

# Commande LPV des robots manipulateurs avec matrice de Lyapunov structurée

Housseem HALALCHI, G. Iuliana BARA, Edouard LAROCHE

Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection

UMR 7005 – Université de Strasbourg, CNRS

Pôle API, Boulevard Sébastien Brant. 67412 Illkirch, France.

{housseem.halalchi, iuliana.bara, edouard.laroche}@lsiit-cnrs.unistra.fr

**Résumé**— Cet article traite de la commande linéaire à paramètres variants (LPV) des robots manipulateurs. Le modèle dynamique de ces systèmes mécaniques, obtenu par l'écriture des équations d'Euler-Lagrange, est non-linéaire. La prise en compte de certains types de non-linéarités peut conduire à une représentation d'état LPV du système. La contribution que nous présentons ici concerne la synthèse de correcteurs LPV par retour d'état pour les robots manipulateurs, en utilisant des matrices de Lyapunov dépendant des paramètres ayant une structure particulière. Des conditions suffisantes de synthèse d'un retour d'état statique stabilisant sont données sous la forme d'un nombre fini d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Des résultats de simulation permettent de valider l'approche proposée.

**Mots-clés**— Systèmes LPV, commande par retour d'état, robots manipulateurs.

## I. INTRODUCTION

La commande des robots manipulateurs a mobilisé beaucoup d'efforts de recherche ces dernières années. Parmi les méthodes de commande dans l'espace articulaire nous mentionnons : la commande simple PD, la commande PID, la commande par inversion du modèle dynamique, la commande par modes glissants, celle basée sur la théorie de Lyapunov ainsi que celle basée sur le principe de passivité [1]. Les commandes basées sur un modèle linéaire du robot ont donné lieu à de nombreuses implémentations pratiques et ont montré une certaine efficacité dans ce cadre [1]. Cependant, l'utilisation d'un modèle nominal ne permet généralement pas de garantir *a priori* la stabilité et un certain degré de performance du système asservi sur l'ensemble de l'espace de travail. Afin de pallier ces insuffisances nous proposons d'utiliser le cadre de travail des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) pour la modélisation et la commande des manipulateurs robotiques. Ce formalisme présente plusieurs avantages tels que la prise en compte de certains types de non-linéarités apparaissant dans le modèle dynamique du robot ainsi que la possibilité de synthétiser des lois de commande assurant les caractéristiques désirées pour le système asservi (stabilité, performance, robustesse) sur l'ensemble de l'espace de fonctionnement. L'originalité de l'approche présentée dans l'article consiste en l'utilisation de matrices de Lyapunov dépendant des paramètres d'une manière particulière, afin de tenir compte de la structure paramétrique du système. Cette structure particulière de la matrice de Lyapunov permet de simplifier le problème de synthèse de correcteurs et d'obtenir des conditions exprimées sous la forme d'un nombre fini d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

Notre article est organisé en six parties. Dans la deuxième partie, le contexte et les motivations de ce travail sont exposées. La partie III traite de la modélisation LPV d'un manipulateur à 2 degrés de liberté (2 DDL). Dans la partie IV des conditions de synthèse d'un correcteur par retour d'état stabilisant sont données. Des résultats de simulation montrant l'intérêt des approches proposées sont exposés dans la partie V. Notations : Soient  $A$  et  $B$  des matrices symétriques,  $A > 0$  (resp.  $\geq 0$ ) signifie que  $A$  est définie positive (resp. semi-définie positive),  $I_n$  et  $0_{m \times n}$  représentent la matrice identité de dimension  $n$  et la matrice nulle de dimension  $m \times n$ . Les dimensions seront parfois omises si le contexte le permet.  $\text{He}\{A\} = A + A^T$  et  $\text{diag}(A, B) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ .

## II. CONTEXTE ET MOTIVATIONS

Il est bien connu que le modèle dynamique d'un robot manipulateur peut être obtenu par l'écriture des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau(t) \quad (1)$$

où  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$  est le Lagrangien du système,  $\mathcal{T}$  est son énergie cinétique et  $\mathcal{U}$  son énergie potentielle ;  $q$  est le vecteur des positions articulaires et  $\tau$  le vecteur des couples extérieurs appliqués au manipulateur.

Le développement de l'équation (1) conduit à un modèle dynamique du robot de la forme :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q)\dot{q} + K_e(q)q + g(q) = \tau \quad (2)$$

où  $M(q)$ ,  $D(q)$  et  $K_e(q)$  représentent les matrices d'inertie, d'amortissement et de raideur respectivement.  $C(q, \dot{q})$  est la matrice des effets de Coriolis et centripètes et  $g(q)$  le vecteur des couples gravitationnels.

Ce modèle décrivant le comportement dynamique de la structure mécanique du robot est fortement non-linéaire. Pour une large classe de manipulateurs, il est possible de réécrire ce modèle sous la forme d'une représentation d'état LPV en définissant des paramètres de séquencement qui dépendent des positions et vitesses articulaires. Dans ce cas on parle également de système "quasi-LPV" parce que le paramètre variant est une fonction du vecteur d'état du système [2]. Le problème de la synthèse de correcteurs LPV pour les systèmes LPV peut dans certains cas se ramener à la résolution de contraintes de type LMI. L'implémentation numérique de l'algorithme de synthèse impose alors la

présence d'un nombre fini de contraintes à optimiser. En se focalisant sur le cadre applicatif des robots manipulateurs, les deux principales questions (assez récurrentes dans la commande LPV) que nous voulons examiner sont :

- Comment exprimer les problèmes de synthèse de correcteurs LPV pour les robots manipulateurs sous forme de contraintes de type LMI ?
- Comment obtenir un nombre fini de LMI pour faciliter la résolution numérique des problèmes de synthèse ?

