

Analyse de la fluidification de réseaux de Petri stochastiques par régions

Edouard LECLERCQ, Dimitri LEFEBVRE

GREAH - Université du Havre

25, rue Philippe LEBON - BP 540 - 76058 LE HAVRE Cedex

edouard.leclercq,dimitri.lefebvre@univ-lehavre.fr

Résumé— Les réseaux de Petri stochastiques permettent de modéliser les processus de pannes et réparations pour les systèmes réparables. Dans cet article on s'intéresse à la fluidification de réseaux de Petri stochastiques permettant ainsi une étude aisée de leur comportement asymptotique à l'aide d'outils liés à l'automatique continue. La contribution de cet article porte sur l'étude des limites de la fluidification selon la structure du réseau qui est analysé à l'aide d'une découpe de l'espace des marquages en différentes régions. La notion de région critique permet de caractériser certains réseaux pour lesquels la fluidification n'est pas possible.

Mots clés— fluidification, réseaux de Petri stochastiques, réseaux de Petri continus, synchronisation, découpage en régions.

I. INTRODUCTION

Les systèmes à événements discrets, de plus en plus présents, aussi bien dans les systèmes de production que ceux liés à la communication ou aux trafics routiers ou aériens, peuvent être notamment modélisés à l'aide de réseaux de Petri (RdP). De plus, les études de la fiabilité des systèmes complexes font généralement appel à des modèles stochastiques à événements discrets, tels les modèles de Markov ou les réseaux de Petri stochastiques [1][2]. Dans le cas où l'on souhaite utiliser ces outils pour obtenir le comportement moyen du système, les simulations sont généralement coûteuses en temps dû à l'explosion combinatoire de l'espace d'état en fonction du marquage.

Une méthode de relaxation initiée par David en France [3], Silva en Espagne [4] et par Trivedi aux USA [5], consiste à fluidifier le réseau de Petri stochastique, c'est-à-dire transformer ce dernier en un réseau de Petri continu qui permettra ainsi l'utilisation d'outils de l'automatique continue afin de déterminer le régime permanent du système modélisé. Les approches européennes et américaines se distinguent de part la nature et l'application de la fluidification. Pour Trivedi, la fluidification est liée au marquage et est partielle, seul le marquage de certaines places est fluidifié, un modèle hybride est ainsi obtenu. Pour l'approche de David et Silva la fluidification est liée à la vitesse des transitions ainsi qu'aux marquages des places. Ces différents travaux permettent d'obtenir une approximation du comportement moyen d'un réseau stochastique lorsque le marquage important entraîne des coûts de calcul élevés.

Le but que nous nous sommes fixés dans cet article est d'obtenir un réseau de Petri continu dont le comportement en régime permanent est équivalent au comportement moyen d'un réseau de Petri stochastique donné, notamment pour de faibles marquages. Selon la nature du réseau de Petri stochastique, l'existence d'une solution est discutée. La classification est faite selon différents points de vue structurels : P-semi-flots unitaires (réseaux ordinaires) ou non

(réseaux non ordinaires), présence de synchronisations ou non, Mono T-Semi-flots ou non, présence de conflits ou non.

L'article se compose de trois parties. Dans la seconde partie nous rappelons les définitions des RdP stochastiques et continus ainsi que l'obtention de leur régime permanent. Nous introduisons aussi la notion de régions et de régions critiques. Dans la troisième partie la fluidification est abordée en distinguant les réseaux avec synchronisation ou sans synchronisation, les résultats présentés sont ensuite appliqués à plusieurs modèles couramment cités dans la littérature.

II. RESEAUX DE PETRI ET DECOUPAGE EN REGIONS

A. Réseau de Petri

Un réseau de Petri est un graphe orienté biparti défini par le quadruplet $\langle P, T, W^{PR}, W^{PO} \rangle$ tel que P, T sont deux ensembles finis de sommets dénommés places et transitions avec $|P| = n, |T| = q$ et $P \cap T = \emptyset$. $W^{PR} = (w_{ij}^{PR}) \in (\mathbf{Z}^+)^{n \times q}$ avec $w_{ij}^{PR} = \text{Pre}(P_i, T_j)$ le poids de l'arc dirigé de P_i vers T_j , W^{PR} est l'application d'incidence avant et $W^{PO} = (w_{ij}^{PO}) \in (\mathbf{Z}^+)^{n \times q}$ avec $w_{ij}^{PO} = \text{Post}(P_i, T_j)$, le poids de l'arc dirigé de T_j vers P_i , W^{PO} est l'application d'incidence arrière [3]. La matrice d'incidence W du réseau est définie par :

$$W = W^{PO} - W^{PR} \in (\mathbf{Z})^{n \times q} \quad (1)$$

Le marquage M du RdP est l'application de l'ensemble des places P vers $(\mathbf{Z}^+)^n$ associant à chaque place $P_i \in P$ un entier $M(P_i)$ appelé marquage de P_i . M_I désigne le marquage initial du réseau de Petri. Une séquence de tirs $\sigma = T_i.T_j...T_k$ est définie comme une série ordonnée de transitions qui sont franchies lorsque l'on évolue du marquage M au marquage M' (i.e. $M[\sigma > M']$) :

$$\sigma : M \xrightarrow{T_i} M_1 \xrightarrow{T_j} M_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{T_k} M' \quad (2)$$

