

Quelques observations sur la linéarisation de l'erreur de l'observation multi-sorties

Driss BOUTAT¹, Krishna BUSAWON², Jean-Claude GUILLOT³ et Abderraouf BENALI¹

¹ENSI de Bourges,

Institut PRISME

88, Boulevard Lahitolle 18020 Bourges Cedex, France

driss.boutat@ensi-bourges.fr

² Northumbria University, School of Engineering and Information Sciences,

Newcastle upon Tyne NE1 8ST, U.K.

krishna.busawon@northumbria.ac.uk

³ Faculté des sciences, Université d'Orléans,

Rue Gaston Berger, BP 4043, 18028 Bourges cedex. France

jean-claude.guillot@univ-orleans.fr

Résumé— Ce papier donne quelques commentaires ainsi que quelques idées sur les conditions géométriques qui permettent de dire si un système non linéaire multi sorties possède, à un changement de coordonnées près, une erreur d'observation linéaire. Plus précisément, on va concentrer notre point de vue sur les travaux de Krener et Respondek d'une part et ceux de Xia et Gao d'autre part.

Nous allons commenter le soit disant contre exemple de Xia et Gao.

Mots-clés— systèmes non linéaires, erreur d'observation linéaire, multi sorties.

I. Introduction

Il est connu que le problème de linéarisation (la mise sous forme normal de Brunovsky commandable) autour d'un point de fonctionnement d'un système dynamique multi entrées via un changement de coordonnées et un retour d'état statique ou dynamique est un problème résolu ([12], [15], [17], [19], [20], [22], [23] [13]). En outre, une généralisation de cette linéarisation se trouve dans le concept de la platitude ([16], [28], [27], [26], [21]).

Cependant ¹, jusqu'à nos jours, le problème de la mise sous forme de Brunovsky observable modulo une injection de sortie est un problème non complètement résolu. Ce problème connu aussi sous le nom de forme canonique d'observabilité non linéaire (FCON) a rencontré une discontinuité des idées dans la recherche d'une solution complète. Plus précisément, il s'agit de caractériser les systèmes non linéaires de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (2)$$

qui sont transformable via d'un changement de coordonnées $z = \phi(x)$ sous la forme canonique d'observabilité non linéaire suivante (FCON) :

$$\dot{z} = (\phi_* f)(z) = Az + \beta(\bar{y}) \quad (3)$$

$$\bar{y} = \Gamma(y) = Cz \quad (4)$$

¹On ne discutera pas ici les travaux sur les grands gains introduits par Bornard, Gautier et Hammouri (pour d'autres références voir [33], [34]) ni les méthodes de transformation directes introduites par Glumineau, Moog, Plestan (voir [35], [37], [41])

où $z \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, A et C sont les formes de Brunovsky ou companion d'observabilité, $\Gamma(y)$ est un difféomorphisme (local) sur les sorties et $(\phi_* f)(z) = d\phi(\phi^{-1}(z)).f(\phi^{-1}(z))$. Sous la forme (3)-(4) on peut appliquer l'observateur robuste suivant :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(\bar{y}) + K(\bar{y} - \hat{y}) \quad (5)$$

de sorte que la dynamique l'erreur de l'observation $e = z - \hat{z}$ est linéaire :

$$\dot{e} = (A - KC)e. \quad (6)$$

Grace à cette dernière équation le problème de la mise sous forme FCON s'appelle aussi le problème de linéarisation de l'erreur d'observation.

En 1983 dans ([6]), la forme (3)-(4) a été introduite et traité par Krener et Isidori pour les systèmes **mono sortie** avec $\Gamma = Id$ c'est-à-dire en gardant la même sortie. Les auteurs ont donné des conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire un système dynamique non linéaire mono sortie pour pouvoir le mettre, à l'aide d'un changement de coordonnées sous la forme FCON. Même si la classe de système non linéaire concernés par ses conditions est petite, ce résultat a trouvé plusieurs applications en automatique, en électronique, en électrotechnique, en robotique. A l'époque c'était l'un des résultats de la théorie de l'observation qui permettait d'appliquer un observateur robuste pour les systèmes non linéaires (observateur de Leuenberger [30], [32]).