### III. MODÉLISATION LPV D'UN MANIPULATEUR À 2 DDL

La commande LPV d'un manipulateur horizontal à deux degrés de liberté, basée sur un modèle où les couples de Coriolis et centrifuges sont supposés compensés dans la commande (modèle partiellement linéarisé) et en utilisant un modèle LPV singulier, a été étudiée dans [4]. Cependant, la prise en compte de ces non-linéarités dans le modèle de synthèse permet une plus grande action de la commande sur le système. Le modèle dynamique est alors donné par :

$$M(q_2)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + K_e q(t) = \tau(t) \quad (3)$$

Cela se traduit au niveau articulaire par les équations :

$$\sum_j m_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + f_k\dot{q}_k + k_{ek}q_k = \tau_k \quad (4)$$

où  $k$  représente l'indice de l'articulation actionnée par le couple  $\tau_k$ , les indices  $i$  et  $j$  varient entre 1 et le nombre d'articulations. Les matrices d'amortissement et de raideur ont une structure diagonale  $D = \text{diag}(f_1, f_2)$  et  $K_e = \text{diag}(k_{e1}, k_{e2})$ , les coefficients  $m_{kj}$  sont les composantes de la matrice d'inertie du robot et les  $c_{ijk}$  sont connus sous le nom de *symboles de Christoffel* du premier type [5]. Les termes en  $\dot{q}_i^2$  dans (4) sont appelés *termes centrifuges*, tandis que ceux en  $\dot{q}_i\dot{q}_j$  avec  $i \neq j$  sont appelés *termes de Coriolis*. On peut montrer que pour un manipulateur robotique, ces coefficients dépendent uniquement de la matrice d'inertie du robot et sont exprimés par :

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (5)$$

Dans le cas d'un manipulateur à 2 DDL à articulations rotoïdes (également appelé *manipulateur coude*), la matrice d'inertie varie de manière affine en fonction du cosinus de la seconde coordonnée articulaire. Cette grandeur sera prise comme premier paramètre variant  $\rho_1 = \cos(q_2)$ . Alors,

$$M(q_2) = M_0 + M_c \cos(q_2) = M_0 + M_c \rho_1 \quad (6)$$

$$\text{avec } M_0 = \begin{bmatrix} m_{110} & m_{120} \\ m_{120} & m_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_c = \begin{bmatrix} m_{11c} & m_{12c} \\ m_{12c} & 0 \end{bmatrix}.$$

Les symboles de Christoffel sont donc données par :  $c_{111} = 0$ ,  $c_{112} = \frac{1}{2}m_{11c}\sin(q_2) = -h$ ,  $c_{121} = c_{211} = h$  (symétrie),  $c_{122} = c_{212} = 0$  (symétrie),  $c_{221} = h$  et enfin  $c_{222} = 0$ . Nous pouvons alors déduire l'équation de mouvement de chacune des articulations :

$$\begin{cases} m_{11}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{12}(q_2)\ddot{q}_2 - m_{11c}\sin(q_2)(\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2) + f_1\dot{q}_1 + k_{e1}q_1 = \tau_1 \\ m_{12}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}m_{11c}\sin(q_2)\dot{q}_1^2 + f_2\dot{q}_2 + k_{e2}q_2 = \tau_2 \end{cases} \quad (7)$$

En supposant que le vecteur d'état du système  $x(t) = [q(t)^T \dot{q}^T(t)]^T$  est mesurable, nous pouvons définir les paramètres variants supplémentaires :  $\rho_2 = \dot{q}_2 \sin(q_2)$  et  $\rho_3 = \dot{q}_1 \sin(q_2)$ . On note la présence d'une relation algébrique entre le paramètre  $\rho_2$  et la dérivée de  $\rho_1$  :

$$\dot{\rho}_1 = -\rho_2 \quad (8)$$

Cette relation sera exploitée par la suite pour réduire la dimension de l'espace paramétrique. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (9)$$

où  $A(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)A_1(\rho)$ ,  $B(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)B_1(\rho)$  et  $C = [I_2 \quad 0_2]$ , avec  $M_1(\rho_1) = \text{diag}(I_2, M(\rho_1))$ ,

$$A_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -K_e & -D - S(\rho_2, \rho_3) \end{bmatrix}, \quad B_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } S(\rho_2, \rho_3) = \begin{bmatrix} -m_{11c}\rho_2 & -\frac{1}{2}m_{11c}\rho_2 \\ \frac{1}{2}m_{11c}\rho_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons la dépendance rationnelle des matrices d'état en fonction du vecteur de paramètres  $\rho(t) = [\rho_1 \rho_2 \rho_3]^T$ . Pour les nombreux systèmes mécaniques dont le mouvement est décrit par l'équation (2), ce caractère rationnel provient de l'inversion de la matrice d'inertie  $M(q)$ .

L'étape de modélisation LPV nous a permis de reformuler deux types de non-linéarités lisses : la dépendance paramétrique de la matrice d'inertie  $M(q_2)$ , ainsi que les couples de Coriolis  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  en un modèle LPV de type rationnel. Ce modèle appartient à la sous-classe des systèmes présentant un couplage entre une partie à dépendance paramétrique rationnelle particulière (inverse d'une matrice affine), représentée ici par la matrice  $M_1^{-1}(\rho_1)$ , et une partie à dépendance polynômiale, que l'on reconnaît ici dans les matrices  $A_1(\rho)$  et  $B_1(\rho)$ . Dans les paragraphes suivants, nous nous intéresserons à la synthèse de correcteurs LPV par retour d'état pour ce type de systèmes.