1. Invariants d'un RdP

Deux types d'invariants sont définis, les invariants de marquages et les invariants de franchissement. Un P-semi-flot $y \in (\mathbf{Z}^+)^n$ tel que y est solution de l'équation $y^T.W = 0$ correspond à un invariant de marquages, c'est-à-dire $y^T.M = y^T.M_I = \text{constante}$. Soit $Y = \{y_i\}, i = 1, \dots, K_I$ l'ensemble des P-semi-flots.

Un T-semi-flot $z \in (\mathbf{Z}^+)^q$ tel que z est solution de l'équation $W.z = 0$ définit un cycle de franchissements qui laisse le marquage invariant. Soit $Z = \{z_i\}, i = 1, \dots, K_2$ l'ensemble des T-semi-flots.

Les réseaux dits MTS (Mono T-Semi-flots) sont des réseaux conservatifs et possèdent un unique T-semi-flot dont le support contient toutes les transitions ($z > 0$). Cette famille de RdP a été particulièrement étudiée par Júlvez [8]. L'avantage

de ces réseaux est que connaissant le flux au travers d'une transition, les autres flux peuvent être déduits à l'aide du T-semi-flot. Dans le cas contraire, il faudra définir un flux par T-semi-flot.

2. Réseau de Petri stochastique (RdPS)

Un réseau de Petri ordinaire stochastique à lois exponentielles RdPS = $\langle \text{RdP}, (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q) \rangle$ est un réseau de Petri ordinaire temporisé dont les durées de sensibilisation de chaque transition T_j sont des variables aléatoires tirées dans des distributions exponentielles de paramètres $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$. Le processus stochastique est caractérisé par sa politique de choix, sa politique de service et sa politique de mémoire [6][7].

Les politiques suivantes seront adoptées pour la suite de l'article :

- La politique de choix est du type compétition, la transition franchie parmi les transitions validées sera celle dont la durée de sensibilisation est la plus petite.

- La politique de service est du type serveur infini, le nombre de tirs de la transition T_j est égale à la partie entière de son degré de validation $n_j(M)$ pour le marquage M :

$$n_j(M(t)) = \min(m_i(t) / w_{ij}^{PR}) \text{ pour tout } P_i \in {}^\circ T_j \quad (3)$$

où ${}^\circ T_j$ désigne l'ensemble des places en amont de la transition T_j . La place P_i telle que $i = \text{argmin}(m_i(t) / w_{ij}^{PR}) \forall P_i \in {}^\circ T_j$ est appelée place critique de la transition T_j .

- La politique de mémoire est du type sans mémoire, pour chaque nouveau marquage, les durées de sensibilisation de toutes les transitions validées sont remises à zéro.

De plus les RdPS considérés seront supposés bornés et réinitialisables.

3. Réseau de Petri continu (RdPC)

Les réseaux de Petri continus ont été développés dans le but d'obtenir une approximation du comportement moyen des RdP [3][4]. RdPC = $\langle \text{RdP}, X_{max} \rangle$ où RdP est un réseau de Petri et $X_{max} = \text{diag}(x_{max_j}) \in (\mathbf{R}^+)^{q \times q}$ la matrice diagonale des vitesses maximales. Soit $M_c(t) \in (\mathbf{R}^+)^n$ le vecteur des marquages continus $m_c(t)$ des places P_i . Soit $X_c(t) \in (\mathbf{R}^+)^q$ le vecteur des vitesses continues $x_{c_j}(t)$ des transitions T_j . L'évolution du marquage est donnée par l'équation (4) :

$$dM_c(t) / dt = W \cdot X_c(t) \quad (4)$$

Dans le cas de la sémantique correspondant aux serveurs infinis (vitesse variable), l'équation régissant la vitesse instantanée de la transition T_j est donnée par :

$$x_{c_j}(t) = x_{max_j} \cdot n_j(M_c(t)) \quad (5)$$

Pour tous les cas traités dans cet article, la détermination des composantes de X_{max} sera effectuée à partir des flux et marquages du régime permanent du RdPS. Cette étude permet de discuter notamment de l'existence et de l'unicité d'une matrice X_{max} qui garantit que les marquages et flux moyens asymptotiques des RdP continus et stochastiques soient égaux.

B. Découpage en régions et régions critiques

La présence de synchronisations (transitions possédant plusieurs places en amont) dans un RdP ainsi que leur nature, jouent un rôle clef dans la fluidification du RdPS.

Plusieurs travaux concernant la fluidification s'intéressent aux réseaux possédant des synchronisations [11][12]. Certains travaux portent sur l'approximation du comportement moyen d'un RdPS par fluidification totale [13] ou locale à l'aide de réseaux hybrides [14].

