

# Identification des systèmes de Hammerstein contenant un élément commutateur bordé par des polynômes

Y. ROCHDI<sup>1</sup>, F. GIRI<sup>\*1</sup>, F.Z. CHAOU<sup>3</sup>, A. BROURI<sup>3</sup>,

<sup>1</sup> LSET, Université Cadi Ayyad/FSTG Marrakech, Maroc.

<sup>2</sup> GREYC, Université Basse Normandie Caen, France.

<sup>3</sup> LAII, Université Mohamed V/EMI Rabat, Maroc.

\* Auteur correspondant : [fouad.giri@unicaen.fr](mailto:fouad.giri@unicaen.fr)

**Résumé**— Ce travail porte sur l'identification paramétrique des systèmes non linéaires blocs de type Hammerstein. L'originalité réside dans le fait que le bloc d'entrée est un élément de type "commutateur" bordé par deux courbes polynomiales. Nous développons une méthode d'identification permettant d'estimer de façon précise tous les paramètres inconnus du système. Les paramètres du sous-système linéaire sont d'abord estimés à l'aide d'un estimateur de type "moindres carrés". Ce dernier est élaboré moyennant une transformation appropriée du modèle initial et une excitation périodique impulsionnelle générée de sorte à réduire la complexité du système en masquant l'effet "commutation" de la non-linéarité. Dans un second temps, les coefficients des polynômes bordant l'élément non-linéaire sont simultanément identifiés à l'aide d'un estimateur approprié en utilisant un signal d'entrée procurant l'excitation nécessaire. Il est formellement démontré que tous les estimateurs mis en jeu sont consistants.

**Mots-clés**— identification paramétrique ; systèmes non linéaires ; modèle de Hammerstein ; opérateur commutateur.

## I. INTRODUCTION

La recherche dans le domaine d'identification des systèmes non linéaires a été très active au cours de cette décennie [1]. Une attention particulière fut accordée aux modèles blocs, alliant de différentes façons des éléments linéaires et non linéaires [2]. Le plus connu de ces modèles est sans aucun doute celui dit de Hammerstein (Fig. 1). L'intérêt accordé à ce dernier s'explique, en partie, par sa capacité à modéliser différents systèmes physiques ([3]-[5]). De nombreux travaux de recherche ont été dédiés à l'identification de ce modèle ([6]-[15]). Toutefois, la plus part de ces travaux repose sur une hypothèse assez restrictive à savoir que la non-linéarité est statique (sans mémoire). L'identification des systèmes de Hammerstein comprenant une non-linéarité à mémoire (de type "jeu", "commutation", etc.) demeure à ce jour un véritable challenge. Peu de travaux ont en effet abordé ce problème ([12]-[15], [17]). Les solutions proposées dans [12]-[15] ne s'appliquent qu'à des non-linéarités, relativement simples puisque bordés par des lignes droites. La solution présentée dans [17] constitue un progrès significatif puisque elle s'adresse au cas de non-linéarités de type jeu flanquées par deux polynômes  $P_1$  et  $P_2$  (Fig. 2). Le présent travail porte sur l'identification des systèmes de Hammerstein dont le bloc non linéaire est un élément de type "commutateur" bordé par deux polynômes ; ceux-ci pouvant être non inversibles, voire entrelacés. La prise en compte d'une si large classe de

non-linéarités élargit considérablement le champ d'application de la méthode d'identification développée dans cette étude. A titre d'exemple, la présence d'une force de Coulomb donne lieu à un phénomène de commutation dans l'équation du mouvement. En outre, si le coefficient du frottement sec n'est pas constant, mais dépend de la position, on obtient une commutation entre des courbes non rectilignes.

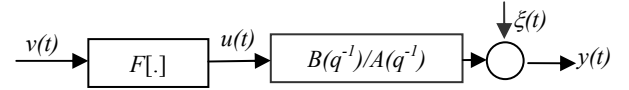


Fig. 1. Système de Hammerstein

## II. POSITION DU PROBLEME D'IDENTIFICATION

On considère les systèmes pouvant être décrit par le modèle de Hammerstein (Fig.1) :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \xi(t) \quad \text{et} \quad u(t) = F[v](t) \quad (1.a)$$

où,

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}, \quad (1.b)$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_nq^{-n} \quad (1.c)$$

$\xi(t)$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes bornée, stationnaire, ergodique et de moyenne nulle. L'opérateur non linéaire  $F[.]$  est de type "commutation" ou "commutateur" bordé par deux polynômes  $P_1(v)$ ,  $P_2(v)$  (Fig. 2). Il est analytiquement défini par:

$$u(t) = \begin{cases} P_1(v(t)) & \text{si } v(t) > v(t-1) \\ u(t-1) & \text{si } v(t) = v(t-1) \\ P_2(v(t)) & \text{si } v(t) < v(t-1) \end{cases} \quad (2)$$

Le système considéré est sujet aux hypothèses suivantes:

**H1.** L'ordre  $n$  du sous système linéaire est connu.  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  sont premiers entre eux. Toutes les racines de  $q^n A(q^{-1})$  sont strictement à l'intérieur du cercle unité.