### IV. COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT LPV

Pour un manipulateur rigide, le vecteur d'état contient généralement les positions et les vitesses articulaires. Il est souvent mesurable et les signaux position et vitesse sont parfois données par le même capteur. Le codeur incrémental, par exemple, permet d'obtenir une mesure de la position angulaire et une estimation de la vitesse. Ceci permet d'effectuer une commande par retour d'état pour ce type de manipulateurs. Par contre, pour un manipulateur flexible, le vecteur d'état peut contenir des variables supplémentaires décrivant les flexibilités. Les variables d'état ne seront pas toujours mesurables simultanément dans ce cas et il n'est plus possible d'effectuer une commande par retour d'état complet [6]. Une commande par retour d'état partiel serait alors plus appropriée. Nous nous en tiendrons ici au cas rigide. Nous étudierons dans les paragraphes suivants le problème de la stabilisation du système (9) comme un premier pas vers la synthèse de correcteurs avec des garanties de performance.

*Problème* : Trouver une matrice  $K(\rho)$  telle que le système asservi par le retour d'état  $u = K(\rho)x$  soit stable.

Un tel système asservi a pour équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A(\rho) + B(\rho)K(\rho))x(t) = A_{BF}(\rho)x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (10)$$

Le modèle LPV (9) obtenu dans la section précédente peut être utilisé pour la synthèse de correcteurs LPV stabilisants. Nous présenterons dans ce qui suit des conditions de synthèse sous forme LMI à travers deux méthodes : utilisation des inégalités de Lyapunov classiques et utilisation de conditions de stabilité étendues qui font appel à des variables matricielles supplémentaires appelées variables faibles (*slack variables* en anglais). Nous supposons par la suite que chacun des paramètres est borné  $\rho_k \in [\rho_{k_{min}}, \rho_{k_{max}}] = E_{\rho_k}$ , de même que sa dérivée temporelle  $\dot{\rho}_k \in [\dot{\rho}_{k_{min}}, \dot{\rho}_{k_{max}}] = E_{\dot{\rho}_k}$ . Les ensembles admissibles pour les vecteurs  $\rho$  et  $\dot{\rho}$  sont alors les hypercubes  $E_\rho$  et  $E_{\dot{\rho}}$  dont les sommets engendrent les ensembles  $E_\rho^s$  et  $E_{\dot{\rho}}^s$ .

#### A. Approche par inégalités de Lyapunov

Afin de supprimer le caractère rationnel des matrices d'état de l'équation (9), l'originalité de notre travail consiste en l'utilisation de matrices de Lyapunov dépendant des paramètres ayant une structure paramétrique particulière :  $P(\rho) = P_1(\rho)M_1(\rho)$ . Rappelons d'abord la condition de stabilité au sens de Lyapunov des systèmes LPV.

Le système en boucle fermée représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho)$  est stable au sens de Lyapunov si :  $\exists P(\rho) = P^T(\rho) > 0$  tel que :

$$P(\rho)A_{BF}(\rho) + A_{BF}^T(\rho)P(\rho) + \dot{P}(\rho) < 0, \forall (\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}} \quad (11)$$

Pour la classe de systèmes considérée, nous avons :  $A_{BF}(\rho) = A(\rho) + B(\rho)K(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho)) = M_1^{-1}(\rho)A_{1BF}(\rho)$ . L'inégalité (11) est une BMI (inégalité matricielle bi-linéaire) en fonction de  $P(\rho)$  et  $K(\rho)$ . Afin de pouvoir effectuer un changement de variable linéarisant, l'approche habituelle de la commande LPV par retour d'état fait intervenir la forme duale de cette inégalité de Lyapunov, obtenue en pré- et post-multipliant (11) par  $P^{-1}(\rho)$ . Cependant, la forme duale ne permet pas de compenser le terme rationnel  $M_1^{-1}(\rho)$  qui se trouve à gauche de la matrice de système  $A_{BF}(\rho)$ . Les conditions de synthèse suivantes permettent de résoudre ce problème.

**Théorème 1 :** (Stabilisation) Le système asservi représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est stable au sens de Lyapunov si  $\exists Q(\rho) = Q^T(\rho) > 0$ ,  $\exists R(\rho)$  tels que :  $\forall (\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$ ,

$$M_1(\rho)Q(\rho) = Q(\rho)M_1(\rho) \quad (12)$$

$$\text{He}\{A_1(\rho)Q(\rho) + B_1R^T(\rho)\} - \dot{Q}(\rho)M_1(\rho) + Q(\rho)\dot{M}_1(\rho) < 0 \quad (13)$$

La matrice de gain du correcteur par retour d'état est alors donnée par :  $K(\rho) = R^T(\rho)Q^{-1}(\rho)$ .

**Preuve 1 :** La stabilité de Lyapunov se traduit par  $\exists P(\rho) = P_1(\rho)M_1(\rho) = P^T(\rho) > 0$  tel que :

$$P_1(\rho)A_{1BF}(\rho) + A_{1BF}^T(\rho)P_1(\rho) + \dot{P}_1(\rho)M_1(\rho) + P_1(\rho)\dot{M}_1(\rho) < 0 \quad (14)$$

Le développement du premier terme de la somme dans (14) donne :  $P_1(\rho)A_{1BF}(\rho) = P_1(\rho)A_1(\rho) + P_1(\rho)B_1K(\rho)$  où les matrices inconnues sont  $P_1(\rho)$  et  $K(\rho)$ . Vu que  $P_1(\rho)$  est régulière, en pré-(post) multipliant l'inégalité (14) par  $P_1^{-1}(\rho)$  et  $P_1^{-T}(\rho)$ , nous avons :

$$\text{He}\{A_1(\rho)P_1^{-T}(\rho) + B_1K(\rho)P_1^{-T}(\rho)\} + P_1^{-1}(\rho)\dot{P}_1(\rho)M_1(\rho)P_1^{-T}(\rho) + \dot{M}_1(\rho)P_1^{-T}(\rho) < 0 \quad (15)$$

