

Stabilisation robuste des systèmes Takagi-Sugeno par lois de commande à commutations

Dalel Jabri^{1,2}, Abdelhafidh Jaadari^{1,3}, Kevin Guelton¹, Nouredine Manamanni¹

¹ Crestic, Université de Reims Champagne Ardenne, Moulin de la Housse, 51000 Reims, France. *prenom.nom@univ-reims.fr*.

² Unité de recherche MACS, Université de Gabès
Route Médenine, 6029 Gabès, Tunisie.

³ LAMIH UMR CNRS 8530, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Le mont Houy, 59313 Valenciennes, France.

Résumé— Dans cet article, la stabilisation des systèmes non linéaires incertains et perturbés est abordée à travers une modélisation sous forme de modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) à commutations. Afin d'assurer la stabilisation robuste des systèmes T-S incertains et perturbés à commutations garantissant la minimisation de l'effet des perturbations externes, une méthodologie de synthèse quadratique H_∞ de lois de commande floues à commutations est proposée. Les conditions de stabilité sont exprimées en termes d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMI). Finalement, un exemple numérique illustre l'efficacité de l'approche proposée.

Mots-clés— Systèmes Takagi-Sugeno incertains et perturbés à commutations, Loi de commande PDC à commutations, Inégalités Linéaires Matricielles (LMI), fonction de Lyapunov multiple quadratique.

I. INTRODUCTION

Les techniques de commandes classiques en théorie du contrôle des processus peuvent résoudre un certain nombre de problèmes en automatique. Néanmoins, elles peuvent présenter des limites dans le cas des systèmes réels, non linéaires et complexes. Ces dernières décennies, deux méthodologies de modélisation et de commande sont apparues : les approches hybrides, associant des dynamiques continues et discrètes et les approches floues, appréciées pour leurs capacités d'approximation universelle des systèmes non linéaires.

Les systèmes dynamiques hybrides (SDH) sont des systèmes dynamiques faisant intervenir simultanément des phénomènes continus et discrets (événementiel). Un exemple de tels systèmes sont les processus continus supervisés par des algorithmes discrets de planification. Plusieurs travaux de recherche se sont intéressés à la modélisation et à la commande des SDH et, plus particulièrement à la classe des systèmes dites à commutations [1][2][3][4][5][6]. Une majeure partie des travaux qui leur sont consacré traite l'analyse de la stabilité ou de la stabilisation d'un ensemble de systèmes linéaires commutant entre eux selon une loi de commutations et, à ce jour, peu des travaux se sont intéressés à la commande des systèmes non linéaires à commutations.

Parmi les approches non linéaire, les modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) [7] ont suscité l'intérêt de la communauté automatique. En effet, ceux-ci permettent, par le biais de transformations polytopiques convexes, de représenter un système non linéaire de manière exacte sur un compact de l'espace d'état [8]. Dans ce cas, la réduction de la complexité d'analyse des systèmes non linéaires est possible par l'extension de certains concepts relatifs aux systèmes linéaires et, selon les classes de systèmes considérés, de nombreuses conditions de stabilité ont été exprimées sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI), e.g. [7][8][9][10][11][12].

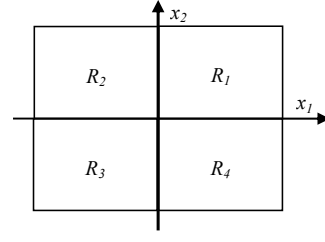
Dans cet article, l'idée est d'étudier un système non linéaire en considérant plusieurs régions de son espace d'état. Pour chacune d'entre elles, un représentant T-S peut-être obtenu et, selon les trajectoires parcourues par le système dans sa globalité, le passage d'une région à l'autre permet de définir une loi de commutation permettant la sélection au sein d'un ensemble de lois de commande de type compensation parallèle distribuée (PDC) commutées. Ainsi, l'objectif est de tirer partie et d'associer les concepts relatifs à la commande des SDH et des systèmes T-S [13][14][15]. Dans [13], des premiers résultats ont conduit à la synthèse quadratique de contrôleurs pour les systèmes T-S à commutations. Nous proposons alors d'étendre les conditions obtenues à la stabilisation robuste pour la classe des systèmes flous de type T-S incertains et perturbés à commutations. Dans la première section, on présente respectivement la classe de systèmes étudiés, la fonction de Lyapunov utilisée et la loi de commande développée. Ensuite, des conditions de stabilité sont données sous formes LMI. Enfin, un exemple numérique illustre l'applicabilité de l'approche proposée.

