reformulation de la représentation d'état de la BOG sont présentées. Les nouvelles structures de modèles BOG pour le système multivariables considéré sont développées dans le troisième paragraphe. Le quatrième paragraphe détaille la technique d'optimisation des pôles et donne un aperçu sur le concept de la méthode UBBE utilisée pour la mise à jour du domaine d'appartenance des coefficients de Fourier. Les résultats de simulation de cette méthode de modélisation et d'identification sont exposés dans le cinquième paragraphe. Enfin, les remarques et les perspectives de ce travail sont énoncés dans le dernier paragraphe.

## II. FORMULATION DU PROBLÈME

On considère un système multi-entrées multi-sorties discret, LTI et causal ayant  $n$  séquences d'entrées  $\{u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)\}$  et  $m$  séquences de sorties  $\{y_1(k), y_2(k), \dots, y_m(k)\}$ .

Chaque sortie  $y_i(k)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) du système peut être écrite en fonction des entrées et des autres sorties comme suite :

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^n G_{ij}(q^{-1}) u_j(k) + \sum_{j=1}^m H_{ij}(q^{-1}) y_j(k) \quad (1)$$

où  $\{G_{ij}(q^{-1})\}$  et  $\{H_{ij}(q^{-1})\}$  sont les fonctions de transfert élémentaires décrivant les dynamiques du système supposé inconnues et stables.

À chaque sortie  $y_i(k)$  du système est ajouté une séquence de bruit  $\{v_i(k)\}$  stationnaire, stochastique, de moyenne nulle et de variance supposée connue.

Et adoptant la notation vectorielle suivante :

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_{n+m}(k) \end{bmatrix}, \quad y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$v(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ \vdots \\ v_m(k) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$G(q^{-1}) = \begin{bmatrix} G_{11}(q^{-1}) & \cdots & G_{1n}(q^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(q^{-1}) & \cdots & G_{mn}(q^{-1}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$H(q^{-1}) = \begin{bmatrix} H_{11}(q^{-1}) & \cdots & H_{1m}(q^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(q^{-1}) & \cdots & H_{mm}(q^{-1}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

où  $u_{n+i} = y_i \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

Ainsi, (1) peut s'écrire [16] :

$$y(k) = [G(q^{-1}) \ H(q^{-1})] u(k) + v(k) \quad (6)$$

Toute fonction de transfert élémentaire  $F_{ij}(z)$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n+m$ ) peut être décomposée dans la base BOG par une série tronquée de la forme :

$$F_{ij}(z) = \sum_{\ell=0}^{N_{i,j}} g_{i,j}^{\ell} \mathcal{B}_{i,j}^{\ell}(z, \underline{\xi}_{i,j}) \quad (7)$$

avec :

$\underline{\xi}_{i,j}$  représente le vecteur des pôles de dimension  $(1 + N_{i,j})$  de la décomposition de  $F_{ij}(z)$  dans la base BOG et  $N_{i,j}$  est l'ordre de troncature.

$\{\mathcal{B}_{i,j}^{\ell}(z, \underline{\xi}_{i,j})\}_{\ell=0}^{N_{i,j}}$  représente l'ensemble des fonctions de la BOG générées par [6] :

$$\mathcal{B}_{i,j}^{\ell}(z) = \frac{\sqrt{1 - |\xi_{i,j}^{\ell}|^2}}{z - \xi_{i,j}^{\ell}} \prod_{k=0}^{\ell-1} \left( \frac{1 - \bar{\xi}_{i,j}^k z}{z - \xi_{i,j}^k} \right) \quad (8)$$

où  $\xi_{i,j}^k$  est le pôle associé à  $\mathcal{B}_{i,j}^k(z)$  et  $\bar{\xi}_{i,j}^k$  son conjugué.

L'équation d'état associé peut s'écrire [10], [16] :

$$\begin{cases} X_{i,j}(k+1) = A_{i,j} X_{i,j}(k) + B_{i,j} u_j(k) \\ \hat{y}_{i,j}(k) = \theta_{i,j}^T X_{i,j}(k) \end{cases} \quad (9)$$

où  $X_{i,j}$  est le vecteur d'état du réseau des fonctions de la BOG, de dimension  $(1 + N_{i,j})$  et défini par :

$$X_{i,j}(k) = [x_{i,j}^0(k) \ x_{i,j}^1(k) \ \cdots \ x_{i,j}^{N_{i,j}}(k)]^T \quad (10)$$

La matrice d'état  $A_{i,j}$  de dimension  $(1 + N_{i,j}) \times (1 + N_{i,j})$  et le vecteur de commande  $B_{i,j}$  de dimension  $(1 + N_{i,j})$  sont donnés par :