Une des conclusions auxquelles ont abouti les auteurs est que le régime permanent du réseau continu n'est ni une borne supérieure ni inférieure du comportement du réseau discret non fluidifié. Le comportement du RdPC est non linéaire dû à la présence de la fonction « min », cela signifie que selon les marquages des places liées à une synchronisation, le RdPC ne suivra pas le même comportement.

Dans ce qui suit nous subdivisons les RdPs en différentes classes en fonction de la nature des synchronisations. Cette classification nous permet d'obtenir des résultats intéressants concernant la fluidification.

Définition 1 : Deux transitions T_j et T_k présentent des synchronisations disjointes lorsque les places amont de chacune des transitions forment des ensembles disjoints :

$${}^\circ T_j \cap {}^\circ T_k = \emptyset.$$

Nous allons différencier les RdP en fonction de la nature des synchronisations qu'ils présentent, disjointes ou non.

La présence de synchronisations induit l'existence de plusieurs régions (due à la fonction « min »). Chacune de ces régions est caractérisée par une configuration distincte [10][11], appelée ensemble-PT [8] et définie selon :

$$\text{PT}(M_c(t)) = \{(P_i, T_j) \text{ tq } x_{c_j}(t) = x_{max_j}(t) \cdot m_c(t) / w_{ij}^{PR}\} \quad (6)$$

L'espace des marquages des RdPC présentant des synchronisations, comprend plusieurs régions et le comportement du RdPC dépend de la place critique de chaque transition présentant une synchronisation. A chaque région correspond un ensemble-PT particulier.

Définition 2 : Soit un RdPC dont deux transitions T_j et T_k présentent des synchronisations avec au moins une place amont P_i commune : $P_i \in {}^\circ T_j \cap {}^\circ T_k$. La région pour laquelle P_i est la place critique de T_j et T_k est appelée région critique du RdPC.

C. Régimes permanents

1. Régime permanent d'un RdPS

Les RdPS pour lesquels les politiques de choix, de service et de mémoire sont définies comme dans la section II A 2 et dont l'espace d'état est fini, possèdent un graphe d'atteignabilité qui est isomorphe à l'espace d'état d'un processus de Markov. Dans ce cas, le régime permanent du RdPS peut être déduit des probabilités d'état du modèle de Markov.

Soit $X_{sp} = (x_{sp_j}) \in (\mathbf{R}^+)^q$ le vecteur des flux moyens asymptotiques, $M_{sp} = (m_{sp_i}) \in (\mathbf{R}^+)^n$ le vecteur des marquages moyens asymptotiques et $\Pi_S = (\pi_s_k) \in [0, 1]^{1 \times N}$ le vecteur des probabilités d'état en régime permanent du modèle de Markov associé comportant N états. Soit $A(\mu)$ le générateur du processus de Markov associé. Le vecteur des probabilités d'état en régime permanent est la solution de l'équation (7) :

$$\begin{cases} \Pi_S \cdot A(\mu) = 0 \\ \Pi_S \cdot \mathbf{1}_N = 1 \end{cases} \quad (7)$$

où 1_N représente un vecteur de dimension N dont toutes les composantes sont égales à 1 [9].

A partir du vecteur Π_S , on déduit les flux moyens asymptotiques des transitions ainsi que les marquages moyens asymptotiques des places :

$$x_{spj} = \mu_j \cdot \left(\sum_{k=1..N} n_j(M_k) \pi_{sk} \right) \quad (8)$$

$$m_{spi} = \sum_{k=1..N} m_{ki} \cdot \pi_{sk} \quad (9)$$

où $M_k = (m_{ki})$ est le marquage correspondant à l'état k du modèle de Markov.

Cette méthode permet d'obtenir une solution analytique du régime permanent d'un RdPS dans le cas d'un système ergodique et lorsque l'espace d'état est de dimension réduite. Dans le cas où le graphe d'atteignabilité est de grande dimension, le RdPS peut être vu comme un estimateur du modèle de Markov, les vitesses et marquages moyens asymptotiques peuvent alors être obtenus par simulation.

L'avantage de cet estimateur est que la détermination du graphe d'atteignabilité n'est plus requise, mais l'inconvénient majeur est la vitesse de convergence surtout lors de la présence d'événements rares.

Une des motivations de la fluidification réside dans l'obtention d'un modèle RdPC dont le régime permanent des vitesses et des marquages est identique aux valeurs moyennes asymptotiques des vitesses et des marquages du RdPS. Ainsi la détermination du régime permanent du RdPS ne nécessitera plus la détermination du graphe d'atteignabilité qui peut s'avérer fastidieuse.