II. POSITIONNEMENT DU PROBLEME CONSIDERE

A. Classe des systèmes étudiée

Soit la classe des systèmes T-S à commutations incertains et perturbés décrite par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r v_q(x(t)) h_{qi}(x(t)) \begin{pmatrix} (A_{qi} + \Delta A_{qi}(t))x(t) \\ + (B_{qi} + \Delta B_{qi}(t))u(t) + G_{qi}\varphi(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$



où $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)] \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $\varphi(t) \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et des perturbations externes. Q et r définissent respectivement le nombre de régions considérées de l'espace d'état et le nombre de règles dans chaque région. Ainsi, pour $i=1, \dots, r$ et $q=1, \dots, Q$, $A_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $G_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont des matrices constantes de dimensions appropriées. $\Delta A_{qi}(t)$, $\Delta B_{qi}(t)$ sont des matrices d'incertitudes paramétriques dites Lesbegue mesurables et peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta A_{qi}(t) = H_{aqi} F_a(t) N_{aqi} \\ \Delta B_{qi}(t) = H_{bqi} F_b(t) N_{bqi} \end{cases} \quad (2)$$

avec $H_{aqi}, H_{bqi}, N_{aqi}$ et N_{bqi} sont des matrices réelles connues de dimensions appropriées et les fonctions incertaines $F_a(t)$ et $F_b(t)$ bornées dans le temps telles que $F_a^T(t)F_a(t) \leq I$ et $F_b^T(t)F_b(t) \leq I$. $h_{qi}(x(t))$ sont des fonctions d'appartenance vérifiant les propriétés de sommes convexes $h_{qi}(x(t)) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^r h_{qi}(x(t)) = 1$. Enfin, $v_q(x(t))$ est la loi de commutation définie par :

$$v_q(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(t) \in \text{la région } R_q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

où chacune des régions est désignée par $R_q(s_{1q}, s_{2q}, \dots, s_{nq})$:

$$s_{kq} = \begin{cases} 1 & x_k(t) \geq 0 \\ 0 & x_k(t) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Pour plus de clarification, dans le cas d'un système à commutations à deux états, en tenant compte de la loi de commutation (3) et des variables d'états $x_1(t)$ et $x_2(t)$, l'espace d'état est divisé en quatre régions $R_1(1,1)$, $R_2(0,1)$, $R_3(1,0)$ et $R_4(0,0)$ représentées figure 1.

Fig.1. Partitionnement d'un espace d'état à deux dimensions

Afin d'obtenir des conditions LMIs, on considère, de manière similaire à [13], un système étendue composé du système (1) et d'un système Hurwitz tel que:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r v_q(x(t)) h_{qi}(x(t)) \begin{pmatrix} (\tilde{A}_{qi} + \Delta \tilde{A}_{qi}(t))\tilde{x}(t) \\ + (\tilde{B}_{qi} + \Delta \tilde{B}_{qi}(t))\tilde{u}(t) + \tilde{G}_{qi}\varphi(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

avec $\tilde{x}(t) = [x(t) \ \hat{x}(t)] \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{A}_{qi} = \begin{bmatrix} A_{qi} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$, $\Delta \tilde{A}_{qi} = \begin{bmatrix} \Delta A_{qi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{B}_{qi} = \begin{bmatrix} B_{qi} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\Delta \tilde{B}_{qi} = \begin{bmatrix} \Delta B_{qi} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{G}_{qi} = \begin{bmatrix} G_{qi} \\ 0 \end{bmatrix}$ et C Hurwitz.

B. Analyse de stabilité

Afin d'analyser la stabilité des systèmes T-S à commutation représentés par (1), on considère la fonction candidate de Lyapunov donnée par [13] :

$$V(x(t)) = \begin{cases} x^T(t) P_1 x(t), & x(t) \in R_1 \\ x^T(t) P_2 x(t), & x(t) \in R_2 \\ \vdots \\ x^T(t) P_Q x(t), & x(t) \in R_Q \end{cases} \quad (6)$$

où P_q sont des matrices définies positives.