En 1985 dans [7], Krener et Respondek ont traité le problème de la mise des systèmes multi sorties sous la forme la plus générale présentée ci-dessus dans (3)-(4). Comme on peut le constater leur travail a apporté plus qu'une généralisation des formes mono sortie aux formes multi sorties. En effet, il a mis en évidence le fait d'avoir une erreur d'observation linéaire même avec changement (un difféomorphisme) sur les sorties : $\Gamma \neq Id$.

Néanmoins, en 1987 ce travail a connu une contre "publicité" avec l'apparition du travail ([11]) de Xia et Gao sur les formes FCON. Ce dernier a en effet met en évidence un manque dans les conditions suffisantes énoncées dans le premier mais avec $\Gamma = id$ (voir aussi [39], [5], [25]) c'est-à-dire

sans faire allusion au cas du difféomorphisme sur les sorties qui est une chose fondamentale dans le développement des formes FCON.

C'est peut être là le tournant dans la recherche sur les formes FCON.

En effet, depuis le papier ([11]) la recherche sur les formes (3)-(4) a pris deux autres directions. L'une s'intéressait aux formes dépendantes des sorties ce qui signifie que la matrice A dans (3)-(4) dépend des sorties y ([40], [38]). L'autre direction est basée sur l'idée de l'immersion introduite en 1983 par Fliess et Kupka ([4]). Il s'agit de caractériser les systèmes non linéaires qui peuvent se linéariser (sans terme d'injection de sortie) dans un espace d'état de dimension plus grande que celui où le système dynamique original est défini.

Ce papier est organisé comme suit. Le paragraphe qui suit sera consacré à introduire le matériel nécessaire pour la compréhension de ce papier. Il posera aussi le problème de la mise sous forme FCON. Le paragraphe 3 est dédié aux commentaires sur le contre exemple de Xia et Gao. Le paragraphe 4 présentera l'algorithme de la méthode dites la mise sous forme canonique d'observabilité non linéaire avec difféomorphisme sur les sorties.

II. Notations, définitions et hypothèses

Cette section est dédiée aux notations, aux hypothèses et un résultat fondamental qui permet une bonne analyse du problème des formes FCON traitées dans ce papier.

On considère un système dynamique non linéaire décrit comme suit :

$$\dot{x} = f(x) \quad (7)$$

$$y = h(x) \quad (8)$$

où $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sans perte de généralité, on suppose que $0 \in \mathcal{X}$ et que $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$. En outre, on suppose que les composantes $y_1 = h_1, \dots, y_m = h_m$ de la sortie h sont indépendantes.

On notera par r_1, \dots, r_m les indices d'observabilité de la paire $(f(x), h(x))$; c'est-à-dire que (r_1, \dots, r_m) est un m -uplet d'entiers donnés par : $r_i = \text{card}\{m_j \geq i, j \geq 0\}$ avec $m_j = \text{rang}(D_j) - \text{rang}(D_{j-1})$ où $D_k = \text{Eng}\{dL_f^k h_i; 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq k\}$ et $m_0 = m = \text{rang}(D_0)$.

On fera long de ce travail les hypothèses suivantes :

Hypothèses 1 : H1) les indices d'observabilité $(r_i)_{1 \leq i \leq m}$ du système dynamique (7-8) sont constant sur \mathcal{X} .

H2) La paire $(f(x), h(x))$ satisfait la condition du rang d'observabilité. Plus précisément, le rang de la codistribution

$$\Delta = \text{span} \left\{ dL_f^{k-1} h_j; j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r_j \right\} \quad (9)$$

est égale $n = \sum_{i=1}^m r_i$.

En posant :

$$\theta_{j,k} = dL_f^{k-1} h_j \quad (10)$$

on peut définir la famille de champs de vecteurs suivante

$(\tau_{i,1})_{1 \leq i \leq m}$ tels que :

$$\theta_{i,r_i}(\tau_{i,1}) = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq m \quad (11)$$

$$\theta_{i,k}(\tau_{i,1}) = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq r_i - 1 \quad (12)$$

$$\theta_{j,k}(\tau_{i,1}) = 0 \text{ pour } j < i \text{ et } 1 \leq k \leq r_i \quad (13)$$

$$\theta_{j,k}(\tau_{i,1}) = 0 \text{ pour } j > i \text{ et } 1 \leq k \leq r_j. \quad (14)$$