**H2.**  $B(1) \neq 0$  ce qui signifie un gain statique non nul du sous-système linéaire.

**H3.** Les polynômes  $P_1(v)$ ,  $P_2(v)$  sont de degré connu  $(m-1)$ . En plus, si l'on s'intéresse à l'identification de  $F[\cdot]$  dans un intervalle de travail  $[v_m, v_M]$ , et on suppose que  $u_M - u_m \neq 0$  avec  $u_M \stackrel{def}{=} P_1(v_M)$  et  $u_m \stackrel{def}{=} P_2(v_m)$ .

*Remarque 1.* L'hypothèse H2 exclut les systèmes pour lesquels  $B(I) = 0$ . Ces systèmes sont assez rares en pratique et sont facilement reconnaissables. Ils peuvent être abordés en prenant comme signal d'entrée la quantité  $(I - q^{-1})u(t)$ . Abstraction faite de l'effet de commutation de l'opérateur  $F[\cdot]$ , l'intérêt du présent travail, par rapport à [12]-[14], réside dans le fait que cet opérateur est bordé par des courbes polynômiales, non nécessairement des lignes droites. En outre, ces bords ne sont pas forcément strictement monotones et parallèles, comme c'est le cas dans [15]. Par conséquent, il est permis ici à ces bords d'être non inversibles voire entrelacées. Ceci est crucial si l'on veut que la méthode d'identification proposée s'applique aussi au cas de non-linéarités statiques. En effet, un opérateur statique peut être vu comme un opérateur commutateur dont les bords se superposent. En plus, alors que dans [14] il est supposé que  $v_m = -v_M$ , aucune hypothèse ne porte présentement sur le signe de  $v_m$  et  $v_M$ . D'un autre côté, comme le signal  $u(t)$  est non accessible à la mesure les valeurs  $u_M$  et  $u_m$ , ne sont pas connues a priori. Enfin, à l'exception des hypothèses H1-H3, le système (1a-c) est vraiment arbitraire. En particulier, Les paramètres  $(a_i, b_i)$  sont inconnus et les coefficients de tête  $(b_1, b_2, \dots)$  peuvent être nuls, ce qui signifie que le retard pur n'est pas connu.

Notre objectif est de concevoir une méthode d'identification capable de fournir des estimations consistantes de tous les paramètres inconnus : ceux du sous-système linéaire  $(B(q^{-1}), A(q^{-1}))$  et ceux des deux polynômes  $P_1(v)$  et  $P_2(v)$  caractérisant l'opérateur  $F[\cdot]$ . A cet effet, il faudra surmonter deux difficultés majeures: (i) l'effet mémoire de  $F[\cdot]$ ; (ii) le fait que le signal interne  $u(t)$  n'est pas mesurable; donc seules les séquences externes  $v(t)$  et  $y(t)$  peuvent être utilisées dans le processus d'identification (Fig. 1).

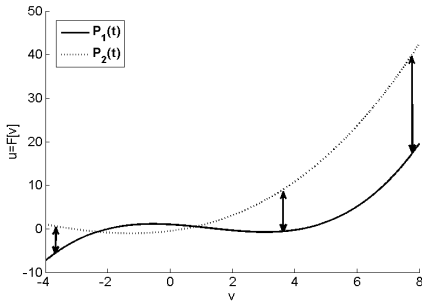


Fig. 2. Exemple d'opérateur  $F[\cdot]$  caractérisé par les polynômes  $P_1(\cdot)$  et  $P_2(\cdot)$

### III. IDENTIFICATION DU SOUS SYSTEME LINEAIRE (ISL)

Le schéma d'identification *ISL* est composé de trois étapes. Au début, on procède au choix d'un modèle sur lequel se

basera le processus d'identification. Ce modèle est ensuite transformé pour surmonter la difficulté imposée par le fait que le signal  $u(t)$  n'est pas accessible à la mesure. Cette nouvelle représentation, invoque de manière linéaire les paramètres du sous système linéaire, et sera donc utilisée pour estimer ces paramètres, via un algorithme classique de type moindres carrés. Enfin, pour garantir la consistance des estimés, on conçoit une séquence d'entrée ayant la propriété d'excitation persistante.

#### A. Choix du modèle

Le modèle initial est caractérisé par  $(A(q^{-1}), B(q^{-1}), F[\cdot])$ . le signal interne n'étant pas accessible, le système peut être aussi représenté par le modèle  $(A^*(q^{-1}), B^*(q^{-1}), F^*[\cdot])$ , où:

$$(A^*(q^{-1}) = A(q^{-1}), B^*(q^{-1}) = \alpha B(q^{-1}), F^*[v](t) = \frac{1}{\alpha} F[v](t)) \quad (3a)$$

$$\alpha \stackrel{def}{=} u_m - u_M \neq 0 \quad (3b)$$

$$u_m \stackrel{def}{=} P_2(v_m); u_M \stackrel{def}{=} P_1(v_M) \quad (3c)$$

(3b) est garantie par l'hypothèse H3. Dans la suite de l'article, on utilisera les notations suivantes:

$$\begin{aligned} A^*(q^{-1}) &= 1 + a^*_1 q^{-1} + \dots + a^*_n q^{-n}, \\ B^*(q^{-1}) &= b^*_1 q^{-1} + \dots + b^*_n q^{-n} \end{aligned} \quad (3d)$$

avec  $a^*_i = a_i$  et  $b^*_i = \alpha b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