La fonction de Lyapunov (6) doit garantir la continuité aux frontières des régions [1]. De façon similaire à la proposition [13], cette condition est vérifiée si P_q vérifie la condition suivante :

$$P_q = E_q^T P E_q \quad (7)$$

$$\text{avec } E_q = \begin{bmatrix} s_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-s_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_{2q} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1-s_{2q} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{(r-1)q} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-s_{(r-1)q} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{rq} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-s_{rq} \\ 1-s_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-s_{2q} & \dots & 0 & 0 & 0 & s_{2q} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-s_{(r-1)q} & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{(r-1)q} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-s_{rq} & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{rq} \end{bmatrix} \quad (8)$$

et où P est une matrice définie positive et où E_q sont des matrices non singulières connues, présentées dans (8) et dont la forme a été démontrée dans [13].

Sachant qu'une seule région peut-être active à un instant donné, (6) peut-être réécrite sous la forme :

$$V(x(t)) = \sum_{q=1}^Q E_q^T P E_q \quad (9)$$

C. Contrôleur PDC à commutations

Afin d'assurer la stabilisation du système (1), on propose d'étendre l'approche PDC [8] aux systèmes à commutations. La loi de commande T-S à commutations considérée dans cette étude est décrite par :

$$u(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r v_q(x(t)) h_{qi}(x(t)) K_{qi} E_q x(t) \quad (10)$$

où $K_{qi} \in R^{m \times 2n}$ sont les gains de retour d'état et $E_q \in R^{2n \times 2n}$ les matrices non singulières définies précédemment.

En considérant (1) et (10), la dynamique de la boucle fermée peut être exprimée par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r v_q h_{qi} h_{qj} \left(\begin{array}{c} (\tilde{A}_{qi} + \Delta \tilde{A}_{qi}(t)) \\ + (\tilde{B}_{qi} + \Delta \tilde{B}_{qi}(t)) K_{qj} E_q \\ + \tilde{G}_{qi} \rho(t) \end{array} \right) \tilde{x}(t) \quad (11)$$

Dès lors, la synthèse de la loi de commande est réalisée s'il est possible de trouver les matrices de gains K_{qi} de telle sorte que (11) est stable.

III. LEMME ET NOTATIONS

Les conditions de stabilité proposées à la section suivante sont écrites sous forme de LMIs. L'obtention de celles-ci nécessite l'emploi du lemme suivant.

Lemme 1 : Pour des matrices X et Y de dimensions appropriées, il existe un scalaire $\beta > 0$ tel que la propriété suivante est vérifiée :

$$X^T Y + Y^T X \leq \beta X^T X + \beta^{-1} Y^T Y \quad (12)$$

Dans la suite, afin d'alléger les expressions mathématiques, nous utilisons les notations suivantes :

$$A_{vh} = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r v_q(x(t)) h_{qi}(x(t)) A_{qi}, \quad E_v = \sum_{q=1}^Q v_q(x(t)) E_q$$

$$X_h Y_h = \left(\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) X_i \right) \left(\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) Y_i \right),$$

Et, dans la mesure où une seule région peut-être active à un instant donné, on peut écrire :

$$X_v Y_v = \left(\sum_{q=1}^Q v_q(x(t)) X_q \right) \left(\sum_{q=1}^Q v_q(x(t)) Y_q \right) = \sum_{q=1}^Q v_q(x(t)) X_q Y_q$$

De manière usuelle (*) indique une quantité symétrique au sein d'une matrice. Enfin, lorsque cela ne portera pas

d'ambiguïté, les arguments d'une fonction et le temps t pourront être omis.

IV. SYNTHÈSE H_∞ DE LOIS DE COMMANDE A COMMUTATIONS

L'objectif est maintenant de fournir une méthodologie de synthèse de lois de commande à commutations décrites par (10) stabilisant les systèmes T-S à commutations (1) tout en atténuant l'effet des perturbations externes. Pour ce faire, on considère le critère H_∞ suivant [16] :

$$\int_0^{tf} x(t)^T R x(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{tf} \varphi(t)^T \varphi(t) dt \quad (13)$$

où $R > 0$ est une matrice de pondération et η désigne le taux d'atténuation des perturbations externes vis-à-vis de l'état du système.

Le résultat principal de cet article est résumé par le théorème suivant.