2. Régime permanent d'un RdPC

Soit $M_{cp} \in (\mathbf{R}^+)^n$ le vecteur des marquages en régime permanent et soit $X_{cp} \in (\mathbf{R}^+)^q$ le vecteur des vitesses en régime permanent. Le régime permanent du RdPC est défini pour chaque région. L'équation (5) peut être réécrite sous forme matricielle en considérant la matrice des contraintes A_k dans la région k telle que le vecteur des vitesses soit défini par (10) :

$$X_c(t) = X_{max} \cdot A_k \cdot M_c(t) \quad (10)$$

où A_k est calculé à partir de l'ensemble-PT de la région k . Si le réseau continu possède un point de fonctionnement le système d'équations suivant doit être vérifié :

$$W \cdot X_{cp}(t) = 0 \quad (11)$$

$$X_{cp}(t) > 0 \quad (12)$$

dans ce cas, l'équation (11) peut s'écrire selon l'équation (13)

$$W \cdot X_{max} \cdot A_k \cdot M_{cp} = 0 \quad (13)$$

La matrice $W \cdot X_{max} \cdot A_k$ n'est pas de rang plein, la prise en compte des P-semi-flots permet d'obtenir un système de rang n :

$$\begin{bmatrix} W \cdot X_{max} \cdot A_k \\ Y^T \end{bmatrix} \cdot M_{cp} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y^T \cdot M_I \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dans le cas où la détermination du marquage du régime permanent possède une solution unique non négative, l'expression du marquage asymptotique en fonction des valeurs x_{maxj} pourra être obtenue.

$$M_{cp} = f(X_{max}) \quad (15)$$

Etant donné une cible $\{M_F, X_F\}$, où M_F représente le vecteur des marquages et X_F celui des vitesses (par exemple les marquages et vitesses du régime permanent du RdPS), la résolution du système (16) permettra de déterminer les valeurs x_{maxj} correspondantes.

$$\begin{cases} f(X_{max}) = M_F \\ X_{max} \cdot A_k \cdot M_F = X_F \end{cases} \quad (16)$$

3. Exemple de résolution

Soit le RdPS non ordinaire défini par :

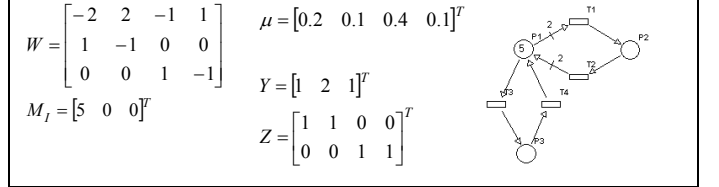


Fig. 1. Exemple de RdPS

Le RdP précédent possède une unique région associée à l'ensemble-PT suivant :

$$PT = \{(T_1, P_1), (T_2, P_2), (T_3, P_1), (T_4, P_3)\}$$

Résolution analytique :

Le système d'équations régissant le comportement du RdPC est défini à l'aide de la matrice de contraintes A_I :

$$A_I = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

La résolution du système (14) conduit à :

$$\begin{cases} 1/2 \cdot x_{max1} \cdot m_1 - x_{max2} \cdot m_2 = 0 \\ x_{max3} \cdot m_1 - x_{max4} \cdot m_3 = 0 \\ m_1 + 2 \cdot m_2 + m_3 = 5 \end{cases} \quad (18)$$

On obtient :

$$\begin{cases} m_{cp1} = 5 \cdot x_{max4} \cdot x_{max2} / \Delta \\ m_{cp2} = 5 \cdot x_{max4} \cdot x_{max1} / \Delta \\ m_{cp3} = 5 \cdot x_{max3} \cdot x_{max2} / \Delta \end{cases} \quad (19)$$

avec $\Delta = x_{max4} \cdot x_{max2} + x_{max4} \cdot x_{max1} + x_{max2} \cdot x_{max3}$.

Afin d'obtenir le même comportement que le RdPS, on détermine l'ensemble des contraintes satisfaites par les valeurs x_{maxj} :

$$\begin{aligned} 5 \cdot x_{max4} \cdot x_{max2} / \Delta &= m_{sp1} \\ (5/2) \cdot x_{max4} \cdot x_{max1} / \Delta &= m_{sp2} \\ 5 \cdot x_{max3} \cdot x_{max2} / \Delta &= m_{sp3} \\ (5/2) \cdot x_{max1} \cdot x_{max4} \cdot x_{max2} / \Delta &= x_{sp1} \\ 5 \cdot x_{max3} \cdot x_{max4} \cdot x_{max2} / \Delta &= x_{sp3} \end{aligned}$$

Les trois premières équations correspondent aux contraintes liées aux marquages et les deux dernières équations correspondent aux contraintes liées aux vitesses de chaque T-semi-flot. La résolution de ce système aboutit à :

$$X_{max} = \text{diag}(0.1 \quad 0.1 \quad 0.4 \quad 0.1)$$

On vérifie que le RdPC muni de ces valeurs de vitesses maximales converge effectivement vers le régime permanent du RdPS. L'existence et l'unicité de la solution X_{max} est liée à la présence de plusieurs régions dans le comportement du RdPS. Ces régions sont quant à elles liées à la présence de synchronisations.

III. ANALYSE DE LA FLUIDIFICATION DES RDPS

Dans un premier temps nous allons considérer le type de réseaux pour lesquels il n'existe aucune synchronisation : chaque transition ne possède qu'une et une seule place amont (réseaux à choix libre).