L'opérateur  $F^*[\cdot]$  est aussi un opérateur de type "commutateur" caractérisé par les polynômes suivants :

$$P_1^*(v) = \frac{P_1(v)}{\alpha} \text{ et } P_2^*(v) = \frac{P_2(v)}{\alpha} \quad (4)$$

En utilisant les équations (3a-d), le système (1a-b)-(2) peut être décrit aussi par :

$$A^*(q^{-1})y(t) = B^*(q^{-1})u^*(t) + \xi(t) \quad (5a)$$

$$u^*(t) = F^*[v](t) \quad (5b)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} P_1^*(v) & \text{si } v(t) > v(t-1) \\ u^*(t-1) & \text{si } v(t) = v(t-1) \\ P_2^*(v) & \text{si } v(t) < v(t-1) \end{cases} \quad (6)$$

Le nouveau modèle (5a-b)-(6) par rapport au modèle initial (1a-c)-(2) permet de réduire l'incertitude sur  $u(t)$ . En effet, soit :

$$u_m^* \stackrel{def}{=} P_2^*(v_m); u_M^* \stackrel{def}{=} P_1^*(v_M) \quad (7a)$$

(7a), (4) et (3b-c) permettent de déduire aisément que:

$$u_m^* - u_M^* = 1 \quad (7b)$$

Toutefois, le signal interne  $u^*(t)$  est aussi non mesurable. Ainsi, la représentation (5a-b) sera transformée dans la section suivante, pour surmonter cette difficulté.

## B. Modèle centré pour ISL

Soit  $\{y_I(t)\}$ , la réponse de (5a-b) obtenue pour la séquence d'entrée suivante:

$$v_I(t) = \begin{cases} v_m & \text{si } t = 0 \\ v_M & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Cet échelon force le signal interne  $u_1^*(t) = F^*[v_1](t)$  à prendre la valeur  $u_M^* = P_1^*(v_M)$  pour  $t \geq 1$  quelque soit l'état initial inconnu  $u_1^*(0)$ . Par conséquent le signal  $\{y_I(t)\}$  vérifie (pour  $t > 0$ ) l'équation suivante:

$$A^*(q^{-1})y_I(t) = B^*(q^{-1})u_1^*(t) + \xi_1(t) \quad (9a)$$

$$u_1^*(t) = F^*[v_1](t) = u_M^* \quad (9b)$$

où  $\xi_1(t)$  est la réalisation du processus stochastique  $\xi(t)$  pendant l'expérience en cours. La stabilité asymptotique de (9a-b) implique qu'après un régime transitoire,  $y_I(t)$  est un signal constant, au bruit supplémentaire  $\xi_1(t)$  près. En effet, en calculant la moyenne temporelle sur un intervalle  $1 \leq t \leq L$ , on obtient :

$$A^*(q^{-1})\bar{y}_1(L) = B^*(q^{-1})u_M^* + \bar{\xi}_1(L) \quad (10)$$

Comme  $\xi(t)$  est de moyenne statistique nulle, et ergodique, alors on peut affirmer que  $\bar{\xi}_1(L) \rightarrow 0$  quand  $L \rightarrow \infty$  (avec la probabilité 1). Soit  $\bar{y}_1$  la limite  $\bar{y}_1(L)$  quand  $L \rightarrow \infty$ . Puisque le système est asymptotiquement stable, il s'ensuit alors qu'une telle limite existe et elle satisfait l'équation:

$$A^*(q^{-1})\bar{y}_1 = B^*(1)u_M^* \quad (11)$$

En pratique,  $\bar{y}_1$  peut être calculée à partir d'un nombre suffisant d'échantillons  $\{y_I(t), t = 1, \dots, L\}$ . En combinant (11) et (5a) on obtient:

$$A^*(q^{-1})(y(t) - \bar{y}_1) = B^*(q^{-1})(u^*(t) - u_M^*) + \zeta(t) \quad (12)$$

Introduisons les variables centrées suivantes:

$$\tilde{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) - \bar{y}_1 \quad ; \quad \tilde{u}^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} u^*(t) - u_M^* \quad (13)$$

Ceci permet de décrire le système à identifier (5a-b) par le nouveau modèle compact suivant:

$$A^*(q^{-1})\tilde{y}(t) = B^*(q^{-1})\tilde{u}^*(t) + \xi(t) \quad (14)$$

Ce modèle possède des propriétés intéressantes; D'abord en utilisant (6), (7a-b) et (13) (voir Fig. 2), on déduit que :

$$v(t) = v_M \Rightarrow \tilde{u}^*(t) = 0 \quad (15a)$$

$$v(t) = v_m \Rightarrow \tilde{u}^*(t) = 1 \quad (15b)$$

Ainsi, tant que la séquence d'entrée  $v(t)$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{v_m, v_M\}$ , alors le signal interne, du modèle (14),  $\tilde{u}^*(t)$  est parfaitement connu: il vaut 0 ou 1. D'autre part, remarquons que (14) est linéaire vis à vis des paramètres inconnus. Elle s'écrit alors sous forme d'une régression linéaire:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{\Phi}(t)^T \Theta^* + \xi(t) \quad (16)$$

où :

$$\tilde{\Phi}(t)^T = [-\tilde{y}(t-1) \quad \dots \quad -\tilde{y}(t-n) \quad \tilde{u}(t-1) \quad \dots \quad \tilde{u}(t-n)] \quad (17a)$$

$$\Theta^* = [a_1^* \quad \dots \quad a_n^* \quad b_1^* \quad \dots \quad b_n^*]^T \quad (17b)$$