Grace à l'hypothèse du rang d'observabilité H2), la famille de champs de vecteurs $(\tau_{i,1})_{1 \leq i \leq m}$ donnée ci-dessus par les équations (11-14), fournit un repère, $\tau = (\tau_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i)$ of du fibré tangent $T\mathcal{X}$ de \mathcal{X} , où

$$\tau_{i,k} = -\text{ad}_f \tau_{i,k-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } 2 \leq k \leq r_i. \quad (15)$$

Pour énoncer un résultat utile pour le reste de ce papier on va consider pour $1 \leq j, i \leq m$ et $1 \leq k \leq r_j, 1 \leq l \leq r_i$ la matrices suivante :

$$\Lambda = \theta\tau = \theta_{j,k}(\tau_{i,l})$$

$$= \begin{pmatrix} \theta_{1,1}(\tau_{1,1}) & \dots & \theta_{1,1}(\tau_{1,r_1}) \\ \theta_{1,2}(\tau_{1,2}) & \dots & \theta_{2,1}(\tau_{1,r_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_{1,r_1}(\tau_{1,1}) & \dots & \theta_{1,r_1}(\tau_{1,r_1}) \\ \theta_{2,r_1}(\tau_{1,1}) & \dots & \theta_{2,r_1}(\tau_{1,r_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_{m,r_m}(\tau_{1,1}) & \dots & \theta_{m,r_m}(\tau_{1,r_1}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_{1,1}(\tau_{2,1}) & \dots & \theta_{1,1}(\tau_{m,r_m}) \\ \theta_{2,1}(\tau_{2,1}) & \dots & \theta_{2,1}(\tau_{m,r_m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_{1,r_1}(\tau_{2,1}) & \dots & \theta_{1,r_1}(\tau_{m,r_m}) \\ \theta_{2,r_1}(\tau_{2,1}) & \dots & \theta_{2,r_1}(\tau_{m,r_m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_{m,r_m}(\tau_{2,1}) & \dots & \theta_{m,r_m}(\tau_{m,r_m}) \end{pmatrix}$$

Grace à la condition du rang d'observabilité cette matrice est inversible. Il est important de noter que cette matrice contient des sous matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \theta_{i,1}(\tau_{i,1}) & \theta_{i,1}(\tau_{i,2}) & \dots & \theta_{i,1}(\tau_{i,r_i}) \\ \theta_{i,2}(\tau_{i,1}) & \theta_{i,2}(\tau_{i,2}) & \dots & \theta_{i,2}(\tau_{i,r_i}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{i,r_i}(\tau_{i,1}) & \theta_{i,r_i}(\tau_{i,2}) & \dots & \theta_{i,r_i}(\tau_{i,r_i}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & * \\ \dots & 1 & * & \dots \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Cette forme particulière permet de calculer facilement son inverse. posons $\Lambda^{-1} = (b_{i,j})$ son inverse et définissons les n -formes différentielles suivante :

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta := (\omega_{i,j}).$$

où pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq r_i$

$$\omega_{i,j} = \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^{r_k} b_{i,s} \theta_{k,s}$$

La démonstration de ce résultat peut être consulter dans ([2]) :

Lemme 1 : Si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite

i) Les champs de vecteurs du repère τ commutent c'est-à-dire :

$$[\tau_{i,k}, \tau_{j,s}] = 0 \quad (16)$$

pour $1 \leq i, j \leq m$ et $1 \leq k \leq r_i$ et $1 \leq s \leq r_j$

ii) si les formes différentielles $\omega_{i,j}$ sont fermées c'est-à-dire :

$$d\omega_{i,j} = 0 \quad (17)$$

ce qui s'écrit aussi $d\omega = 0$,

alors, il existe un changement de coordonnées qui transforme le système dynamique (7)-(8) sous la forme de m blocs suivants :

$$\dot{z}_{i,j} = A_i z_i + \beta_i(z_{1,r_1}, \dots, z_{m,r_m}) \quad (18)$$

où $z_i = (z_{i,1}, \dots, z_{i,r_i})^T$, la matrice A_i est la matrice compagnon $r_i \times r_i$ $\beta_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,r_i})^T$ est un champ de vecteurs $r_i \times 1$ qui ne dépend que des dernières variables de chaque vecteur z_i pour $1 \leq i \leq m$

les sorties s'écrivent dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$y_1 = z_{1,r_1} \quad (19)$$

$$y_i = z_{i,r_i} + R_i(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}) \quad (20)$$

$$\xi_j = (z_{j,r_j-r_i+1} \ \dots \ z_{j,r_j})^T, \ 1 \leq j \leq i-1 \quad (21)$$

On note que si $r_{i-1} = r_i$, on pose $\xi_{i-1} = \emptyset$.