Le terme qui pose problème en vue d'un changement de variable linéarisant est celui contenant  $\dot{P}_1(\rho)$ . Si on pose  $Q(\rho) = P_1^{-1}(\rho)$ , on a :

$$P_1^{-1}(\rho)\dot{P}_1(\rho)M_1(\rho)P_1^{-T}(\rho) = Q(\rho)\frac{d}{dt}[Q^{-1}(\rho)]M_1(\rho)Q^T(\rho) \quad (16)$$

Et comme  $\frac{d}{dt}[Q^{-1}(\rho)] = \sum_k \frac{\partial}{\partial \rho_k}[Q^{-1}(\rho)]\frac{d\rho_k(t)}{dt}$ ,

et  $\frac{\partial}{\partial \rho_k}[Q^{-1}(\rho)] = -Q^{-1}(\rho)\frac{\partial}{\partial \rho_k}[Q(\rho)]Q^{-1}(\rho)$ ,

le second membre de l'équation (16) devient :

$-\{\sum_k \frac{\partial}{\partial \rho_k}[Q(\rho)]\dot{\rho}_k\}Q^{-1}(\rho)M_1(\rho)Q^T(\rho)$ . Ceci vaut

$-\dot{Q}(\rho)M_1(\rho)$  sous la condition  $Q(\rho) = Q^T(\rho)$  (symétrie de  $Q$ ). Etant donné que  $P(\rho) = P^T(\rho) > 0$ , cette condition est équivalente à  $Q(\rho) = Q^T(\rho) > 0$  (ou encore à  $P_1(\rho) = P_1^T(\rho) > 0$ ) et  $M_1(\rho)Q(\rho) = Q(\rho)M_1(\rho)$  (commutativité du produit  $M_1Q$ ). La condition de stabilité devient :

$$\text{He}\{A_1(\rho)Q(\rho) + B_1K(\rho)Q(\rho)\} - \dot{Q}(\rho)M_1(\rho) + Q(\rho)\dot{M}_1(\rho) < 0 \quad (17)$$

L'inégalité (17) est linéarisable à travers le changement de variables  $R(\rho) = Q(\rho)K^T(\rho)$ . Nous obtenons alors une condition de synthèse sous la forme de la LMI dépendant des paramètres du Théorème 1.

Obtention d'un nombre fini de contraintes :

La contrainte de type égalité (12) équivaut au fait d'avoir un polynôme  $\Omega(\rho) = M_1(\rho)Q(\rho) - Q(\rho)M_1(\rho)$  identiquement nul. Cela se produit lorsque tous les coefficients du polynôme sont nuls (nombre fini de contraintes de type égalité). Il est possible dans la pratique de chercher une solution approchée en utilisant une contrainte inégalité (LMI) du type :  $-\varepsilon I < \Omega(\rho) < \varepsilon I$  avec  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit.

La condition LMI de synthèse (13) doit être vérifiée pour toutes les valeurs du couple de vecteurs  $(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$ . A cause du caractère compact de ces ensembles, cela revient à appliquer l'inégalité (13) sur un nombre infini de valeurs des vecteurs  $\rho(t)$  et  $\dot{\rho}(t)$ . Dans le cas où la dépendance paramétrique de l'inégalité (13) est affine, il est bien connu qu'il suffit de vérifier les contraintes matricielles uniquement sur les couples  $(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho^s \times E_{\dot{\rho}}^s$  (sommets des ensembles bornés) pour qu'elles soient valables pour toutes les valeurs de  $E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$ . Or, vu les couplages entre matrices dépendant des paramètres dans (13), cette inégalité ne présente généralement pas une dépendance affine. Cependant, dans le cas d'une LMI à dépendance polynomiale, il est possible d'obtenir un nombre fini de contraintes grâce à l'application du critère de multiconvexité [7]. Nous rappellerons brièvement ce principe puis nous l'appliquerons à notre problème de commande de robot manipulateur.

**Lemme 1 :** (Multiconvexité [7]) Soit  $f(\rho, \dot{\rho})$  une fonction quadratique de  $E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$  dans l'ensemble des matrices à valeurs réelles. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} f(\rho, \dot{\rho}) < 0 & \forall (\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho^s \times E_{\dot{\rho}}^s \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho_k^2} f(\rho, \dot{\rho}) \geq 0 \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial \dot{\rho}_k^2} f(\rho, \dot{\rho}) \geq 0, \forall (\rho_k, \dot{\rho}_k) \in E_{\rho_k} \times E_{\dot{\rho}_k} \end{cases} \quad (18)$$

alors :  $f(\rho, \dot{\rho}) < 0 \quad \forall (\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$

*Remarque 1* : La généralisation des conditions suffisantes de multiconvexité aux fonctions polynômiales quelconques a été présentée dans [7].

Si  $Q(\rho)$  est affine, la condition  $\frac{\partial^2}{\partial \rho_k^2} f(\rho, \dot{\rho}) \geq 0$  est toujours vérifiée à cause de la dépendance affine en  $\dot{\rho}$  des matrices  $\dot{M}_1(\rho)$  et  $\dot{Q}(\rho)$ . Par contre, la satisfaction des contraintes résultant de la condition  $\frac{\partial^2}{\partial \rho_k^2} f(\rho, \dot{\rho}) \geq 0$  dépend de la structure paramétrique choisie pour la matrice  $R(\rho)$ . Le terme  $A_1(\rho)Q^T(\rho)$  n'induit pas de contrainte supplémentaire si on s'en tient à une matrice  $Q(\rho_1)$  affine, car  $A_1(\rho)$  est affine en  $\rho_2$  et  $\rho_3$ .