## C. Estimation des paramètres du sous système linéaire:

L'estimation du vecteur de paramètres inconnus  $\Theta^*$  peut se faire en se basant sur la forme de régression (16). Il est important de rappeler que la séquence d'entrée  $v(t)$  doit prendre ses valeurs dans l'ensemble  $\{v_m, v_M\}$ , de telle sorte à ce que  $\tilde{u}^*(t)$  soit connue. Etant donné certain nombre suffisant de données  $\{v(t), y(t); 1 \leq t \leq N\}$ , on peut procéder à une estimation paramétrique en utilisant l'algorithme classique des moindres carrés suivant:

$$\hat{\theta}(N) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\Phi}(i)\tilde{\Phi}(i)^T \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\Phi}(i)\tilde{y}(i) \right] \quad (18)$$

## D. Entrée excitante persistante pour l'ISL

Un choix approprié de l'entrée  $v(t)$ , est celui qui tient compte des deux contraintes suivantes: *i*)  $v(t)$  doit prendre ses valeurs dans l'ensemble  $\{v_m, v_M\}$  de telle sorte que la séquence  $\tilde{u}^*(t)$  puisse être connue. *ii*) Le vecteur de régression  $\tilde{\Phi}(t)$  doit satisfaire la propriété d'excitation persistante. En se basant sur les résultats établis dans le Lemme technique [15], on propose comme signal d'entrée la séquence périodique suivante (de période  $T = 4n$ ), où  $k$  est un entier quelconque,  $t_k = kT$  :

$$v_2(t) = \begin{cases} v_m & \text{pour } t = t_k + 2n \\ v_M & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (19)$$

Une telle séquence est illustrée par l'exemple donné à la Fig. 3.

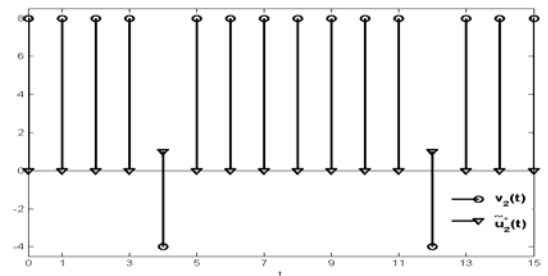


Fig. 3. Le signal d'excitation  $v_2(t)$  et le signal interne correspondant

$$\tilde{u}_2^*(t) \text{ pour } n=2, v_m = -4, v_M = 8$$

En prenant en considération les implications (15a-b) le signal interne résultant  $\tilde{u}^*(t)$ , noté  $\tilde{u}_2^*(t)$  (pendant cette expérience), est défini analytiquement par:

$$\tilde{u}_2^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = t_k + 2n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (20)$$

#### E. Analyse de la consistance de l'estimateur (18)

Introduisons, d'abord, le vecteur auxiliaire suivant:

$$\tilde{Z}(t)^T = [-\tilde{z}(t-1) \quad \dots \quad -\tilde{z}(t-n) \quad \tilde{u}_2^*(t-1) \quad \dots \quad \tilde{u}_2^*(t-n)] \quad (21)$$

où  $\tilde{z}(t)$  est la sortie du système non perturbée (14), c'est à dire:

$$A^*(q^{-1})\tilde{z}(t) = B^*(q^{-1})\tilde{u}_2^*(t) \quad (22)$$

Le vecteur de régression, non perturbé,  $\tilde{Z}(t)^T$ , et le vecteur de régression perturbé  $\tilde{\Phi}(t)^T$  possèdent les propriétés, bien connues, et citées dans la proposition suivante, prouvée dans [18].

*Proposition 1.* Considérons le système de type Hammerstein décrit par (5a-b), sujet aux hypothèses H1-H3, comprenant un élément non linéaire commutateur  $F^*[\cdot]$ , bordé par deux polynômes ( $P_1^*(\cdot), P_2^*(\cdot)$ ). Si ce système est excité par la séquence d'entrée (19), alors:

i) Le vecteur de régression, non perturbé,  $\tilde{Z}(t)$  défini par (21)-(22) est fortement excitant persistant dans le sens où il existe une constante réelle  $\lambda$ , non nulle, telle qu'on a pour tout entier  $t$ :

$$\sum_{i=0}^{4n-1} \tilde{Z}(t+i)\tilde{Z}(t+i)^T > \lambda I \quad (23)$$

où  $I$  est la matrice identité avec les dimensions appropriées.