Théorème 1 :

Le système T-S à commutations incertain et perturbé (1) est globalement asymptotiquement stable en boucle fermée via la loi de commande PDC à commutations (10) au regard du critère H_∞ (13) s'il existe les matrices $X = X^T > 0$, M_{qi} , les scalaires $\gamma_{qi} > 0$, $\lambda_{qi} > 0$ et le taux d'atténuation $\eta = \sqrt{\rho}$, $\rho > 0$, vérifiant les conditions LMIs, $\forall q, i, i < j$:

Minimiser ρ tel que :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{qii} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ N_{aqi} E_q^{-1} X & -\gamma_{qi} I & 0 & 0 & 0 \\ N_{bqi} M_{qi} & 0 & -\lambda_{qi} I & 0 & 0 \\ E_q^{-1} X & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ \tilde{G}_{qi}^T E_q^T & 0 & 0 & 0 & -\rho I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{qij} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ (\tilde{N}_{aqi} + \tilde{N}_{aqj}) E_q^{-1} X & -(\gamma_{qi} + \gamma_{qj}) I & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{bqi} M_{qi} + \tilde{N}_{bjj} M_{qj} & 0 & -(\lambda_{qi} + \lambda_{qj}) I & 0 & 0 \\ 2E_q^{-1} X & 0 & 0 & -2R^{-1} & 0 \\ (\tilde{G}_{qi}^T + \tilde{G}_{qj}^T) E_q^T & 0 & 0 & 0 & -2\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\text{avec } \Omega_{qii} = \begin{pmatrix} X E_q^{-T} \tilde{A}_{qi}^T E_q^T + M_{qi}^T \tilde{B}_{qi}^T E_q^T \\ + E_q \tilde{A}_{qi} E_q^{-1} X + E_q \tilde{B}_{qi} M_{qi} \\ + \gamma_{qi} E_q \tilde{H}_{aqi} \tilde{H}_{aqi}^T E_q^T + \lambda_{qi} E_q \tilde{H}_{bqi} \tilde{H}_{bqi}^T E_q^T \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\Psi_{qij} = \begin{pmatrix} 2(X E_q^{-T} \tilde{A}_{qi}^T E_q^T + M_{qj}^T \tilde{B}_{qj}^T E_q^T + X E_q^{-T} \tilde{A}_{qj}^T E_q^T + M_{qi}^T \tilde{B}_{qi}^T E_q^T) \\ + \gamma_{qi} E_q \tilde{H}_{aqi} \tilde{H}_{aqi}^T E_q^T + \lambda_{qi} E_q \tilde{H}_{bqi} \tilde{H}_{bqi}^T E_q^T \\ + \gamma_{qj} E_q \tilde{H}_{aqj} \tilde{H}_{aqj}^T E_q^T + \lambda_{qj} E_q \tilde{H}_{bjj} \tilde{H}_{bjj}^T E_q^T \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, les gains de la lois de commande (10) sont obtenus par le changement de variable bijectif $K_{q_i} = M_{q_i} X^{-1}$.

Preuve :

Sachant qu'une seule région est active à un instant donné, la fonction de Lyapunov peut s'écrire sous la forme suivante

$$V(x, t) = \tilde{x}(t)^T E_v^T P E_v \tilde{x}(t) \quad (16)$$

Le système (11) en boucle fermée est stable selon le critère H_∞ si:

$$\dot{V} + \tilde{x}^T R \tilde{x} - \eta \varphi^T \varphi < 0 \quad (17)$$

En remplaçant (11) dans (17) on obtient :

$$\begin{aligned} & \tilde{x}(t)^T \left(2 \left(\tilde{A}_{vh} + \Delta \tilde{A}_{vh} + (\tilde{B}_{vh} + \Delta \tilde{B}_{vh}) K_{vh} E_v \right)^T E_v^T P E_v + R \right) \tilde{x}(t) \\ & + 2 \varphi(t)^T \tilde{G}_{vh}^T E_v^T P E_v \tilde{x}(t) - \eta^2 \varphi^T(t) \varphi(t) < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

qui est vérifiée $\forall x(t)$ et $\forall \varphi(t)$ si :

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 \left((\tilde{A}_{vh} + \Delta \tilde{A}_{vh} + (\tilde{B}_{vh} + \Delta \tilde{B}_{vh}) K_{vh} E_v)^T E_v^T P E_v \right) + R & (*) & \\ & \tilde{G}_{vh}^T E_v^T P E_v & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (19)$$

c'est-à-dire si :

$$\left[\begin{array}{ccc} E_v^T \left(2 \left((\tilde{A}_{vh} + \Delta \tilde{A}_{vh}) E_v^{-1} \right)^T E_v^T P + E_v^{-T} R E_v^{-1} \right) E_v & (*) & \\ & \tilde{G}_{vh}^T E_v^T P E_v & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (20)$$