Faisons quelques remarques sur le lemme 1 :

Remarques 1 : 1. Les différentielles des nouvelles coordonnées $z_{i,j}$ sont données par :

$$dz_{i,j} = \omega_{i,j}$$

de sorte que le changement de coordonnées dans le lemme 1 est donné par :

$$z_{j,k} = \phi_{j,k}(x) = \int_{\gamma} \omega_{j,k} \quad (22)$$

pour tout $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq r_j - 1$, où $\gamma [0, 1] \rightarrow \chi$ est une courbe telle que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = x$.

2. Il convient de voir les nouvelles sorties du système (18) sous la forme suivante :

$$\bar{y}_1 = z_{1,r_1} = y_1 \quad (23)$$

$$\bar{y}_i = z_{i,r_i} = y_i - R_i(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}) \quad (24)$$

3. Le lemme 1 permet de comprendre l'oubli dans l'article de Krener et Respondek. En effet, ils ont affirmé que les conditions de commutativité (16) sont aussi suffisantes pour avoir $R_i = 0$ dans la forme des sorties (20).

4. Notons aussi que dans la forme (20) de y_i les dérivées y_j pour $j < i$ peuvent être présentes.

5. On pourrait croire que les termes d'injections de sorties β_i et les fonctions R_i sont des objets à rechercher à part. En fait, dès le moment où le repère τ est choisit et qu'il satisfait aux conditions de commutativité (16) alors la forme du système dynamique ainsi que ses sorties sont donnés par un seul difféomorphisme à savoir ϕ .

6. Pour avoir un lien direct entre les sorties (sans la présence des dérivées des sorties) et les variables z_{i,r_i} qui apparaissent dans les termes d'injections de sorties β il faut que d'autres conditions dites d'indépendances d'une sortie donnée par rapport aux dérivées des autres sorties. Ces conditions sont les suivantes :

$$dh_i(\tau_{j,r_i+k}) = 0 \quad (25)$$

pour $2 \leq j < i \leq m$ tels que $r_j - r_i > 1$ et ceci pour tout $1 \leq k \leq r_j - r_i - 1$.

7. La dernière condition (25) est d'une importance primordiale puisque il implique que la $i^{\text{ème}}$ sortie y_i ne dépend pas des dérivées $y_j^{(k)}$ $k > 1$ des sorties y_j avec $j < i$. Pour $r_j = r_i$ ou $r_j - r_i = 1$ ces conditions sont données par construction des τ_{ij}

Dans ce travail on s'intéresse que système dynamique dans le repère τ vérifié les conditions ci-dessus (25) de non indépendances des dérivées. Par conséquent, sous les conditions de commutativité (16) et les conditions d'indépendances (25) des dérivées les sorties dans le lemme 1 s'écrivent :

$$y_1 = z_{1,r_1}$$

$$y_i = z_{i,r_i} + R_i(y_1, \dots, y_{i-1})$$

De sorte que, les nouvelles sorties dans (23-24) deviennent : $\bar{y}_i = z_{i,r_i} = y_i - R_i(y_1, \dots, y_{i-1})$. Avec ces nouvelles sorties la dynamique (18) supporte un observateur de type (5).

III. Quelques commentaires : Krener-Respondek & Xia-Gao

Cette section est consacrée à deux exemples qui vont mettre au clair l'un des objectifs de ce papier.