ii) Le vecteur de régression, perturbé,  $\tilde{\Phi}(t)$  est excitant persistant de manière plus faible, au sens:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\Phi}(i)\tilde{\Phi}(i)^T > \lambda I \quad (\text{avec probabilité } 1) \quad (24)$$

où  $I$  et  $\lambda$  sont définis comme dans (23).

iii) L'estimateur (18) est consistant, c'est à dire,  $\hat{\theta}(N) \rightarrow \theta^*$  quand  $N \rightarrow \infty$  (avec probabilité 1)  $\square$

#### IV. IDENTIFICATION DE L'OPERATEUR NON LINEAIRE (INL)

Le schéma d'identification INL développé dans cette section, a pour objectif d'estimer, en se basant sur la représentation du système (5a-b), l'opérateur non linéaire  $F^*[\cdot]$ , soit alors l'estimation des deux polynômes  $P_1^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{m-1} c_{1i}^* v^i$  et  $P_2^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{m-1} c_{2i}^* v^i$ . Ceci revient donc à estimer les deux vecteurs de coefficients suivants:

$$C_1^* \stackrel{\text{def}}{=} [c_{10}^* \quad c_{11}^* \quad \dots \quad c_{1m-1}^*]^T; C_2^* \stackrel{\text{def}}{=} [c_{20}^* \quad c_{21}^* \quad \dots \quad c_{2m-1}^*]^T \quad (25)$$

#### A. Signal d'excitation pour le schéma INL

Comme pour le schéma ISL, le choix du signal d'excitation joue ici aussi un rôle capital. Dans cette section, on utilise un signal d'excitation périodique de période  $T = 2m(n+1)$ . Ce signal, noté  $v_3(t)$ , est choisi de telle sorte à ce que le point de fonctionnement ( $v_3(t), u_3^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} F^*[v_3](t)$ ) se trouve pendant les intervalles  $[kT, kT + 0.5T[$  sur le polynôme  $P_1^*$  et pendant  $[kT + 0.5T, (k+1)T[$  sur le polynôme  $P_2^*$ . Par convention, on a choisi d'appeler  $P_1^*$  le polynôme sur lequel se déplace le point de fonctionnement ( $v_3(t), u_3^*(t)$ ) lorsque  $\dot{v}(t) > 0$ ;  $P_2^*$  le polynôme sur lequel se déplace le point de fonctionnement ( $v_3(t), u_3^*(t)$ ) lorsque  $\dot{v}(t) < 0$ . La séquence  $v_3(t)$  est définie dans un intervalle  $[kT, (k+1)T[$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), comme suit:

$$v_3(2m(n+1)k + j(n+1) + i) = \begin{cases} v_m + (j+1)\Delta & \text{pour } j = 0, \dots, m-1 \\ v_M - (j-m+1)\Delta & \text{pour } j = m, \dots, 2m-1 \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{où } i = 0, 1, \dots, n \quad \Delta = \frac{v_M - v_m}{m}$$

Un exemple de signal d'excitation  $v_3(t)$  est illustré par la Fig. 5, où  $m = 4, n = 2, v_m = -4, v_M = 8$ . Ce signal  $v_3(t)$  est constant par paliers (Chaque palier est de largeur  $(n+1)$ ); Il est croissant pour une moitié de la période puis décroissant dans l'autre moitié. Le sens de variation de  $v_3(t)$  change donc deux fois par période: au début de la période ( $t = kT = 2m(n+1)k$ ) ce qui permet un saut de  $P_2^*(\cdot)$  vers  $P_1^*(\cdot)$  et au milieu de la période ( $t = kT + 0.5T = 2m(n+1)k + m(n+1)$ ) ce qui permet un saut de  $P_1^*(\cdot)$  vers  $P_2^*(\cdot)$ .

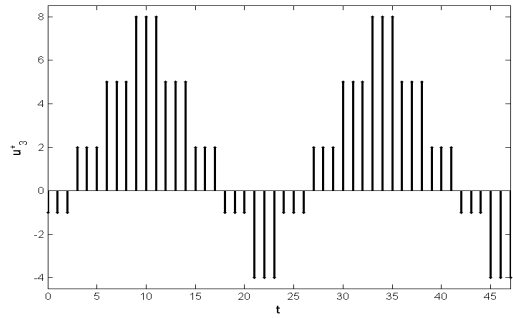


Fig. 5 Un exemple de séquence périodique  $v_3(t)$

#### B. Estimation de $C_1^*$ et $C_2^*$

La procédure d'estimation de  $C_1^*$ , qui sera détaillée dans cette section, exploite les données (entrée/sortie) des premières moitiés des périodes ( $[kT, kT + 0.5T[$ ). La procédure d'estimation de  $C_2^*$  est semblable à celle de  $C_1^*$  et exploite les données des secondes moitiés des périodes ( $[kT + 0.5T, (k+1)T[$ ). Il faut signaler ici qu'il s'agit de la même expérience où le système est excité par  $v_3(t)$ .