A. Réseaux à choix libre

Dans le cas des réseaux à choix libre, l'espace des marquages est contenu dans une seule et même région et un seul ensemble-PT est défini, associé à une unique matrice de contraintes A_I qui vérifie (20) :

$$A_I = (W^{PR})^T \quad (20)$$

Nous allons distinguer les réseaux ordinaires des réseaux non ordinaires et montrer que pour le premier cas l'équivalence entre RdPS et RdPC est immédiate.

1. Réseaux ordinaires

Dans le cas d'un RdPS à choix libre, toute transition n'a qu'une et une seule place amont : $|\circ T_j| = 1$. Dans l'équation (8), le terme $n_j(M_k)$ correspond au degré de validation de la transition T_j lorsque le réseau est dans l'état k . Compte tenu de l'équation (3) et du fait que le réseau est ordinaire :

$$\forall t \geq 0, \forall j = 1, \dots, q, n_j(M_k(t)) = m_i(t) \quad (21)$$

où $\{P_i\} = \circ T_j$ est la place critique de T_j pour tout $t \geq 0$. Pour tous les états k pour lesquels T_j est franchissable le degré de validation de T_j ne dépend que du marquage de P_i :

$$\forall j = 1, \dots, q, n_j(M_k) = m_{k_i} \quad (22)$$

On obtient donc d'après (9) pour toute transition T_j :

$$\forall j = 1, \dots, q, \frac{x_{spj}}{m_{spi}} = \mu_j \quad (23)$$

D'un autre coté, concernant le RdPC, le régime permanent vérifiant l'équation (10) et le réseau étant ordinaire, on obtient pour toute transition :

$$\forall j = 1, \dots, q, \frac{x_{cpj}}{m_{cpi}} = x_{maxj} \quad (24)$$

Le réseau ne possédant qu'un P-semi-flot unitaire (réseau ordinaire à choix libre), on a l'égalité :

$$Y.M_{sp} = Y.M_{cp} \quad (25)$$

d'où l'équivalence entre RdPS et RdPC dès lors que la relation (26) est vérifiée :

$$\forall j = 1, \dots, q, x_{maxj} = \mu_j \quad (26)$$

Lorsque la vitesse maximale de chaque transition du RdPC est égale au taux de franchissement de la transition équivalente du RdPS, le régime permanent du RdPC est équivalent au comportement moyen asymptotique du RdPS.

2. Réseaux non ordinaires

Contrairement au cas précédent, l'équivalence pour ce type de réseaux dont le P-semi-flot est non unitaire, ne peut être établie qu'a posteriori, c'est-à-dire uniquement si l'on suppose connu le régime moyen du RdPS. Lors de précédents travaux [15], nous avons démontré qu'il existe toujours X_{max} tel que le réseau continu possède le même régime permanent que le RdPS dès lors que X_{max} est défini par :

$$x_{maxj} = w_{ij}^{PR} \cdot x_{spj} / m_{spi} \quad (27)$$

pour tout T_j de place critique P_i .

Ce résultat est identique à celui obtenu analytiquement dans le cas où le système (14) possède une solution unique. Dans ce cas les valeurs de X_{max} peuvent être obtenues à l'aide de la résolution du système (16) avec $M_F = M_{sp}$ et $X_F = X_{sp}$.

B. Réseaux avec synchronisations

1. Cas pour lequel $M_F \notin$ à une région critique

La détermination des valeurs x_{maxj} est identique au cas des réseaux à choix libre : il existe un RdPC qui converge vers la cible $\{M_{sp}, X_{sp}\}$ pour tout RdPS.

2. Cas pour lequel $M_F \in$ à une région critique

Dans la région critique, les vitesses de certaines transitions dépendent de la même place critique, une contrainte entre les valeurs de leur vitesse maximale de franchissement en découle. Cette contrainte n'existe que pour le RdPC et non pour le RdPS, l'équivalence n'est plus valable dans cette région.

Dans le cas où la cible appartient à la région critique, le système (16) n'aboutit à aucune solution non négative. Afin d'obtenir une solution positive, il faut que la contrainte sur les vitesses de franchissement soit respectée.

Dans ce cas, il n'existe aucune matrice X_{max} qui garantisse que les marquages et flux moyens asymptotiques des RdP continus et stochastiques soient égaux. Mais, il existe X_{max} tel que ces flux ainsi que les marquages des places critiques du RdPC et du RdPS présentent le même rapport de proportionnalité α [15]. Les valeurs de X_{max} sont définies de façon similaire au cas des réseaux à choix libre

$$\frac{x_{cpj}}{x_{spj}} = \frac{m_{cpi}}{m_{spi}} = \alpha \quad \text{pour toute transition } T_j \text{ et tout } i \text{ tel que } P_i$$

est une place critique asymptotique des RdPS et RdPC.

Remarques :

- Les marquages des places non critiques ne vérifient pas cette proportionnalité.
- La résolution reste identique dans le cas des réseaux non MTS, dans ce cas la partie concernant les vitesses du système (16) contiendra autant d'équations que de T-semi-flots.