En multipliant (20) à gauche par $\begin{bmatrix} E_v^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et à droite par

$$\begin{bmatrix} E_v^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ on obtient :}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 \left(E_v^{-T} \tilde{A}_{vh}^T E_v^T P + K_{vh}^T \tilde{B}_{vh}^T E_v^T P \right) + E_v^{-T} R E_v^{-1} & (*) & \\ \left(+ E_v^{-T} \Delta \tilde{A}_{vh}^T E_v^T P + K_{vh}^T \Delta \tilde{B}_{vh}^T E_v^T P \right) & & \\ \tilde{G}_{vh}^T E_v^T P & & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (21)$$

On pose $X = P^{-1}$ et $M_{vh} = K_{vh} X$, en multipliant à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 \left(X E_v^{-T} \tilde{A}_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \tilde{B}_{vh}^T E_v^T \right) + X E_v^{-T} R E_v^{-1} X & (*) & \\ \left(+ X E_v^{-T} \Delta \tilde{A}_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \Delta \tilde{B}_{vh}^T E_v^T \right) & & \\ \tilde{G}_{vh}^T E_v^T & & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (22)$$

En utilisant le complément de Schur [16], l'inégalité (22) peut se réécrire telle que :

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 \left(X E_v^{-T} \tilde{A}_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \tilde{B}_{vh}^T E_v^T \right) & (*) & (*) \\ \left(+ X E_v^{-T} \Delta \tilde{A}_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \Delta \tilde{B}_{vh}^T E_v^T \right) & & \\ E_v^{-1} X & -R^{-1} & 0 \\ \tilde{G}_{vh}^T E_v^T & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (23)$$

c'est-à-dire, en considérant l'expression (2) relative aux incertitudes du système :

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 \left(X E_v^{-T} \tilde{A}_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \tilde{B}_{vh}^T E_v^T \right) & (*) & (*) \\ \left(+ X E_v^{-T} \tilde{N}_{avh}^T F_a^T(t) \tilde{H}_{avh}^T E_v^T \right) & & \\ \left(+ M_{vh}^T \tilde{N}_{bvh}^T F_b^T(t) \tilde{H}_{bvh}^T E_v^T \right) & & \\ E_v^{-1} X & -R^{-1} & 0 \\ \tilde{G}_{vh}^T E_v^T & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (24)$$

que l'on peut majorer à l'aide du lemme 1 par :

$$\left[\begin{array}{ccc} \Omega_{vh} & (*) & (*) \\ E_v^{-1} X & -R^{-1} & 0 \\ \tilde{G}_{vh}^T E_v^T & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (25)$$

$$\text{avec } \Omega_{vh} = \left[\begin{array}{c} 2 \left(X E_v^{-T} \tilde{A}_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \tilde{B}_{vh}^T E_v^T \right) \\ + \gamma_{vh}^{-1} X E_v^{-T} \tilde{N}_{avh}^T \tilde{N}_{avh} E_v^{-1} X + \gamma_{vh} E_v \tilde{H}_{avh} \tilde{H}_{avh}^T E_v^T \\ + \lambda_{vh}^{-1} M_{vh}^T \tilde{N}_{bvh}^T \tilde{N}_{bvh} M_{vh} + \lambda_{vh} E_v \tilde{H}_{bvh} \tilde{H}_{bvh}^T E_v^T \end{array} \right].$$

En appliquant le complément de Schur, (25) peut-être réécrite telle que :

$$\left[\begin{array}{ccccc} \Lambda_{vh} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \tilde{N}_{avh} E_v^{-1} X & -\gamma_{vh} I & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{bvh} M_{vh} & 0 & -\lambda_{vh} I & 0 & 0 \\ E_v^{-1} X & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ \tilde{G}_{vh}^T E_v^T & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (26)$$

$$\text{avec } \Lambda_{vh} = \left[\begin{array}{c} 2 \left(X E_v^{-T} \tilde{A}_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \tilde{B}_{vh}^T E_v^T \right) \\ + \gamma_{vh} E_v \tilde{H}_{avh} \tilde{H}_{avh}^T E_v^T + \lambda_{vh} E_v \tilde{H}_{bvh} \tilde{H}_{bvh}^T E_v^T \end{array} \right].$$

Enfin, afin de relâcher les conditions de stabilité obtenues, on utilise le lemme de Tuan [17]. On obtient ainsi les conditions LMIs proposées au théorème 1. \square

V. EXEMPLE NUMERIQUE

Soit le système non linéaire incertain suivant, inspiré de l'exemple nominal proposé dans [13] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + 0.05 F_a(t) x_1(t) + 0.02 F_a(t) x_2(t) + 0.05 F_b(t) u(t) \\ \quad + \varphi(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(t) + g(t) u(t) + 0.0375 F_a(t) x_1(t) + 0.015 F_a(t) x_2(t) \\ \quad + 0.0375 F_b(t) u(t) + \varphi(t) \end{cases} \quad (27)$$

avec $f(x) = -x_1^3 - x_2^3 + 5x_1^2 x_2 + 5x_1 x_2^2 - 3x_1 x_2 - x_1 - x_2$ et $g(t) = -0.7 + x_1(t) x_2(t)$.