Pour alléger les notations, on introduit la variable temporelle suivante:

$$\begin{aligned} t_{kj} &= 2m(n+1)k + j(n+1) \text{ avec } k=0, 1, 2, \dots; \\ j &= 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (27)$$

Il est aisé de constater que:

$$\begin{aligned} &\{t_{kj} + i; j=0,1,\dots,m-1; i=0,1,\dots,n, k \in N\} \\ &= \bigcup_{k \in N} [2m(n+1)k, 2m(n+1)k + (m-1)(n+1) + n] \end{aligned} \quad (28)$$

Cette séquence est composée des instants où le point de fonctionnement  $(v_3(t), u_3^*(t))$  est sur le polynôme  $P_1^*(\cdot)$ . Ceci nous permet d'écrire pour tout  $k \in N$ ,  $j \in \{0,1,2,\dots,m-1\}$ ,  $i=0,1,\dots,n$ :

$$u_3^*(t_{kj} + i) = P_1^*(v_3(t_{kj} + i)) = \sum_{p=0}^{m-1} c_{1p}^* v_3^p(t_{kj} + i) \quad (29)$$

$$\text{et } A^*(q^{-1})y(t_{kj} + i) = B^*(q^{-1})u_3^*(t_{kj} + i) + \xi(t_{kj} + i) \quad (30)$$

D'autre part, puisque le signal  $v_3(t)$  est constant par paliers alors  $u_3^*(t)$  est aussi constant par paliers; en effet, à partir de (26) et pour tout  $k \in N$  et  $j \in \{0,1,\dots,m-1\}$ :

$$v_3(2m(n+1)k + j(n+1)) = \dots = v_3(2m(n+1)k + j(n+1) + n) \quad (31)$$

Notons que les instants  $2m(n+1)k + j(n+1) + i$  (où  $i=0,1,\dots,n$ ), utilisés dans l'équation (31) appartient à la séquence  $\{t_{kj} + i\}$  (28), alors l'équation (29) est applicable, ce qui implique, en utilisant (26):

$$\begin{aligned} u_3^*(2m(n+1)k + j(n+1) + i) &= \\ \sum_{p=0}^{m-1} c_{1p}^* v_3^p(2m(n+1)k + j(n+1) + i) &= \sum_{p=0}^{m-1} c_{1p}^* (v_m + (j+1)\Delta)^p \\ (\text{pour tout } k \in N \text{ et } j \in \{0,\dots,m-1\}, i=0,1,\dots,n) & \end{aligned} \quad (32)$$

En introduisant (32) dans (30), on obtient, pour tout  $k \in N$ ,  $j \in \{0,1,2,\dots,m-1\}$ , et  $i=0,1,\dots,n$ :

$$A^*(q^{-1})y(t_{kj} + i) = B^*(1) \sum_{p=0}^{m-1} c_{1p}^* (v_m + (j+1)\Delta)^p + \xi(t_{kj} + i) \quad (33)$$

Introduisons maintenant les notations suivantes:

$$Y_j(k) = \frac{A^*(q^{-1})y(t_{kj})}{B^*(1)} \text{ et } Z_j(k) = \frac{\xi(t_{kj})}{B^*(1)},$$

ainsi l'équation (33) devient, pour tout  $k \in N$  et  $j \in \{0,\dots,m-1\}$ :

$$Y_j(k) = \sum_{p=0}^{m-1} c_{1p}^* (v_m + (j+1)\Delta)^p + Z_j(k) \quad (34)$$

Soit sous forme matricielle:

$$Y_j(k) = M_{1j}^T C_1^* + Z_j(k) \quad (35)$$

où  $M_{1j}^T = [1 \quad v_m + (j+1)\Delta \quad \dots \quad (v_m + (j+1)\Delta)^{m-1}]$  et

$$C_1^* = [c_{10}^* \quad c_{11}^* \quad \dots \quad c_{1m-1}^*]^T.$$

L'équation (34) ne pas être directement utilisée puisque  $Z_j(k)$  est inconnu. Pour cela, on utilisera un filtrage transversal pour éliminer l'inconnu  $Z_j(k)$ . Ce filtrage exploite d'une part, le fait que le signal d'entrée  $v_3(t)$ , le signal interne  $u_3^*(t)$  et le signal de sortie non perturbé sont périodiques de période  $T = 2m(n+1)$  en régime permanent, et d'autre part, l'ergodicité du terme perturbateur  $\xi(t)$ . On définit les moyennes transversales comme suit:

$$\bar{Y}_j(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_j(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^*(q^{-1})y(t_{kj})}{B^*(1)} \quad (36a)$$

$$\bar{Z}_j(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z_j(k) = \frac{1}{NB^*(1)} \sum_{k=0}^{N-1} \xi(t_{kj}) \quad (36b)$$

Remarquons que, dans l'équation (35), le terme  $M_{1j}^T C_1^*$  ne dépend pas de  $k$ ; En moyennant les deux membres de (35) on obtient que pour tout  $k \in N$  et  $j \in \{0,1,\dots,m-1\}$ :

$$\bar{Y}_j(N) = M_{1j}^T C_1^* + \bar{Z}_j(N) \quad (37)$$

Ou sous forme matricielle compacte:

$$\bar{Y}(N) = M_1 C_1^* + \bar{Z}(N) \quad (38)$$

où  $\bar{Y}(N) = [\bar{Y}_0(N) \quad \bar{Y}_1(N) \quad \bar{Y}_2(N) \quad \dots \quad \bar{Y}_{m-1}(N)]^T$