Nous allons illustrer ces différents cas avec des exemples rencontrés dans la littérature [4][8][13][15][16] et déterminer lorsque cela est possible les vitesses maximales de franchissement des transitions du RdPC permettant d'obtenir la convergence du régime permanent vers les valeurs moyennes du RdPS.

C. Exemples de RdPS fluidifiés

Plusieurs modèles de RdP sont présentés afin de servir de comparaison lors de la fluidification de RdPS.

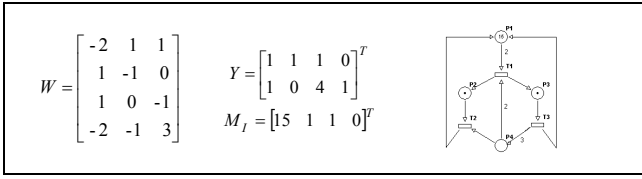


Fig. 2. Cas 1 [16]

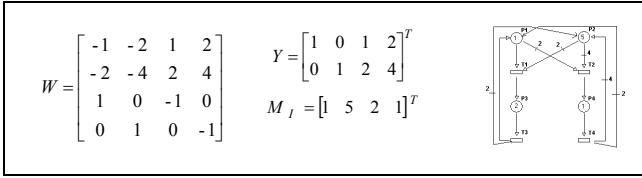


Fig. 3. Cas 2 [8]

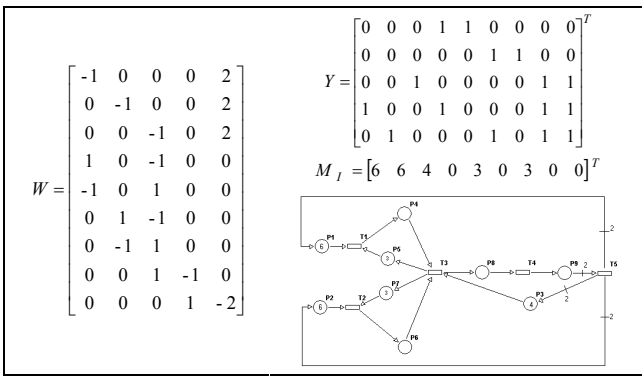


Fig. 4. Cas 3 [4][15]

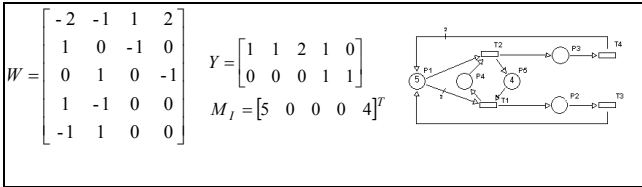


Fig. 5. Cas 4 [8][13][15]

Nous avons retenu 4 réseaux types de par leur configuration (table I).

TABLE I
CARACTERISTIQUES DES DIFFERENTS CAS TESTES

Cas N°	Nbre de synchronisations	Nbre de régions	Nbre de régions critiques
1	2	4	1
2	2	4	2
3	3	12	0
4	2	4	1

Selon les valeurs du vecteur μ , la cible $(MF, XF) = (M_{sp}, X_{sp})$ peut appartenir ou non à la région critique, deux cas de figure sont présentés pour le cas 1 selon le vecteur μ : 1-a et 1-b (table II).

Les valeurs des vecteurs des vitesses de franchissement permettant la fluidification ainsi que le coefficient de proportionnalité α entre RdPS et RdPC concernant les flux moyens asymptotiques et les marquages moyens asymptotiques des places critiques sont donnés table II.

TABLE II
RESULTATS DE FLUIDIFICATION

Cas N°	μ : taux des franchissements du RdPS X_{max} : vitesses maximales du RdPC	Région de M_F	α
1-a	$\mu = [1 \ 1 \ 1]^T$ $X_{max} = \text{diag}(0.76 \ 0.48 \ 1)$	Non critique	1
1-b	$\mu = [2 \ 1 \ 1]^T$ $X_{max} = \text{diag}(1.37 \ 0.7 \ 1)$	Critique	0.65
2	$\mu = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ $X_{max} = \text{diag}(1 \ 0.73 \ 1 \ 1)$	Critique	1
3	$\mu = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ $X_{max} = \text{diag}(0.81 \ 0.81 \ 0.65 \ 1 \ 0.67)$	Non critique	1
4	$\mu = [3 \ 1 \ 1 \ 10]^T$ $X_{max} = \text{diag}(1.56 \ 0.78 \ 1 \ 10)$	Critique	1.65

Trois résultats différents sont obtenus, soit M_F n'appartient pas à une région critique, dans ce cas $\alpha=1$, soit il appartient à une région critique et selon la caractéristique du réseau, $\alpha=1$ ou $\alpha \neq 1$. Ces trois cas de figure sont développés.