En utilisant l'approche de décomposition en secteur non linéaires [8] et la méthode de modélisation des systèmes flous à commutations proposée dans [18], (27) peut être réécrit sous la forme d'un modèle T-S incertain et perturbé à commutations tel que :

$$\dot{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r v_q(x(t)) h_{qi}(x(t)) \begin{pmatrix} (A_{qi} + \Delta A_{qi}(t))x(t) \\ (B_{qi} + \Delta B_{qi}(t))u(t) \\ + G_{qi}\varphi(t) \end{pmatrix} \quad (28)$$

avec

$$A_{11} = A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.246 & -0.246 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -1.25 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.952 & -0.246 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = A_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.75 & -1.25 \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.246 & -1.952 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = A_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$A_{41} = A_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.952 & -1.952 \end{bmatrix}, \quad A_{42} = A_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.75 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{41} = B_{42} = [0 \quad -0.45],$$

$$B_{13} = B_{14} = B_{43} = B_{44} = [0 \quad -0.7],$$

$$B_{21} = B_{23} = B_{31} = B_{32} = [0 \quad -0.7],$$

$$B_{22} = B_{24} = B_{33} = B_{34} = [0 \quad -0.95], \quad \text{et, les perturbations}$$

décrites sous forme $\Delta A_{qi}(t) = H_{aqi}F(t)N_{aqi}$ et $\Delta B_{qi}(t) = H_{bqi}F(t)N_{bqi}$ avec, pour $q=1,2$ et $i=1,\dots,4$, $H_{aqi} = H_{bqi} = [0.2 \quad 0.15]^T$ et $N_{aqi} = N_{bqi} = [0.25 \quad 0.1]$.

Les matrices E_q sont obtenues selon (15) tel que :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et les fonctions}$$

d'appartenance $h_{qi}(x(t)) = h_{qi} \times w_{qi}$ sont données :

$$h_{11} = h_{13} = \begin{cases} \frac{f_2(x) + 1.25x_1 + 1.25x_2}{1.004x_1 + 1.004x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_{12} = h_{14} = \begin{cases} \frac{-0.246x_1 - 0.246x_2 - f_2(x)}{1.004x_1 + 1.004x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_{21} = h_{23} = \begin{cases} \frac{f_2(x) - 0.75x_1 + 1.25x_2}{-2.702x_1 + 1.004x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_{22} = h_{24} = \begin{cases} \frac{-1.952x_1 - 0.246x_2 - f_2(x)}{-2.702x_1 + 1.004x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_{31} = h_{33} = \begin{cases} \frac{f_2(x) + 1.25x_1 - 0.75x_2}{1.004x_1 - 2.702x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_{32} = h_{34} = \begin{cases} \frac{-0.246x_1 - 1.952x_2 - f_2(x)}{1.004x_1 - 2.702x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_{41} = h_{43} = \begin{cases} \frac{f_2(x) - 0.75x_1 - 0.75x_2}{-2.702x_1 - 2.702x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_{42} = h_{44} = \begin{cases} \frac{-1.952x_1 - 1.952x_2 - f_2(x)}{-2.702x_1 - 2.702x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$w_{13} = w_{14} = w_{43} = w_{44} = 1 - 4x_1x_2,$$

$$w_{11} = w_{12} = w_{41} = w_{42} = 4x_1x_2,$$

$$w_{21} = w_{22} = w_{31} = w_{32} = 4x_1x_2 + 1,$$

$$w_{23} = w_{24} = w_{33} = w_{34} = \frac{-1.4 - x_1x_2}{0.25}.$$

La loi de commutation $v_q(x(t))$ est définie par (3) et la partition de l'espace d'état suivant l'exemple proposé à la figure 1.