$\bar{Z}(N) = [\bar{Z}_0(N) \quad \bar{Z}_1(N) \quad \bar{Z}_2(N) \quad \dots \quad \bar{Z}_{m-1}(N)]^T$

$M_1 = [M_{10} \quad M_{11} \quad M_{12} \quad \dots \quad M_{1m-1}]^T$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & (v_m + \Delta) & \dots & (v_m + \Delta)^{m-1} \\ 1 & (v_m + 2\Delta) & \dots & (v_m + 2\Delta)^{m-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & (v_m + m\Delta) & \dots & (v_m + m\Delta)^{m-1} \end{bmatrix}$$

Puisque la matrice  $M_1$  est inversible, le vecteur des coefficients  $C_1^*$  à estimer s'écrit:

$$C_1^* = M_1^{-1}(\bar{Y}(N) - \bar{Z}(N)) \quad (39)$$

Cette équation suggère alors l'estimateur suivant pour  $C_1^*$ :

$$\hat{C}_1^*(N, L) = M_1^{-1} \hat{\bar{Y}}(N, L) \quad (40a)$$

où  $\hat{\bar{Y}}(N, L) = [\hat{\bar{Y}}_0(N, L) \quad \hat{\bar{Y}}_1(N, L) \quad \dots \quad \hat{\bar{Y}}_{m-1}(N, L)]^T$

$$\text{et } \hat{\bar{Y}}_j(N, L) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\hat{A}^*(q^{-1}, L)y(t_{kj})}{\hat{B}^*(1, L)} \quad (40b)$$

$\hat{A}^*(q^{-1}, L), \hat{B}^*(q^{-1}, L)$  sont les estimés obtenus à partir de  $\hat{\theta}(L)$ ; ce dernier étant déjà déterminé via le schéma d'identification ISL. La consistance de l'estimateur précédent est décrite dans la proposition suivante, démontrée dans [18].

*Proposition 2.* Considérons le système (5a-b), soumis aux hypothèses H1-H3, comportant l'opérateur non linéaire commutateur ( $F^*[\cdot]$ ) caractérisé par deux polynômes  $P_1^*(\cdot)$  et

$P_2^*(\cdot)$ . Si le système est excité par une séquence d'entrée de type (26), alors:

i) Le système peut être décrit par le modèle à erreur d'équation (33), qui conduit à l'équation vectorielle (39).

ii) L'estimateur (40a-b) est consistant au sens :  $\hat{C}_1^*(N, L) \rightarrow C_1^*$  (avec probabilité 1) quand  $N \rightarrow \infty$  et  $L \rightarrow \infty$  □

L'estimation de  $C_2^*$  se fait en parallèle avec celle de  $C_1^*$  en adoptant la même procédure, mais en exploitant cette fois ci les données (entrée/sortie) prélevées aux instants où le point de fonctionnement est sur  $P_2^*(\cdot)$  ([18]).

## V. SIMULATIONS

Considérons un système d'ordre 2 caractérisé par:  $A(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.56q^{-2}$ ;  $B(q^{-1}) = q^{-1} - 0.5q^{-2}$ ;  $\xi(t)$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dans l'intervalle  $[-5, +5]$ , et de moyenne nulle.  $F[\cdot]$  est caractérisé par les deux polynômes suivant:  $P_1(v) = 1 - 0.4v - 0.3v^2 + 0.08v^3$

$$P_2(v) = -0.5 + 0.9v + 0.4v^2 + 0.02v^3$$

L'intervalle de travail est  $[v_m, v_M] = [-4, 8]$ , il s'ensuit alors que:  $u_m = P_2(v_m) = 1.02$ ,  $u_M = P_1(v_M) = 19.56$ , et  $\alpha = u_m - u_M = -18.54$ . Le vecteur des paramètres  $\theta^*$  ainsi que les vecteurs de coefficients des polynômes  $C_1^*$  et  $C_2^*$  du modèle à estimer (5a-b) sont donnés dans les tables 2-3. Dans un premier temps, on procède à une expérience où le système est excité par l'échelon  $v_1(t)$  défini par (8), et on prélève  $L$  échantillons de la sortie. La moyenne de la sortie calculée sur l'intervalle  $[0, L-1]$  donne:  $\bar{y}_1 \cong 161.8$  pour  $L=500$ ; et  $\bar{y}_1 \cong 163.4$  pour  $L=2000$ . Théoriquement, en absence de perturbation on obtiendrait  $\bar{y}_1 = 163.0$ . Ensuite on procède à une expérience où le système est excité par la séquence  $v_2(t)$  définie par (19), de période  $T=4n=8$  (Fig. 3). L'estimé  $\hat{\theta}$  (de  $\theta^*$ ) obtenu par l'estimateur (18) est donné dans la Table 2. Enfin le système est excité par la séquence  $v_3(t)$  (Fig. 3) définie par (26) et les vecteurs des coefficients  $C_1^*$  et  $C_2^*$  sont estimés en utilisant l'estimateur (40a-b). Les estimés  $\hat{C}_1^*(N, L)$  et  $\hat{C}_2^*(N, L)$  obtenus sont donnés dans la table 3, pour  $N=4000$ ,  $L=2000$ .