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{i,j}^{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i,j}^{2,1} & a_{i,j}^{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{i,j}^{N_{i,j}+1,1} & a_{i,j}^{N_{i,j}+1,2} & \cdots & a_{i,j}^{N_{i,j}+1,N_{i,j}+1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B_{i,j} = \begin{bmatrix} b_{i,j}^1 \\ b_{i,j}^2 \\ \vdots \\ b_{i,j}^{N_{i,j}+1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Le vecteur des coefficients de Fourier  $\theta_{i,j}$  de dimension  $(1 + N_{i,j})$  est donné par :

$$\theta_{i,j} = [g_{i,j}^0 \ g_{i,j}^1 \ \cdots \ g_{i,j}^{N_{i,j}}]^T \quad (13)$$

Avec :

$$a_{i,j}^{p,q} = \begin{cases} \xi_{i,j}^{p-1} & (p = q) \\ \alpha_{i,j}^q (1 - \xi_{i,j}^{q-1} \bar{\xi}_{i,j}^{q-1}) & (p = q + 1) \\ \bar{a}_{i,j}^{p,q} & (p > q + 1) \\ 0 & (p < q) \end{cases} \quad (14)$$

$$\bar{a}_{i,j}^{p,q} = (-1)^{p+q+1} \alpha_{i,j}^{p-1} (1 - \xi_{i,j}^{q-1} \bar{\xi}_{i,j}^{q-1}) \prod_{\ell=q+1}^{p-1} \alpha_{i,j}^{\ell-1} \bar{\xi}_{i,j}^{\ell-1} \quad (15)$$

$$b_{i,j}^q = \begin{cases} \alpha_{i,j}^0 & (q = 1) \\ (-1)^{q+1} \alpha_{i,j}^{q-1} \prod_{\ell=1}^{q-1} \alpha_{i,j}^{\ell-1} \bar{\xi}_{i,j}^{\ell-1} & (q > 1) \end{cases} \quad (16)$$

où :

$$\alpha_{i,j}^{\ell} = \sqrt{\frac{1 - |\xi_{i,j}^{\ell}|^2}{1 - |\xi_{i,j}^{\ell-1}|^2}}, \quad (\ell > 0) \text{ et } \alpha_{i,j}^0 = \sqrt{1 - |\xi_{i,j}^0|^2}$$

### III. MODÉLISATION DES SYSTÈMES MULTIVARIABLES

#### A. Modèle BOG du $i^{\text{ème}}$ sous-système MISO

En partant des équations (1) et (7), la sortie du modèle BOG du  $i^{\text{ème}}$  sous-système peut s'écrire :

$$\hat{y}_i(k) = \sum_{j=1}^{n+m} \sum_{\ell=0}^{N_{i,j}} g_{i,j}^{\ell} \mathcal{B}_{i,j}^{\ell}(z, \underline{\xi}_{i,j}) u_j(k) \quad (17)$$

Soit encore sous la forme vectorielle suivante :

$$\hat{y}_i(k) = [\theta_{i,1}^T \ \cdots \ \theta_{i,n+m}^T] \begin{bmatrix} X_{i,1} \\ \vdots \\ X_{i,n+m} \end{bmatrix} = \theta_i^T X_i(k) \quad (18)$$

Ainsi, un modèle BOG du  $i^{\text{ème}}$  sous-système MISO peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} X_i(k+1) = A_i X_i(k) + B_i u(k) \\ \hat{y}_i(k) = \theta_i^T X_i(k) \end{cases} \quad (19)$$

avec :

$X_i$  est le vecteur d'état de dimension  $N_i$  :

$$X_i(k) = \begin{bmatrix} X_{i,1}(k) \\ \vdots \\ X_{i,n+m}(k) \end{bmatrix} = [X_{i,1}^T \ \cdots \ X_{i,n+m}^T]^T \quad (20)$$

où  $X_{i,j}$  est le vecteur d'état de dimension  $(1 + N_{i,j})$  donné par (10).