La résolution des conditions de stabilité du théorème 1 est obtenue via la boîte à outils Matlab LMI Tolbox. En choisissant $R = I_{2n \times 2n}$ et $C = -I_{n \times n}$, le résultat est donné par la matrice définie positive P et les gains de retour d'état K_{qi} suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 9.071 & 6.780 & 6.996 & 7.123 \\ 6.780 & 8.947 & 6.943 & 7.032 \\ 6.996 & 6.943 & 9.560 & 7.419 \\ 7.123 & 7.032 & 7.419 & 9.844 \end{bmatrix} > 0,$$

$$K_{11}^T = \begin{bmatrix} 10.924 \\ 10.707 \\ 10.990 \\ 11.147 \end{bmatrix}, \quad K_{12}^T = \begin{bmatrix} 9.749 \\ 9.531 \\ 10.990 \\ 11.147 \end{bmatrix}, \quad K_{13}^T = \begin{bmatrix} 7.022 \\ 7.048 \\ 6.692 \\ 6.787 \end{bmatrix}, \quad K_{14}^T = \begin{bmatrix} 5.601 \\ 5.628 \\ 6.692 \\ 6.787 \end{bmatrix},$$

$$K_{21}^T = \begin{bmatrix} 10.916 \\ 10.89 \\ 9.57 \\ 11.394 \end{bmatrix}, \quad K_{22}^T = \begin{bmatrix} 10.916 \\ 9.715 \\ 12.732 \\ 11.394 \end{bmatrix}, \quad K_{23}^T = \begin{bmatrix} 6.639 \\ 7.152 \\ 4.872 \\ 6.927 \end{bmatrix}, \quad K_{24}^T = \begin{bmatrix} 6.639 \\ 7.152 \\ 4.872 \\ 6.927 \end{bmatrix},$$

$$K_{31}^T = \begin{bmatrix} 10.916 \\ 10.641 \\ 11.163 \\ 9.522 \end{bmatrix}, K_{32}^T = \begin{bmatrix} 9.741 \\ 10.641 \\ 11.163 \\ 12.685 \end{bmatrix}, K_{33}^T = \begin{bmatrix} 7.041 \\ 6.501 \\ 6.823 \\ 5.045 \end{bmatrix}, K_{34}^T = \begin{bmatrix} 5.62 \\ 6.501 \\ 6.823 \\ 8.868 \end{bmatrix},$$

$$K_{41}^T = \begin{bmatrix} 10.674 \\ 10.552 \\ 9.326 \\ 9.474 \end{bmatrix}, K_{42}^T = \begin{bmatrix} 10.674 \\ 10.552 \\ 12.487 \\ 12.637 \end{bmatrix}, K_{43}^T = \begin{bmatrix} 6.526 \\ 6.451 \\ 4.766 \\ 5.018 \end{bmatrix}, K_{44}^T = \begin{bmatrix} 5.526 \\ 6.451 \\ 8.589 \\ 8.841 \end{bmatrix},$$

et le taux d'atténuation des perturbations externes $\eta = 1.932$.

Afin d'illustrer l'efficacité de la synthèse de loi de commande proposée, une simulation du système global en boucle fermée a été réalisée avec les conditions initiales $x(0) = [-0.4 \ -0.4]^T$ et en appliquant une perturbation $\varphi(t)$ correspondant à un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 2. Les figures 2, 3 et 4 présentent respectivement le comportement dynamique en boucle fermée du système, l'évolution du signal de commutation ainsi que le signal de commande.

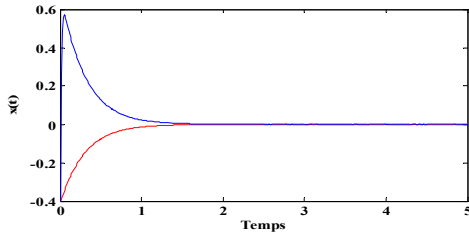


Fig.2. Réponse du système en boucle fermée.

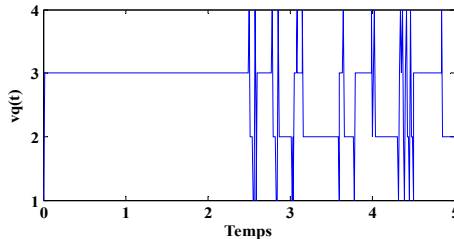


Fig.2. Evolution de la loi de commutation.