TABLE 2

PARAMETRES DU SOUS SYSTEME LINEAIRE ET LEURS ESTIMES

$\theta^*$	$[-1.5 \quad 0.56 \quad -18.54 \quad 9.27]^T$
$\hat{\theta}$ (N = 4000)	$[-1.499 \quad 0.558 \quad -18.464 \quad 9.239]^T$
$\hat{\theta}$ (N = 400)	$[-1.48 \quad 0.546 \quad -18.830 \quad 8.613]^T$

TABLE 3

VECTEURS DES COEFFICIENTS  $C_1^*$ ,  $C_2^*$  ET LEUR ESTIMES

$C_1^*$	$[-0.0539 \quad 0.0216 \quad 0.0162 \quad -0.0043]^T$
$\hat{C}_1^*(N, L)$	$[-0.0524 \quad 0.0210 \quad 0.0157 \quad -0.0042]^T$

$C_2^*$	$[-0.0269 \quad 0.0485 \quad -0.0216 \quad -0.0011]^T$
$\hat{C}_2^*(N, L)$	$[-0.0238 \quad 0.0430 \quad -0.0212 \quad -0.0012]^T$

Les résultats des simulations confirment les résultats théoriques prouvés auparavant et attestent de l'efficacité du schéma d'identification, en présence d'un bruit notable.

## VI. CONCLUSION

La principale contribution de ce travail réside d'abord dans le type de non linéarité considérée, et aussi dans la conception de séquences d'excitation originales, permettant de masquer l'effet de commutation de l'opérateur non linéaire, afin d'estimer d'abord les paramètres du sous système linéaire, ensuite ceux des deux polynômes caractérisant l'opérateur non linéaire. En plus, la consistance des estimateurs utilisés est étudiée et prouvée analytiquement puis validée par des simulations.

## REFERENCES

- [1] Ljung L. Perspectives on system identification. IFAC World Congress, Seoul, Korea, pp.7172-7184, 6-11 Juillet 2008.
- [2] Greblicki W. et M. Pawlak. *Non-parametric System Identification*. Cambridge University Press, 2008.
- [3] Eskinat E., Johnson S. et Luyben W. L. Use of Hammerstein models in identification of nonlinear systems, *AIChE. J.*, vol. 37, no. 2, pp 255-268, 1991.
- [4] Kim J. et Konstantinou K. Digital predistortion of wideband signals based on power amplifier model with memory, *IEEE Electronics Letters*, vol. 37, n° 23, pp. 1417-1418, 2001.
- [5] Hunter I. W. et Korenberg M. J. The identification of nonlinear biological systems: Wiener and Hammerstein cascade models, *Biological Cybernetics*, vol. 55, pp 135-144, 1986.
- [6] Narendra K. S. et Gallman P. G. An iterative method for the identification of nonlinear systems using a Hammerstein model, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, vol. 11, n° 7, pp. 546-550, 1966.
- [7] Stoica P. and T. Söderström, Instrumental-variable methods for identification of Hammerstein systems, *International Journal of Control*, vol. 35, no. 3, pp 459-476, 1982.
- [8] Bai E.W. and D. Li, Convergence of the iterative Hammerstein system identification algorithm, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 49, no. 11, pp 1929-1940, 2004.
- [9] Greblicki W., Stochastic approximation in nonparametric identification of Hammerstein systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 47, no. 11, pp 1800-1810, Nov. 2002.
- [10] Zhao W. X. and H. F. Chen, Recursive identification for Hammerstein systems with ARX subsystem, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 51, no. 12, pp 1966-1974, 2006.
- [11] Chaoui F. Z., Giri F., Rochdi Y., Haloua M., Naitali A. System identification based on Hammerstein model, *International Journal of Control*, vol. 78, no. 6, pp 430-442, 2005.
- [12] Bai E.W. Identification of linear systems with hard input nonlinearities of known structure. *Automatica*, vol 38, pp. 853-860, 2002.
- [13] Cerone V., Regruto D. Bounding the parameters of linear systems with input backlash. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, n° , pp. 31-536, 2007.
- [14] Giri F., Y. Rochdi, F.Z. Chaoui, A. Brouri. Identification of Hammerstein systems in presence of backlash and relay nonlinearities. *Automatica*, vol. 44, pp 767-775, 2008.
- [15] Giri F., Chaoui F.Z., Rochdi Y. Interval excitation through impulse sequences. A technical lemma. *Automatica*, vol. 38, pp. 457-465, 2002.
- [16] G. C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive filtering, prediction and control*. Prentice-Hall, 1983.
- [17] Giri F., Rochdi Y., Elayan E., Brouri A., Chaoui F.Z. Hammerstein system identification in presence of hysteresis-backlash nonlinearity. IFAC World Congress, Seoul, Korea, pp.7859-7864, 6-11 Juillet 2008.
- [18] Version détaillée du présent travail, pouvant être fourni sur demande.