$A_i$  et  $B_i$  sont deux matrices de dimension  $(N_i \times N_i)$  et  $N_i \times (n+m)$  respectivement :

$$A_i = \text{diag}(A_{i,1}, \dots, A_{i,n+m}) \quad (21)$$

$$B_i = \text{diag}(B_{i,1}, \dots, B_{i,n+m}) \quad (22)$$

$\theta_i$  est le vecteur des coefficients de Fourier de dimension  $N_i$ , défini par :

$$\theta_i = [\theta_{i,1}^T, \dots, \theta_{i,n+m}^T]^T \quad (23)$$

où  $N_i$  est l'ordre du modèle BOG du  $i^{\text{ème}}$  sous-système défini par :

$$N_i = \sum_{j=1}^{n+m} (1 + N_{i,j}) \quad (24)$$

### B. Modèle BOG d'un système MIMO

Définissons le vecteur d'état de dimension  $N$  suivant :

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ \vdots \\ X_m(k) \end{bmatrix} \quad (25)$$

où  $N$  est l'ordre du modèle BOG du système MIMO donné par :

$$N = \sum_{i=1}^m N_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+m} (N_{i,j} + 1) \quad (26)$$

La représentation d'état du modèle BOG du système MIMO peut s'écrire comme suite :

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \\ \hat{y}(k) = \Theta X(k) \end{cases} \quad (27)$$

avec :

$A$  et  $B$  sont deux matrices de dimension respectives  $(N \times N)$  et  $N \times (n+m)$ , données par :

$$A = \text{diag}(A_1, A_2 \dots, A_m) \quad (28)$$

$$B = [B_1^T \ B_2^T \ \dots \ B_m^T]^T \quad (29)$$

$\Theta$  est la matrice de paramètres de dimension  $(m \times N)$ , donnée par :

$$\Theta = \text{diag}(\theta_1^T, \theta_2^T \dots, \theta_m^T) \quad (30)$$

où  $X_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\theta_i$  et  $N_i$  sont donnés par (20)-(24).

## IV. ESTIMATION DES PARAMÈTRES

### A. Optimisation des pôles de la BOG

On adopte le critère quadratique qui dépend des pôles du modèle BOG et il est donné pour un horizon de données  $H$  par :

$$J_i(\underline{\xi}_i) = \sum_{k=1}^H [y_i(k) - \hat{y}_i(k)]^2 = \sum_{k=1}^H [e_i(k)]^2 \quad (31)$$

où  $e_i(k)$  est l'erreur de prédiction ou résidu d'estimation.

Soit en écriture matricielle :

$$J_i(\underline{\xi}_i) = E_i^T E_i \quad (32)$$

avec  $E_i = [e_i(1) \ e_i(2) \ \dots \ e_i(H)]^T$ .

Compte tenu de (18), le critère quadratique dans le cas d'un système MISO s'écrit :

$$J_i(\underline{\xi}_i) = \sum_{k=1}^H \left( y_i(k) - \sum_{j=1}^{n+m} \sum_{\ell=0}^{N_{i,j}} g_{i,j}^{\ell} x_{i,j}^{\ell}(k) \right)^2 \quad (33)$$

avec  $x_{i,j}^{\ell}(k) = \mathcal{B}_{i,j}^{\ell}(k, \underline{\xi}_{i,j}) u_j(k)$ .

Sa formulation matricielle est :

$$J_i(\underline{\xi}_i) = E_i^T E_i = (Y_i - \Psi_i \theta_i)^T (Y_i - \Psi_i \theta_i) \quad (34)$$

avec :

$$\Psi_i = [\Psi_{i,1} \ \Psi_{i,2} \ \dots \ \Psi_{i,n+m}] \in \mathbb{R}^{H \times (n+m)(1+N_{i,j})} \quad (35)$$

$$\Psi_{i,j} = [\Psi_{i,j}^0 \ \Psi_{i,j}^1 \ \dots \ \Psi_{i,j}^{N_{i,j}}] \in \mathbb{R}^{H \times (1+N_{i,j})} \quad (36)$$

$$\Psi_{i,j}^{\ell} = [x_{i,j}^{\ell}(1) \ x_{i,j}^{\ell}(2) \ \dots \ x_{i,j}^{\ell}(H)]^T \in \mathbb{R}^H \quad (37)$$

$$x_{i,j}^{\ell}(z) = \frac{\sqrt{1 - |\xi_{i,j}^{\ell}|^2}}{z - \xi_{i,j}^{\ell}} \prod_{k=0}^{\ell-1} \left( \frac{1 - \xi_{i,j}^{k-1} z}{z - \xi_{i,j}^k} \right) u_j(z) \quad (38)$$

$$Y_i = [y_i(1) \ y_i(2) \ \dots \ y_i(H)]^T \quad (39)$$

Pour calculer les pôles de la BOG, on minimise le critère quadratique (34) puisqu'il s'exprime de façon non linéaire par rapport à ces pôles. Les coefficients de Fourier seront déterminés par le centre de l'ellipsoïde actualisé en utilisant l'approche UBBE.