Exemple 1 : Soit le système dynamique donné par Xia et Gao sur $X = \mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2, & \dot{x}_2 = x_1 & \text{et} & \dot{x}_3 = x_1 \\ y_1 = x_2 & \text{et} & y_2 = x_3 \end{cases} \quad (26)$$

les 1-forme d'observabilité qui lui sont associées sont :

$$\theta_{1,1} = dx_2, \quad \theta_{1,2} = dx_1 \text{ et } \theta_{2,1} = dx_3$$

les champs de vecteurs qui forment le repère τ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tau_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & \tau_{1,2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \tau_{2,1} &= \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que $[\tau_{i,j}, \tau_{k,s}] = 0$ et comme les indices d'observabilité sont tels que $r_1 - r_2 = 1$ les conditions (25) d'indépendance des dérivées sont automatiquement satisfaites. Plus précisément, on a :

$$dy_2(\tau_{11}) = 0 \text{ et } dy_2(\tau_{12}) = 1.$$

La dernière équation montre que y_2 dépend linéairement de y_1 . Par conséquent, il existe un difféomorphisme qui transforme (26) sous une forme FCON. En effet, on considère

$$\begin{aligned} \Lambda & : = \theta\tau = (\theta_{i,k}(\tau_{j,l})) \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, la différentielle du difféomorphisme est donnée par :

$$\phi_* = \Lambda^{-1}\theta = \begin{pmatrix} -x_2 dx_2 + dx_1 \\ dx_2 \\ -dx_2 + dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dz_{11} \\ dz_{12} \\ dz_{21} \end{pmatrix}$$

D'où $z_{11} = x_1 - \frac{1}{2}x_2^2$, $z_{12} = x_2$ et $z_{21} = x_3 - x_2$ transforme le système dynamique ci-dessus sous la forme suivante :

$$\dot{z}_{1,1} = 0, \quad \dot{z}_{1,2} = z_{1,1} + \frac{1}{2}z_{1,2}^2, \quad \text{et} \quad \dot{z}_{2,1} = 0 \quad (27)$$

avec les nouvelles sorties suivantes :

$$\bar{y}_1 = z_{1,2} = y_1 \quad \text{et} \quad \bar{y}_2 = z_{2,1} = y_2 + y_1. \quad (28)$$

On peut donc écrire la système (27-28) sous la forme compact suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z} & = Az + \beta(\bar{y}) \\ \bar{y} & = Cz \end{aligned}$$

où $z = (z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1})^T$ et

$$\begin{aligned} A & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta(\bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\bar{y}_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C & = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme conséquence immédiate, on peut concevoir un observateur qui linéarise l'erreur d'observation du système (27-28) comme suit :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(\bar{y}) + K(\bar{y} - \hat{y})$$

Bien sûr si Xia et Gao parlaient de la forme FCON avec $\Gamma = Id$, alors le système (26) ne peut pas se mettre sous cette forme. Par contre, si l'objectif est de linéariser l'erreur de l'observation alors il est atteint avec les résultats de Krener et Respondek.

Donnons un autre exemple pratique qui est dû Chaisson et Novotnak en 1993 ([36]). Comme on va le voir, cet exemple a la même propriété que celui de Xia et Gao. Le fait que les auteurs ont pu calculer le difféomorphisme sans faire allusion ni au repère τ ni aux conditions de commutativité (16), leur a permis de ne pas faire attention à l'exemple de Xia et Gao et ses conséquences.

Exemple 2 : On considère la dynamique d'un moteur étape par étape donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 x_3 \sin(N_r x_4) + u_1 \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2 x_3 \cos(N_r x_4) + u_2 \\ \dot{x}_3 = -k_4 x_3 - k_3 x_1 \sin(N_r x_4) - K_3 x_2 \cos(N_r x_4) \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{cases}$$

les sorties sont :

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 \quad \text{et} \quad y_3 = x_4.$$

où les variables $x_1 = i_a$, $x_2 = i_b$ désignent les courants et $x_4 = \theta$, $x_3 = \omega$ désignent respectivement l'angle et l'accélération angulaire et $u_1 = v_1$
 $u_2 = v_2$ sont les tensions.