### B. Approche par "slack variables"

Il a été montré dans [8] qu'il est possible d'utiliser des conditions LMI étendues pour l'analyse de stabilité et de performance et la synthèse de correcteurs. Ces conditions permettent de supprimer le couplage entre la matrice de système et la matrice de Lyapunov. L'utilisation d'une variable matricielle supplémentaire appelée variable faible (*slack variable*) offre un degré de liberté supplémentaire qui peut être utile à la résolution du problème de synthèse. Nous rappellerons dans ce qui suit ce critère de stabilité puis nous l'appliquerons à la synthèse d'un correcteur par retour d'état stabilisant pour notre application.

Le système en boucle fermée représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho)$  est stable si :  $\exists P(\rho) = P^T(\rho)$  (*matrice de Lyapunov*) et  $\exists V(\rho)$  (*variable faible*) tels que :

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V(\rho)\} & V^T(\rho)A_{BF}(\rho) + P(\rho) & V^T(\rho) \\ A_{BF}^T(\rho)V(\rho) + P(\rho) & -P(\rho) + \dot{P}(\rho) & 0 \\ V(\rho) & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

Examinons le terme  $V(\rho)^T A_{BF}(\rho) = V^T(\rho)M_1^{-1}(\rho)(A_{1BF}(\rho))$ . Le choix de la structure particulière  $V(\rho) = M_1(\rho)V_1(\rho)$  pour la variable faible  $V(\rho)$  permet de compenser le facteur rationnel  $M_1^{-1}(\rho)$ . Nous donnons dans ce qui suit les conditions de synthèse d'un correcteur LPV stabilisant sous la forme d'une LMI dépendant des paramètres.

*Théorème 2* : (Stabilisation) Le système asservi représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est stable si  $\exists \Gamma(\rho) = \Gamma^T(\rho)$ ,  $\exists R(\rho)$  et  $\exists V_1$  tels que :  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$ ,

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V_1^{-T}M_1(\rho)\} & A_1(\rho)V_1^{-1} + B_1R(\rho) + \Gamma(\rho) & V_1^{-T}M_1(\rho) \\ * & -\Gamma(\rho) + \dot{\Gamma}(\rho) & 0 \\ * & * & -\Gamma(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

La matrice de gain du correcteur est alors donnée par :  $K(\rho) = V_1R(\rho)$ .

*Remarque 2* : Contrairement à celle obtenue avec la condition de synthèse (13), la structure du correcteur obtenu par la condition (20) ne fait pas intervenir explicitement l'expression de la matrice de Lyapunov  $P(\rho)$ .

*Preuve 2* : Etant donnée la structure particulière de  $V(\rho)$ , les conditions (19) deviennent :  $\exists P(\rho) = P^T(\rho)$  et  $\exists V_1(\rho)$  tels que :

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{M_1(\rho)V_1(\rho)\} & V_1^T(\rho)A_{1BF}(\rho) + P(\rho) & V_1^T(\rho)M_1(\rho) \\ A_{1BF}^T(\rho)V_1(\rho) + P(\rho) & -P(\rho) + \dot{P}(\rho) & 0 \\ M_1(\rho)V_1(\rho) & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

Le terme  $V_1^T(\rho)A_{1BF}(\rho) = V_1^T(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est bi-linéaire par rapport aux matrices inconnues  $V_1(\rho)$

et  $K(\rho)$ . Afin d'effectuer un changement de variable linéarisant (permettant de transformer (21) en LMI), il est possible d'effectuer le prétraitement suivant : en supposant la matrice  $V_1(\rho)$  régulière, pré-multiplier l'inégalité (21) par  $\text{diag}(V_1^{-T}, V_1^{-T}, V_1^{-T})$  et post-multiplier par sa transposée. Si de plus, la matrice  $V_1$  est supposée constante, il est possible d'effectuer les changements de variables linéarisants :  $R(\rho) = K(\rho)V_1^{-1}$  et  $\Gamma(\rho) = -V_1^{-T}P(\rho)V_1^{-1}$ . Nous obtenons alors les conditions de synthèse du Théorème 2.

Obtention d'un nombre fini de contraintes :

Comme pour l'inégalité (13), l'obtention d'un nombre fini de contraintes à optimiser à partir de la LMI dépendant des paramètres (20) dépend de la structure paramétrique choisie pour les matrices inconnues  $R(\rho)$  et  $\Gamma(\rho)$ . La dépendance affine de chacune de ces matrices conduit bien entendu à l'obtention d'un nombre fini de contraintes, résultant de l'application de l'inégalité sur les couples  $(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho^s \times E_{\dot{\rho}}^s$ . Comme la variable  $\Gamma(\rho)$  apparaît avec sa dérivée temporelle  $\dot{\Gamma}(\rho)$ , le plus simple est de la choisir affine (dans ce cas  $\dot{\Gamma}(\rho)$  est également affine en  $\dot{\rho}$ ). Pour la variable  $R(\rho)$ , le choix d'une dépendance paramétrique polynômiale autre qu'afine pourrait permettre dans la pratique une meilleure adaptation du correcteur à la variation de la dynamique du système, due à la variation du paramètre de séquencement  $\rho(t)$ . Cependant, des contraintes supplémentaires liées à l'application du critère de multiconvexité (Lemme 1) sur la LMI (20) imposent des restrictions sur le choix de cette structure polynômiale.