La méthode d'optimisation des pôles proposée utilise un algorithme de type Gauss-Newton, caractérisé par des pas adaptatifs en fonction de l'emplacement des pôles à chaque itération. Il est basé sur le développement à l'ordre deux du critère  $J_i(\underline{\xi}_i)$ , supposé différentiable.

Le vecteur des pôles à l'itération  $(t+1)$  s'écrit en fonction du vecteur des pôles à l'itération  $(t)$  comme suit :

$$\hat{\underline{\xi}}_i^{(t+1)} = \hat{\underline{\xi}}_i^{(t)} - \Delta_i \left( \frac{\partial^2 J_i(\underline{\xi}_i)}{\partial \underline{\xi}_i^T \partial \underline{\xi}_i} \right)^{-1} \bigg|_{\underline{\xi}_i = \hat{\underline{\xi}}_i^{(t)}} \frac{\partial J_i(\underline{\xi}_i)}{\partial \underline{\xi}_i^T} \bigg|_{\underline{\xi}_i = \hat{\underline{\xi}}_i^{(t)}} \quad (40)$$

où  $\hat{\underline{\xi}}_i$  est le vecteur des pôles de dimension  $N_i$  du modèle BOG pour un système MISO.

$\Delta_i$  est une matrice diagonale de dimension  $(N_i \times N_i)$  regroupant les pas adaptatifs de l'algorithme de Newton.

La matrice  $\Delta_i$  à pour rôle d'atténuer ou d'amplifier l'effet de l'inverse du Hessien  $\left( \frac{\partial^2 J_i(\underline{\xi}_i)}{\partial \underline{\xi}_i^T \partial \underline{\xi}_i} \right)^{-1}$ . Un choix convenable des éléments de cette matrice conduit au minimum de l'erreur quadratique en un nombre réduit d'itérations.

Définissons le gradient  $P_i(\underline{\xi}_i)$  et le Hessien approché  $Q_i(\underline{\xi}_i)$  :

$$P_i(\underline{\xi}_i) = \frac{\partial J_i(\underline{\xi}_i)}{\partial \underline{\xi}_i} = 2 \frac{\partial E_i^T}{\partial \underline{\xi}_i} E_i = 2R_i(\underline{\xi}_i) E_i \quad (41)$$

$$Q_i(\underline{\xi}_i) = \frac{\partial^2 J_i(\underline{\xi}_i)}{\partial \underline{\xi}_i^T \partial \underline{\xi}_i} \approx 2 \frac{\partial E_i^T}{\partial \underline{\xi}_i} \frac{\partial E_i}{\partial \underline{\xi}_i^T} = 2R_i(\underline{\xi}_i) R_i(\underline{\xi}_i)^T \quad (42)$$

où :

$$R_i(\underline{\xi}_i) = \frac{\partial E_i^T}{\partial \underline{\xi}_i} = -\theta_i^T \frac{\partial \Psi_i^T}{\partial \underline{\xi}_i} \quad (43)$$

La détermination du vecteur des pôles optimaux nécessite le calcul du gradient  $P_i(\underline{\xi}_i)$  et du Hessien approché  $Q_i(\underline{\xi}_i)$  dans (40). Cependant, il est nécessaire de déterminer les sensibilités de toutes les sorties des filtres par rapport à tous les pôles.

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}^\ell} = \left[ \frac{\partial \Psi_{i,j}^0}{\partial \xi_{i,j}^\ell} \quad \frac{\partial \Psi_{i,j}^1}{\partial \xi_{i,j}^\ell} \quad \dots \quad \frac{\partial \Psi_{i,j}^{N_{i,j}}}{\partial \xi_{i,j}^\ell} \right]; (\ell = 0, 1, \dots, N_{i,j}) \quad (44)$$

où  $\Psi_{i,j}$  et  $\Psi_{i,j}^\ell$  sont données par (36) et (37) respectivement.

La solution adoptée pour calculer les sensibilités des sorties des filtres de la BOG, consiste à déterminer les gradients de la représentation d'état (9).

Ainsi, en dérivant la première équation du système (9) par rapport aux pôles, on obtient :

$$\frac{\partial X_{i,j}(k+1)}{\partial \xi_{i,j}^s} = A_{i,j} \frac{\partial X_{i,j}(k)}{\partial \xi_{i,j}^s} + \frac{\partial A_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}^s} X_{i,j}(k) + \frac{\partial B_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}^s} u_j(k) \quad (45)$$

En posant :

$$Z_{i,j}(k) = \frac{\partial X_{i,j}(k)}{\partial \xi_{i,j}^s}, \quad F_{i,j} = \frac{\partial A_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}^s}, \quad D_j = \frac{\partial B_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}^s} \quad (46)$$

L'équation (45) devient :

$$Z_{i,j}(k+1) = A_{i,j} Z_{i,j}(k) + F_{i,j} X_{i,j}(k) + D_{i,j} u_j(k) \quad (47)$$

Les éléments de la matrice  $F_{i,j}$  et du vecteur  $D_{i,j}$  de dimension  $(N_{i,j} + 1)$  sont donnés dans [15], [16].