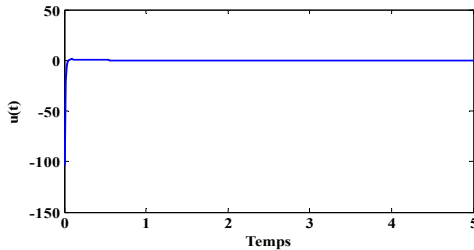


Fig.3. Evolution du Signal de commande.

VI. CONCLUSION

Dans ce papier, des conditions LMI pour la stabilisation des systèmes flous de type T-S incertains à commutations soumis à des perturbations externes ont été proposées. Ainsi, la synthèse d'un contrôleur PDC à commutation est synthétisée via une fonction de Lyapunov multiple quadratique à

commutation et d'un critère H_∞ . Un exemple numérique illustre l'efficacité et l'applicabilité de l'approche proposée.

VII. REMERCIEMENTS

Les auteurs souhaitent remercier le GIS 3SGS dans le cadre du projet COSMOS2, le FEDER et la région Champagne-Ardenne dans le cadre du CPER MOSYP, le ministère des affaires étrangère et le CNOUS pour leurs soutient financier ainsi que Mme Pam Al. Dutoo pour ses remarques avisées.

REFERENCES

- [1] M. Johansson, "Piecewise Linear Control Systems," Ph.D. dissertation, Dept. Automatic Control, Lund Inst. Technol., Lund, Sweden, 1999.
- [2] D. Liberzon, A. S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," IEEE Control Systems Magazine vol. 19, no. 15, pp. 59-70, 1999.
- [3] P.J. Antsaklis, "Hybrid Systems: Theory and Applications, a Brief Introduction to the Theory and Applications of Hybrid Systems", Proceeding of the IEEE 88, n°7, pp. 879-889, 2000.
- [4] Laurentiu Hetel, Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation, Thèse de doctorat de l'université de nancy, novembre 2007.
- [5] R. Palm, D. Driankov, "Fuzzy switched hybrid systems-Modeling and identification", Proc of the IEEE ISIC/CIRA/ISAS Joint Conference, Gaithersburg, MD, September 14-17, pp. 130-135, 1998.
- [6] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemai, J. Barbot, F. Floquet, "Exact differentiation and sliding mode observer for switched mechanical systems", Nonlinear Analysis: special issue (4) on Hybrid Systems and Applications, Vol. 65, Iss. 5, pp. 1050-1069, 2006.
- [7] T. Takagi, M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control". IEEE Trans Syst, Man and Cyber, Vol, 115, pp 116-132, 1985.
- [8] K. Tanaka, H.O. Wang, "Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach", Wiley, New York, 2001.
- [9] A. Sala, T.M. Guerra, R. Babuška. "Perspectives of fuzzy systems and control", Fuzzy Sets and Systems 156(3), pp 432-444, 2005.
- [10] T. Bouarar, K. Guelton, B. Mansouri, N. Manamanni, "LMI Stability Conditions for Takagi-Sugeno Uncertain Descriptors", FUZZ-IEEE, International Conference on Fuzzy Systems, 2007.
- [11] D. Jabri, K. Guelton, N. Manamanni, M. Abdelkrim, "Fuzzy Lyapunov decentralized control of Takagi-Sugeno interconnected descriptors", IEEE Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation, USA, 2009.
- [12] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski, T.M. Guerra, "Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models ", Information Sciences, Vol. 179, Iss. 4, pp. 446-457, 2009.
- [13] H. Ohtake, K. Tanaka, H.O. Wang "Switching fuzzy controller design based on switching Lyapunov function for a class of nonlinear systems" IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, Vol.36, Iss.1, pp. 13-23, February 2006.
- [14] V. Ojleska, G. Stojanovski, "Switched Fuzzy Systems: Overview and Perspectives", 9th International PhD Workshop on Systems and Control: Young Generation Viewpoint, Slovenia, 1. - 3. October 2008.
- [15] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, M. Djemai, "Robust pole placement controller design in LMI region for uncertain and disturbed switched systems", Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 2, Iss. 4, pp. 1136-1143, 2008.
- [16] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, "Linear matrix inequalities in system and control theory", SIAM Studies in applied mathematics, Philadelphia, 1994.
- [17] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, Y. Yamamoto, "Parametrized linear matrix inequality techniques in fuzzy control design", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 9, Iss. 2, pp. 324-332, 2001.
- [18] H. Ohtake, K. Tanaka, H.O. Wang, "A construction method of switching Lyapunov function for nonlinear systems," in Proc. 2002 FUZZ-IEEE, Honolulu, HI, May 2002, pp. 221-226.