En effet, le calcul du terme  $\frac{\partial^2}{\partial \rho_k^2} f(\rho, \dot{\rho})$  du Lemme 1 peut donner lieu à une matrice avec un bloc diagonal nul sans que le bloc ligne ou le bloc colonne correspondant ne s'annule. Ceci rend la condition de positivité semi-définie de cette matrice impossible à satisfaire. Dans ce cas les conditions suffisantes de multiconvexité ne seront pas remplies et l'application du Lemme 1 ne permettra donc pas d'obtenir un nombre fini de LMIs. Cela se produit notamment lorsque le degré du polynôme qui donne la dépendance paramétrique d'un bloc diagonal est strictement inférieur au degré de l'un des blocs non-diagonaux associés. En revenant à l'inégalité (20), vu le caractère affine du bloc (1,1) de la matrice, donné par :  $-\text{He}\{V_1^{-T}M_1(\rho)\}$ , nous devons choisir une dépendance paramétrique au plus affine pour la variable matricielle  $R(\rho)$ . Dans ces conditions la LMI (20) est affine en  $\rho$  et  $\dot{\rho}$  et il suffira de la vérifier uniquement sur l'ensemble des sommets :  $(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho^s \times E_{\dot{\rho}}^s$ .

### C. Retour d'état avec action intégrale

Afin de garantir une erreur statique de position nulle, il est courant d'ajouter une action intégrale appliquée uniquement sur l'erreur de position [9]. La commande ainsi synthétisée est équivalente à une correction PID (proportionnelle, intégrale et dérivée) sur la sortie du système constituée du vecteur de positions articulaires  $y(t) = q(t)$  et peut être implantée sous cette forme sur le système physique. Définissons la variable d'état supplémentaire :  $\xi(t) = \int_0^t (q(\tau) - q^*(\tau))d\tau$  où  $q^*$  est la position de référence du robot. Le vecteur d'état augmenté du système sera  $\tilde{x}(t) = [q^T(t) \dot{q}^T(t) \xi^T(t)]^T$  et la nouvelle représentation

d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(\rho(t))\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1(\rho(t))u(t) + \tilde{B}_2q^*(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (22)$$

où  $\tilde{A}(\rho) = \begin{bmatrix} A(\rho) & 0_{4 \times 2} \\ C & 0_2 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_1(\rho) = \begin{bmatrix} B(\rho) \\ 0_2 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$  et  $\tilde{C} = [C \ 0_2]$ . En effectuant un asservissement de ce système par le retour d'état avec action intégrale partielle  $u = K(\rho)[\xi^T \ \dot{q}^T \ \xi^T]^T = K(\rho)\tilde{x} + K(\rho)[-q^{*T} \ 0_{1 \times 4}]^T$ , le système en boucle fermée aura pour équation d'état :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_{BF}(\rho)\tilde{x}(t) + B_{BF}(\rho)q^*(t) \quad (23)$$

avec  $A_{BF}(\rho) = \tilde{A}(\rho) + \tilde{B}_1(\rho)K(\rho)$  et  $B_{BF}(\rho) = \tilde{B}_2 - \tilde{B}_1(\rho)K(\rho)\alpha$ , où  $\alpha = [I_2 \ 0_{2 \times 4}]^T$ . L'étude de stabilité du système asservi concerne la matrice  $A_{BF}(\rho) = M_2^{-1}(\rho)(A_2(\rho) + B_2K(\rho)) = M_2^{-1}(\rho)A_{2BF}$  où  $M_2(\rho) = \text{diag}(M_1(\rho), I_2)$ ,  $A_2(\rho) = \begin{bmatrix} A_1(\rho) & 0_{4 \times 2} \\ C & 0_2 \end{bmatrix}$  et  $B_2 = \begin{bmatrix} B_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ . Les conditions de synthèse sont similaires à celles développées sans action intégrale (approche inégalités de Lyapunov et approche *slack variables*) mais en prenant maintenant une matrice de Lyapunov dépendant des paramètres du type  $P(\rho) = P_2(\rho)M_2(\rho)$ . La taille des LMIs à optimiser sera également plus importante à cause de l'utilisation d'un vecteur d'état augmenté.

#### D. Taux de décroissance exponentielle

Les conditions énoncées dans les sous-sections A et B exigent uniquement un système stable en boucle fermée. Aucune information sur le temps de convergence vers la valeur finale du signal de référence n'est donnée. Afin de rajouter une condition sur la rapidité du système asservi, plusieurs démarches sont possibles telles que : le placement de pôles, l'assignation de régions de stabilité (*D-stability*[10]), ainsi que la maximisation du taux de décroissance de la fonction de Lyapunov du système [11]. Nous présenterons cette dernière approche comme une première extension des conditions de synthèse stabilisantes discutées précédemment.

Le système en boucle fermée représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho)$  est stable au sens de Lyapunov et présente un taux de décroissance exponentielle scalaire (*decay rate*)  $\lambda > 0$  si :  $\exists P(\rho) = P^T(\rho) > 0$  tel que :

$$P(\rho)A_{BF}(\rho) + A_{BF}^T(\rho)P(\rho) + \dot{P}(\rho) + 2\lambda P(\rho) < 0 \quad (24)$$

Dans ce cas la fonction de Lyapunov quadratique  $V(x(t), \rho(t)) = x^T P(\rho)x$  évolue à l'intérieur d'une enveloppe exponentielle décroissante avec un taux de  $2\lambda$ , de même que la réponse temporelle du système  $x(t)$  mais avec un taux de décroissance de  $\lambda$ . Autrement dit  $V(x(t), \rho(t)) \leq V(x(0), \rho(0))e^{-2\lambda t}$  et  $\|x(t)\| \leq k\|x(0)\|e^{-\lambda t}$  ( $k$  réel positif),  $\forall x(t)$ . L'augmentation de la valeur de  $\lambda$  correspond donc à une convergence plus rapide de la réponse temporelle du système.