L'algorithme d'optimisation des pôles de la BOG pour le  $i^{\text{ème}}$  sous-système MISO peut se résumer comme suit :

- acquisition des signaux d'entrées sorties,
- fixer l'ordre de troncature du modèle BOG,
- initialiser le vecteur des pôles à zéro,
- initialiser la matrice de pondération.

Déterminer à chaque itération :

- les sensibilités des filtres en utilisant (47),
- le gradient  $P_i$  et le Hessien approché  $Q_i$  en utilisant (41) et (42),
- le vecteur des coefficients de Fourier en appliquant l'approche ellipsoïdale,
- le vecteur des pôles optimaux en appliquant (40).

### B. Mise à jour de l'ensemble d'appartenance du système MISO

Le modèle du  $i^{\text{ème}}$  sous-système MISO mis sous sa forme linéaire peut s'écrire :

$$y_i(k) = \theta_i^T X_i(k) + e_i(k) \quad (48)$$

avec  $X_i(k)$  et  $\theta_i$  représentent les vecteurs d'état et de paramètres du  $i^{\text{ème}}$  sous-système ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

$e_i(k)$  est l'erreur sur le signal de sortie  $y_i(k)$ . Cette erreur est supposée être inconnue mais bornée et de borne connue  $\delta_i(k)$ .

$$|e_i(k)| \leq \delta_i(k) \quad (49)$$

On procède à l'identification du vecteur  $\theta_i$ , en déterminant l'ensemble d'appartenance des coefficients du modèle BOG pour chaque sous-système MISO.

D'après (48) et (49) on peut écrire :

$$y_i(k) - \delta_i(k) \leq \theta_i^T X_i(k) \leq y_i(k) + \delta_i(k) \quad (50)$$

Cette relation génère à chaque instant  $k$  deux hyperplans  $H_{k1}$  et  $H_{k2}$  dans l'espace paramétrique du vecteur  $\theta_i$ . Ces deux hyperplans sont orthogonaux au vecteur d'état  $X_i(k)$  et sont définis par :

$$H_{k1} = \{\theta_i / \theta_i^T X_i(k) = y_i(k) + \delta_i(k)\} \quad (51)$$

$$H_{k2} = \{\theta_i / \theta_i^T X_i(k) = y_i(k) - \delta_i(k)\} \quad (52)$$

Chaque hyperplan  $H_{kj}$  ( $j = 1, 2$ ) engendre un demi-espace fermé négatif  $H_{kj}^-$  ( $j = 1, 2$ ) et un demi-espace fermé positif  $H_{kj}^+$  ( $j = 1, 2$ ). Le vecteur de paramètres  $\theta_i$  satisfaisant la double inégalité (50) appartient au domaine défini par l'intersection des demi-espaces fermé positifs  $H_{k1}^+$  et  $H_{k2}^+$  engendrés par les hyperplans  $H_{k1}$  et  $H_{k2}$  respectivement :

$$H_k^+ = H_{k1}^+ \cap H_{k2}^+ \quad (53)$$

L'ensemble d'appartenance du vecteur  $\theta_i$ ,  $S_H$ , obtenu suite à l'acquisition de  $H$  mesures, doit donc satisfaire toute les contraintes associées à ces mesures, soit :

$$S_H = \bigcap_{k=1}^H H_{k1}^+ \cap H_{k2}^+ \quad (54)$$

où encore :

$$S_H = \left\{ \begin{array}{l} \theta_i / y_i(k) - \delta_i(k) \leq \theta_i^T X_i(k) \leq y_i(k) + \delta_i(k) \\ k = 1, \dots, H \end{array} \right\} \quad (55)$$

De cette façon l'approche UBBE consiste à déterminer à chaque instant d'échantillonnage  $k$ , le plus petit ensemble de paramètres  $S_H \subset \mathbb{R}^{N_i}$  consistant avec les mesures, la structure du modèle et les bornes de l'erreur. Notons que la complexité de la forme géométrique de ce domaine d'incertitude paramétrique  $S_H$ , augmente avec le nombre de mesures et le nombre de paramètres à estimer. Pour surmonter cette complexité, on peut approcher cet ensemble exact  $S_H$  par une région sous optimale  $M_H$  de forme plus simple. On s'intéresse dans ce travail au domaine ellipsoïdal.