1. $M_F \notin$ à une région critique (cas 1-a, table II)

Dans le cas 1-a, $\mu = [1 \ 1 \ 1]^T$, $M_{sp} = [15.27 \ 1.17 \ 0.56 \ 1.49]^T$ et $X_{sp} = [0.56 \ 0.56 \ 0.56]^T$. La matrice des vitesses maximales de franchissement définie à l'aide du système (16) est $X_{max} = \text{diag}(0.76 \ 0.48 \ 1.00)$, pour laquelle le RdPC converge vers les valeurs moyennes du RdPS.

2. $M_F \in$ à une région critique (cas 1-b, table II)

Dans le cas 1-b, $\mu = [2 \ 1 \ 1]^T$, $M_{sp} = [13.36 \ 2.61 \ 1.04 \ 1.49]^T$ et $X_{sp} = [1.04 \ 1.04 \ 1.04]^T$.

Quatre régions existent dans le cas 1-b, (table III).

TABLE III
REGIONS ET ENSEMBLES-PT POUR LE RDP DE LA FIG 2.

Régions	Ensembles-PT
A_1	$\{(P_1, T_1), (P_2, T_2), (P_3, T_3)\}$
A_2	$\{(P_4, T_1), (P_2, T_2), (P_3, T_3)\}$
A_3	$\{(P_1, T_1), (P_4, T_2), (P_3, T_3)\}$
A_4	$\{(P_4, T_1), (P_4, T_2), (P_3, T_3)\}$

Dans la région A_4 , P_4 est une place critique pour les deux transitions T_1 et T_2 . Donc A_4 est une région critique. Nous allons résoudre le système permettant d'obtenir une solution analytique dans cette région :

$$\begin{bmatrix} W.X_{max}.A_4 \\ Y^T \end{bmatrix} M_{cp} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y^T.M_I \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T, Y^T.M_I = \begin{bmatrix} 17 \\ 19 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{max3} & x_{max2} & -x_{max1} \\ 0 & 0 & -x_{max3} & 1/2.x_{max1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} x_{max3}.m_3 + (-x_{max1} + x_{max2}).m_4 = 0 \\ -x_{max3}.m_3 + 1/2.x_{max1}.m_4 = 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 = 17 \\ m_1 + 4.m_4 = 19 \end{cases} \quad (29)$$

pour lequel, si $x_{max1} \neq 2.x_{max2}$ l'unique solution du marquage asymptotique est $M_{cp} = [19 \ -2 \ 0 \ 0 \ m_{cp5}]^T$ avec m_{cp5} degrés de liberté. Il n'existe pas de solution positive.

Mais si $x_{max1} = 2.x_{max2}$, le rang du système est diminué de 1 :

$$\begin{cases} -x_{max3}.m_3 + 1/2.x_{max1}.m_4 = 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 = 17 \\ m_1 + 4.m_4 = 19 \end{cases} \quad (30)$$

et dans ce cas la solution doit vérifier :

$$\begin{aligned} m_{cp1} &= -4.m_{cp3} + 19 \\ m_{cp2} &= 3*.m_{cp3} - 2 \\ m_{cp4} &= x_{max3} \cdot m_{cp3} / (x_{max1} - x_{max2}) \end{aligned}$$

avec m_{cp5} et m_{cp3} deux degrés de liberté.

La résolution du système (16) aboutit à $X_{max} = \text{diag} (1.37 \ 0.7 \ 1)$ qui permet d'atteindre le point $\{\alpha.M_{sp}, \alpha.X_{sp}\}$ (seules les places critiques sont concernées), mais avec $\alpha = 0.65$: $M_{cp} = [15.32 \ 1.00 \ 0.68 \ 0.97]^T$ et $X_{cp} = [0.68 \ 0.68 \ 0.68]^T$.

3. Région critique telle que ${}^{\circ}T_i = {}^{\circ}T_k$ (cas 2, table II)

Le cas 2 possède deux synchronisations pilotées par les mêmes places P_1 et P_2 . Parmi les quatre régions seules deux régions correspondent à des configurations réalisables. Les équations qui régissent les vitesses du RdPC sont :

$$\begin{cases} x_1 = x_{max1} \cdot \min(m_1, m_2 / 2) \\ x_2 = x_{max2} \cdot \min(m_1 / 2, m_2 / 4) \\ x_3 = x_{max3} \cdot m_3 \\ x_4 = x_{max4} \cdot m_4 \end{cases} \quad (31)$$

La droite de séparation de ces régions est $m_2 = 2.m_1$. Or les P-semi-flots de valeurs c_1 et c_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 + m_3 + 2.m_4 = c_1 \\ m_2 + 2.m_3 + 4.m_4 = c_2 \end{cases} \quad (32)$$

d'où l'on déduit l'équation :

$$m_2 = (c_2 - 2.c_1) + 2.m_1 \quad (33)$$

Il s'ensuit que quelles que soient les valeurs des constantes c_1 et c_2 , donc quel que soit le point initial M_i , les marquages sont contraints de telle sorte que m_1 et m_2 ne peuvent qu'évoluer le long de droites parallèles à la frontière, aucun changement de régions ne peut apparaître au cours de l'évolution du réseau. Cette contrainte étant liée à la structure du réseau, elle sera respectée par le régime moyen du RdPS. De ce fait la fluidification sera possible.