Si on se place dans le cadre d'une commande par retour d'état LPV :  $u = K(\rho)x(t)$ , les conditions de synthèse de la matrice de gain  $K(\rho)$  données dans les équations (13) et (20), associées à un critère de décroissance exponentielle deviennent comme suit.

*Théorème 3* : Le système asservi représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est stable au sens de Lyapunov et présente un taux de décroissance exponentielle  $\lambda > 0$  si  $\exists Q(\rho) = Q^T(\rho) > 0$ ,  $\exists R(\rho)$  tels que :  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$ ,

$$M_1(\rho)Q(\rho) = Q(\rho)M_1(\rho) \quad (25)$$

$$\text{He}\{A_1(\rho)Q(\rho) + B_1R^T(\rho)\} - \dot{Q}(\rho)M_1(\rho) + Q(\rho)\dot{M}_1(\rho) + 2\lambda Q(\rho)M_1(\rho) < 0 \quad (26)$$

*Théorème 4* : Le système asservi représenté par la matrice  $A_{BF}(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$  est stable et présente un taux de décroissance exponentielle  $\lambda > 0$  si  $\exists \Gamma(\rho) = \Gamma^T(\rho)$ ,  $\exists R(\rho)$  et  $\exists V_1$  tels que :  $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$ ,

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V_1^{-T}M_1(\rho)\} & A_1(\rho)V_1^{-1} + B_1R(\rho) + \Gamma(\rho) & V_1^{-T}M_1(\rho) \\ * & \Gamma(\rho) + (2\lambda - 1)\Gamma(\rho) & 0 \\ * & * & -\Gamma(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

*Remarque 3* : Vu le couplage entre les variables inconnues  $\lambda$  et  $Q(\rho)$  dans (26) ainsi que  $\lambda$  et  $\Gamma(\rho)$  dans (27), ces deux conditions sont des BMI. Pour résoudre ces inégalités en maximisant la valeur de  $\lambda$ , il est possible soit d'utiliser un solveur BMI en définissant la maximisation de  $\lambda$  comme une contrainte d'optimisation, soit d'utiliser un algorithme itératif du type dichotomie, ce qui ne sera pas trop coûteux en capacité de calcul puisque  $\lambda$  est un scalaire.

## V. SIMULATIONS

Afin de valider les approches proposées pour la commande par retour d'état LPV d'un manipulateur à 2 DDL, des simulations ont été effectuées en utilisant la partie rigide du modèle dynamique du robot SECAFLEX [3]. Afin d'évaluer le comportement dynamique du système sur l'ensemble de l'espace de fonctionnement, en particulier les ensembles admissibles des paramètres variants  $E_\rho$  et ceux de leurs dérivées temporelles  $E_{\dot{\rho}}$ , la trajectoire de référence  $q^* = [q_1^* \ q_2^*]^T$  que nous avons choisi est la suivante. Pour la seconde articulation  $q_2$  nous avons choisi une série de créneaux progressifs balayant l'intervalle  $[0, \pi]$  (on ne traite pas la partie négative pour des raisons de symétrie), tandis que pour la première articulation  $q_1$  nous avons pris un signal carré en quadrature de phase permettant d'évaluer les effets de couplage entre les deux articulations. Notons que dans les conditions de synthèse développées plus haut, aucune exigence de découplage n'est imposée. A titre d'exemple, une commande avec garantie de performance  $H_\infty$  utilisant des pondérations fréquentielles, permettrait d'intégrer ce type d'exigences.

Les ensembles admissibles des paramètres sont donnés par :  $|\rho_1| < 1$  (par définition);  $|\rho_2|, |\rho_3| < 1.75 \text{ rad/s}$  (caractéristiques du système). Par ailleurs, le choix des structures paramétriques des matrices inconnues est fait de manière à ce que seule la dérivée temporelle de  $\rho_1$  :  $\dot{\rho}_1 = -\rho_2$  intervienne dans les conditions de synthèse. La figure 1 montre les résultats d'une commande en position avec l'approche de l'inégalité de Lyapunov (Théorème 3) en prenant  $R(\rho) = R_0 + R_1\rho_1 + R_2\rho_2 + R_3\rho_3$  (affine),  $Q(\rho) = Q_0$  (constant) et  $\lambda = 1.9$ . La figure 2 montre les résultats d'une commande avec l'approche des *slack variables* (Théorème 4) en prenant  $R(\rho)$  affine,  $\Gamma(\rho) = \Gamma_0$  constant et  $\lambda = 0.5$ .

La partie (a) des figures montre la réponse temporelle du système, alors que la partie (b) montre la variation des paramètres. Les LMIs ont été résolues en utilisant le solveur SeDuMi associé à la boîte à outils YALMIP dans l'environnement MATLAB. Notons que les correcteurs obtenus avec ces choix de structure paramétrique sont affines dans les deux cas, ce qui est suffisant pour notre application. D'autres systèmes pourraient faire appel à des correcteurs à dépendance paramétrique rationnelle.

Les correcteurs obtenus par les deux approches assurent la stabilisation du système et une erreur permanente nulle en l'absence de perturbation, sans utilisation d'une action intégrale sur l'erreur de position. Cependant, nous avons remarqué un meilleur découplage du système avec le correcteur obtenu par la méthode des *slack variables*, ainsi qu'une plage de variation des paramètres  $\rho_2$  et  $\rho_3$  plus réduite dans ce cas.