## V. RÉSULTATS DE SIMULATION

Dans cet exemple on considère un système MIMO à 2 séquences d'entrées et 2 séquences de sorties et régi par :

$$\begin{aligned} y_1(k) = & \frac{(0.102z^{-1} - 0.751z^{-2})}{(1 - 0.625z^{-1} - 0.0894z^{-2})} u_1(k) + \\ & + \frac{(0.152z^{-1} + 0.255z^{-2})}{(1 + 0.35z^{-1} - 0.249z^{-2})} u_2(k) + \\ & + \frac{0.174z^{-1}}{(1 - 0.320z^{-1})} y_1(k) + \\ & + \frac{-0.369z^{-1}}{(1 + 0.625z^{-1} - 0.0125z^{-2})} y_2(k) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
y_2(k) = & \frac{0.147}{(1 + 0.575z^{-1} - 0.174z^{-2})}u_1(k) + \\
& + \frac{-(0.374z^{-1} + 0.285z^{-2})}{(1 - 0.725z^{-1} - 0.0825z^{-2})}u_2(k) + \\
& + \frac{-0.312z^{-1}}{(1 + 0.282z^{-1} - 0.01515z^{-2})}y_1(k) + \\
& + \frac{0.125z^{-1}}{(1 - 0.492z^{-1})}y_2(k)
\end{aligned} \tag{57}$$

Les deux entrées  $u_1(k)$  et  $u_2(k)$  sont choisies comme des séquences uniformément distribuées (figure 1).

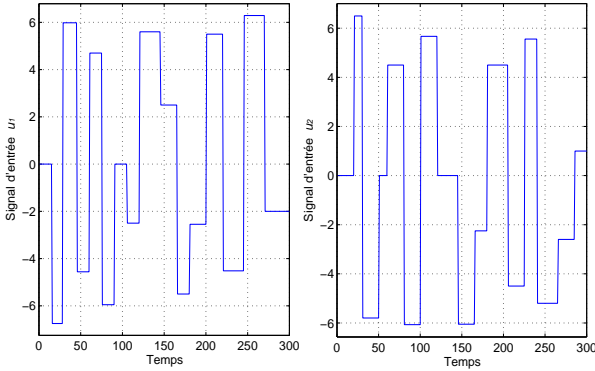


Fig. 1. Signaux d'entrées

Chaque sortie est perturbée par une séquence de bruit blanc bornée et de borne connue, calculée en fonction du Rapport Signal/Bruit ( $RSB = 20$ ) défini par :

$$RSB = \frac{\sum_{k=0}^H (y_i(k) - \bar{y}_i)^2}{\sum_{k=0}^H (\varepsilon_i(k) - \bar{\varepsilon}_i)^2} \tag{58}$$

où  $\bar{y}_i$  et  $\bar{\varepsilon}_i$  sont les valeurs moyennes respectivement de la sortie et de l'erreur de chaque sous-système  $i$ .

Le domaine d'appartenance des coefficients de Fourier pour chaque sous-système est de type ellipsoïdal déterminé par l'approche UBBE.

L'évolution des pôles optimaux pour le premier sous-système MISO est reportée sur la figure 2. La figure 3 illustre les coordonnées du centre de l'ellipsoïdes correspondant. De même les figures 4 et 5 illustrent respectivement les pôles optimaux et les coordonnées du centre de l'ellipsoïde pour le deuxième sous-système.

On exécute des simulations de Monte Carlo pour différents niveaux de bruit. Les valeurs moyennes des vecteurs des pôles optimaux et les centres des ellipsoïdes obtenus sont :

$$\underline{\xi}_{1,moy} = \begin{pmatrix} 0.715 \\ -0.79 \\ -0.023 \\ 0.155 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\xi}_{2,moy} = \begin{pmatrix} -0.88 \\ 0.585 \\ -0.75 \\ -0.046 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\theta}_1 = \begin{pmatrix} -0.5230 \\ -0.2512 \\ 0.5210 \\ -0.1342 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\theta}_2 = \begin{pmatrix} 0.1928 \\ -0.7212 \\ -0.1164 \\ 0.8215 \end{pmatrix}$$