D) Discussion

Compte tenu des valeurs des taux de franchissement des transitions des réseaux RdPS et du marquage initial, seuls les cas 1-b et 4 ne peuvent être fluidifiés : pour ces deux cas aucune matrice X_{max} ne peut être déterminée de telle sorte que le régime permanent du RdPC coïncide avec le régime moyen du RdPS. Cette impossibilité est due à la présence d'une région critique et à l'appartenance du marquage final à cette région. Mais la fluidification reste réalisable pour ces réseaux lorsque la cible (M_{sp}, X_{sp}) n'appartient pas à la région critique (cas 1-a). Parmi les cas présentés, certains sont des réseaux non MTS (cas 2), certains sont ordinaires d'autres non avec présence de conflits ou non ; ces caractéristiques ne jouent pas de rôle déterminant dans

l'analyse de la fluidification. Par contre l'étude des régions, l'existence des régions critiques et les positions relatives des marquages initial et final dans ces régions sont des paramètres clefs pour la fluidification.

IV. CONCLUSION

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à l'approximation d'un réseau stochastique à l'aide d'un réseau continu quel que soit le marquage initial. Seules l'existence et l'unicité de la solution ont été discutées. Nous avons supposé connues les valeurs du marquage moyen asymptotique et du flux moyen asymptotique du RdPS. La notion de synchronisation est une caractéristique clef dans cette approximation. Plus précisément, la présence de plusieurs régions et plus particulièrement l'existence d'une région critique complique la fluidification du RdPS lorsque la cible appartient à cette région. Plusieurs cas de la littérature ont permis d'illustrer les différents cas de figure présentés. Parmi les perspectives de ces travaux, nos efforts porteront en priorité sur la détermination a priori des vitesses maximales de franchissement des transitions lorsque la fluidification est possible.

V. REFERENCES

- [1] Molloy M.K. On the integration of delay and throughput in distributed processing models. Ph. D, UCLA, Los Angeles, USA, 1981.
- [2] Molloy M.K. Performance analysis using stochastic Petri nets, *IEEE Transactions on Computers C*, vol. 31, pp. 913 – 917, 1982.
- [3] David R., Alla H. *Petri nets and grafcet – tools for modelling discrete events systems*. Prentice Hall, London, 1992.
- [4] Silva M. and Recalde L. On fluidification of Petri Nets: from discrete to hybrid and continuous models, *Annual Reviews in Control*, vol. 28, n°2, pp. 253-266, 2004.
- [5] Trivedi K., Kulkarni V. *Lecture Notes in Computer Science*, FSPNs Fluid Stochastic Petri nets, vol. 691, M. Ajmone Marsan ed., 1993.
- [6] Bobbio A., Puliafito A., Telek M., Trivedi K. Recent Developments in Stochastic Petri Nets, *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, vol. 8, n°1, pp. 119-158, 1998.
- [7] Diaz M. *Les réseaux de Petri : modèles fondamentaux*. Hermes, Paris, 2001.
- [8] Júlvez G. Recalde L., Silva M. Steady-state performance and evaluation of continuous mono-T-semiflow Petri nets, *Automatica*, vol. 41, n° 4, pp. 605-616, 2005.
- [9] Rausand M. and Hoyland A. *System reliability theory: models, statistical methods, and applications*. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2004.
- [10] Mahulea C., Giua A., Recalde L., Seatzu C., Silva M. On sampling continuous timed Petri nets: reachability “equivalence” under infinite servers semantics, *Proceeding IFAC-ADHS*, pp. 37–43, Alghero, Italie, 2006.
- [11] Mahulea C., Ramirez Trevino A., Recalde L., Silva M. Steady state control reference and token conservation laws in continuous Petri nets, *Trans. IEEE – TASE*, vol. 5, n°2, pp. 307 – 320, 2008.
- [12] Campos J., Chiola G., Silva M. Ergodicity and throughput bounds of Petri nets with unique consistent firing count vector, *IEEE Transactions on Software Engineering*, vol. 17, n°2, pp. 117-125, 1991.
- [13] Vazquez R., Recalde L., Silva M. Stochastic continuous-state approximation of markovian Petri net systems, *Proceeding IEEE – CDC08*, pp. 901 – 906, Cancun, Mexique, 2008.
- [14] Vazquez R., Silva M. Hybrid Approximations of Markovian Petri Nets, *Proceeding IFAC – ADHS*, pp.56-61, Saragosse, Espagne, 2009.
- [15] Lefebvre D., Leclercq E., Khalij L., Souza de Cursi E., El Akchioui N. Approximation of MTS stochastic Petri nets steady state by means of continuous Petri nets: a numerical approach, *Proceeding IFAC ADHS*, pp. 62-67, Saragosse, Espagne, 2009.
- [16] Mahulea C., Recalde L., Silva M. Basic Server Semantics and Performance Monotonicity of Continuous Petri Nets, *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, springer-verlag, vol. 19, n°2, pp. 189-212, 2009.