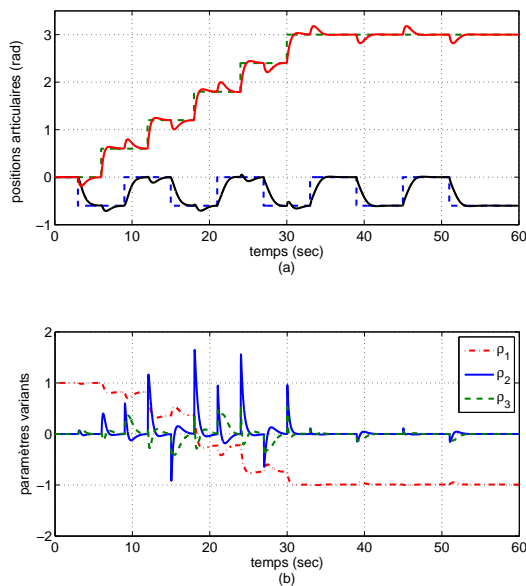


Fig. 1. Commande LPV par l'approche des inégalités de Lyapunov

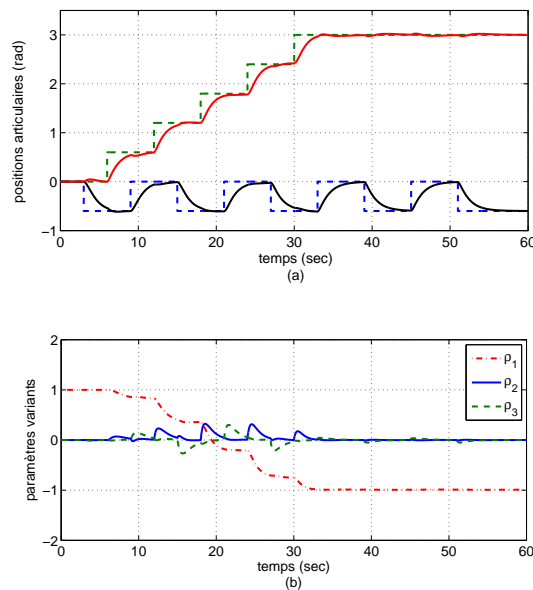


Fig. 2. Commande LPV par l'approche des *slack variables*

## VI. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons étudié le problème de la commande LPV des robots manipulateurs. Plus précisément, nous avons proposé des conditions de synthèse sous la forme d'un nombre fini de LMIs pour la stabilisation des manipulateurs, en utilisant une matrice de Lyapunov dépendant des paramètres qui contient la matrice d'inertie du robot dans son expression. L'étape de modélisation LPV nous a permis de reformuler le modèle dynamique non-linéaire du robot en une représentation d'état LPV. Nous avons ensuite utilisé ce modèle LPV pour la synthèse de lois de commande par retour d'état LPV à travers deux approches : inégalités de Lyapunov classiques et *slack variables*. L'originalité de notre démarche consiste en la prise en compte de variables matricielles avec des structures particulières. La matrice de Lyapunov dans la première approche et la variable faible dans la seconde contiennent la matrice d'inertie du robot dans leur expression. Cette structure particulière permet de supprimer le caractère rationnel de la dépendance paramétrique des conditions de synthèse, ce qui permet d'exprimer ces conditions sous la forme d'un nombre fini de LMIs. Deux extensions au rejet de perturbations constantes et à la maximisation du taux de décroissance exponentielle ont été données. Les simulations effectuées à l'aide du modèle dynamique d'un manipulateur à 2 DDL horizontal rigide montrent l'intérêt des approches proposées. Des travaux futurs permettront d'une part, d'étendre ces conditions de synthèse stabilisantes aux garanties de performance et d'autre part, d'utiliser ces approches pour la commande de systèmes dynamiques plus complexes tels que des manipulateurs flexibles.

## RÉFÉRENCES

- [1] Canudas de Wit C., Siciliano B. et Bastin G. *Theory of robot control*. Springer, London, 1996.
- [2] Tu K.H et Shamma J.S. Nonlinear gain-scheduled control design using set-valued methods. American Control Conference, Philadelphie, PA, USA, juin 1998.
- [3] Adams R.J., Apkarian P. et Chrétien J.-P. Robust control approaches for a two-link flexible manipulator. 3rd Int. Conference on Dynamics and Control Structures in Space, Cranfield, Royaume-Uni, mai 1996.
- [4] Halalchi H., Laroche E. et Bara G.I. LPV modeling and control of a 2-DOF robotic manipulator based on descriptor representation. 11<sup>th</sup> Pan-American Congress of Applied Mechanics, Foz do Iguacu, Brésil, 2010.
- [5] Spong M.W., Hutchinson, S. et Vidyasagar, M. *Robot modeling and control*. Wiley and Sons, New York, 2005.
- [6] Khalil W. *Commande des robots manipulateurs*. Hermès Science Publications, Paris, 2002.
- [7] Apkarian P. et Adams R.J. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. American Control Conference, Albuquerque, NM, USA, juin 1997.
- [8] Apkarian P., Tuan H.D et Bernussou J. Continuous-Time Analysis, Eigenstructure Assignment, and  $H_2$  Synthesis With Enhanced Linear Matrix Inequalities (LMI) Characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, n°12, pp.1941 – 1946, 2001.
- [9] Ostertag E. *Commande et estimation multivariables - Méthodes linéaires et optimisation quadratique*. Ellipses Technosup, Paris, 2006.
- [10] Leite V.J.S. et Peres P.L.D. An improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, n°3, pp.500 – 504, 2003.
- [11] Boyd S., El Ghaoui L., Feron L., et Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphie, PA, USA, 1994.