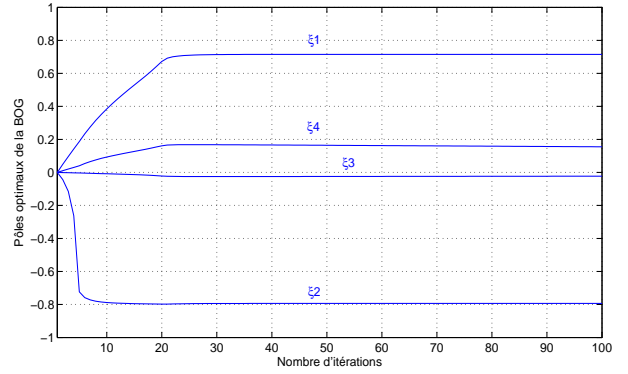


Fig. 2. Pôles optimaux de la BOG du premier sous-système

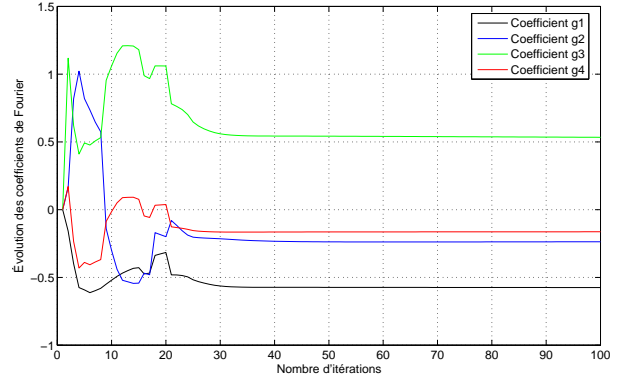


Fig. 3. Coordonnées du centre d'ellipsoïde du premier sous-système

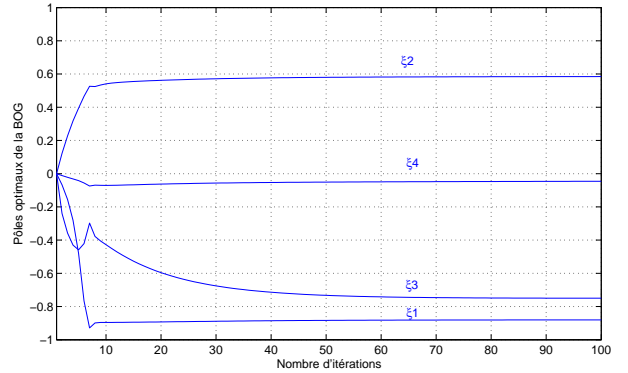


Fig. 4. Pôles optimaux de la BOG du deuxième sous-système

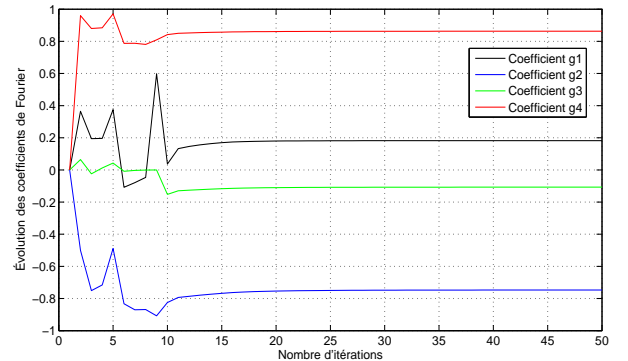


Fig. 5. Coordonnées du centre d'ellipsoïde du deuxième sous-système

Afin de valider le modèle BOG obtenu, les figures 6 et 7 montrent les réponses de chaque sous-système et du modèle BOG correspondant. Les erreurs quadratiques moyennes obtenus sont  $J_1 = 2.1392$  et  $J_2 = 1.5516$ .

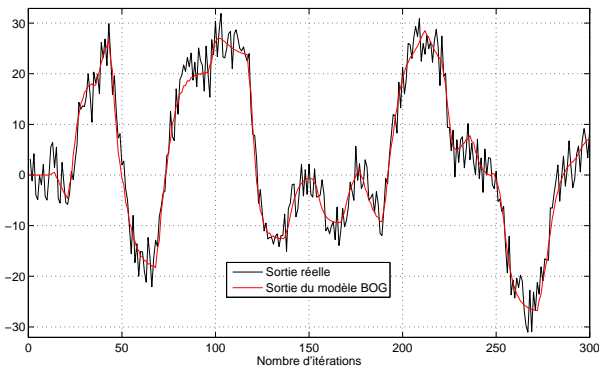


Fig. 6. Validation du modèle BOG du premier sous-système

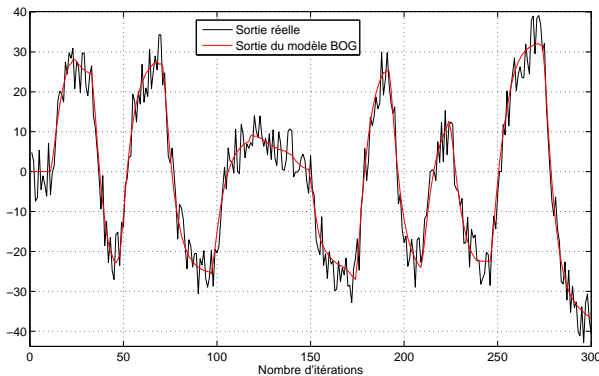


Fig. 7. Validation du modèle BOG du deuxième sous-système

## VI. CONCLUSION

Dans ce papier une nouvelle reformulation de la représentation d'état de la BOG a été élaborée et des nouveaux modèles BOG pour représenter les systèmes linéaires multivariables ont été proposés. Par suite, nous avons procédé à l'identification aussi bien des paramètres de structure que des paramètres du modèle BOG. Pour les premiers nous avons développé une technique d'optimisation des pôles basée sur la méthode du gradient. Pour les seconds nous avons procédé à la mise à jour du domaine d'incertitudes paramétrique du type ellipsoïdal en supposant que l'erreur de modélisation est inconnue mais bornée et de bornes connues. L'optimisation des pôles est accompagnée par une mise à jour de l'ellipsoïde dont le centre constitue le modèle BOG. Toutefois il est à noter que le système MIMO est pris comme une collection de sous-systèmes MISO où toutes les sorties sont couplées. Le domaine d'appartenance actualisé va être assimilé à une série de contraintes qu'il faut en tenir compte pour la synthèse d'une commande robuste.

## RÉFÉRENCES

- [1] R. Malti. Représentation de systèmes discrets sur la base des filtres orthogonaux - Application à la modélisation de systèmes dynamiques multi-variables. Thèse de doctorat à l'institut National Polytechnique de Lorraine, 1999.
- [2] P.M. Mäkilä. Approximation of stable systems by Laguerre filters. *Automatica*, vol. 26, n° 2, pp. 333-345, 1990.
- [3] B. Wahlberg. System identification using Laguerre models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, n° 5, pp. 551-562, 1991.
- [4] P. Lindskog and B. Wahlberg. Application of Kautz models in system identification. In Proceedings of the 12th IFAC World Congress, Sydney, Australia, vol. 5, 308-312, July 1993.
- [5] B. Wahlberg. System identification using Kautz models. *IEEE*

*Transactions on Automatic Control*, vol. 39, n° 6, pp. 1276-1282, June 1994.

- [6] B. Ninness and F. Gustafsson. A unifying construction of orthonormal bases for system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, n° 4, pp. 515-521, April 1997.
- [7] B. Ninness, H. Hjalmarsson and F. Gustafsson. The fundamental role of general orthonormal bases in system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, n° 8, pp. 1384-1407, 1999.
- [8] B. Ninness, J.C. Gómez and S.R. Weller. MIMO system identification using orthonormal basis functions. In Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, CDC'95, New Orleans, 703-708, December 1995.
- [9] J.C. Gómez. Minimal State-Space Realizations for Orthonormal Basis-based Multivariable Identification. In Proceedings of the Argentine Congress on Automatic Control AAECA 2000, Buenos Aires, Argentina, 2000.
- [10] J. Ghabi, A. Douik and H. Messaoud. New Methods of Modelling and Parameter Estimation for MIMO linear Systems using Generalized Orthonormal Basis Functions. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, vol. 2, n° 2, pp. 133-140, 2007.
- [11] E. Fogel and Y.F. Huang. On the value of information in system identification : bounded noise case. *Automatica*, vol. 18, n° 2, pp. 229-238, 1982.
- [12] G. Favier and L. Arruda. Review and Comparison of Ellipsoidal Bounding Algorithms. In M. et al., editor, *Bounding Approaches to system identification*. Plenum Press, New York, chapter 4, pp. 43-68, 1996.
- [13] H. Messaoud and G. Favier. Recursive determination of parameter uncertainty intervals for linear models with unknown but bounded errors. In Proceedings of the 10th IFAC Symposium on System Identification, SYSID'94, Copenhagen, 365-370, Denmark, 1994.
- [14] S. Maraoui and H. Messaoud. Design and comparative study of limited complexity bounding error identification algorithms. In Proceedings of the IFAC Symposium on System Structure and Control, Prague Cheque République, 29-31, August 2001.
- [15] J. Ghabi, A. Douik and H. Messaoud. A New Technique of Poles Estimation for Generalized Orthonormal Basis Functions. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, vol.2, n° 2, pp. 125-132, 2007.
- [16] J. Ghabi. Synthèse et Implémentation sur FPGA de la Commande Prédictive Robuste des Systèmes Linéaires Multivariables. Thèse de doctorat à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, Tunis, Décembre 2009.