Les 1-formes d'observabilité sont données par :

$$\theta_{1,1} = dx_4, \quad \theta_{1,2} = dx_3, \quad \theta_{2,1} = dx_2, \quad \theta_{3,1} = dx_1$$

Les champs de vecteurs qui forment le repère τ sont comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_{1,1} & = \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tau_{1,2} & = \frac{\partial}{\partial x_4} + K_2 \sin(N_r x_4) \frac{\partial}{\partial x_1} - K_2 \cos(N_r x_4) \frac{\partial}{\partial x_2} - K_4 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tau_{2,1} & = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \tau_{3,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que les conditions de commutativité $[\tau_{i,j}, \tau_{k,s}] = 0$ sont satisfaites et que les directions de commandes sont indépendantes $[\tau_{1,1}, g_s] = 0$ de \dot{y} . Maintenant, un calcul direct donne :

$$\Lambda = \theta\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 \cos(N_r x_4) & 1 & 0 \\ 0 & k_2 \sin(N_r x_4) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit la différentielle du difféomorphisme :

$$d \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \\ z_{2,1} \\ z_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 \cos x_4 N_r & 0 & 1 & 0 \\ -k_2 \sin x_4 N_r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_4 \\ dx_3 \\ dx_2 \\ dx_1 \end{pmatrix}$$

$$d \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \\ z_{2,1} \\ z_{3,1} \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} k_4 x_4 + x_3 \\ x_4 \\ x_2 + k_2 \sin x_4 N_r \\ x_1 + k_2 \cos x_4 N_r \end{pmatrix}$$

D'où la dynamique sous la forme FCON suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,1} = -k_3 y_1 \sin(N_r y_3) - K_3 y_2 \cos(N_r y_3) \\ \dot{z}_{1,2} = z_{1,1} - k_4 y_3 \\ \dot{z}_{2,1} = -k_1 y_2 + u_2 \\ \dot{z}_{3,1} = -k_1 y_1 + u_1 \end{cases}$$

Donnons les nouvelles sorties $\bar{y}_3 = y_3 = z_{1,2}$, $\bar{y}_2 = y_2 + \frac{k_2}{N_r} \sin(N_r y_3) = z_{2,1}$ et $\bar{y}_1 = y_1 + \frac{k_2}{N_r} \cos(N_r y_3) = z_{3,1}$

On remarque que les deux dernières sorties dépendent cette fois-ci non linéairement de la première. Notons que la forme compact de système est : $\dot{z} = Az + \beta(y, u)$. Encore une fois, cet exemple possède à un difféomorphisme près une erreur d'observation linéaire. Il serait intéressant de consulter le papier ([36]) pour voir que le calcul de ce difféomorphisme est facile.

A partir du point (6) des remarques 1, il est possible de voir que les deux premiers exemples satisfont aux conditions du résultat général suivant.

Proposition 1 : On suppose que les indices d'observabilité sont tels que $|r_i - r_j| \leq 1$ pour tout $i, j \leq m$,

alors les conditions de commutativité (16) sont nécessaires et suffisantes pour que l'erreur du système dynamique soit linéaire.

Remarque 1 : Un cas particulier de la proposition est donné par $r_i = r_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq m$. Dans ce cas les conditions du lemme sont suffisantes et nécessaires ($R_i = 0$). Ce résultat est obtenu par Krener et Respondek.

Pour finir cette section, donnons un exemple qui ne marche pas et qui reflète bien la correction qui a été apporté par le travail de Xia et Gao.

Exemple 3 : on considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = x_1, \dot{x}_3 = x_2, \dot{x}_4 = x_3 \\ \dot{x}_5 = 0, \dot{x}_6 = x_5 + x_3^2 + x_4 x_2 \\ y_1 = x_4 \text{ et } y_2 = x_6 \end{cases}$$

On montre que les conditions du lemme 1 sont satisfaites et qu'il existe un difféomorphisme (par la seule coordonnée $z = x_6 - x_4 x_3$) qui transforme ce système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = x_1, \dot{x}_3 = x_2, \dot{x}_4 = x_3 \\ \dot{x}_5 = 0, z = x_5 \\ y_1 = x_4 \text{ et } y_2 = z + x_3 x_4 = z + \frac{1}{2} \dot{y}_1^2 \end{cases}$$

On voit clairement la présence de la dérivée seconde de la sortie y_1 dans la nouvelle variable sortie $z = \bar{y}_2 = y_2 - \frac{1}{2} \dot{y}_1^2$ ce qui ne permet pas d'adopter l'observateur (5).

Dans un travail intéressant de Noh, Jo & Seo ([18]), les auteurs ont traité l'exemple de Xia et Gao par la méthode de l'immersion. Comme on vient de le montrer il n'est pas nécessaire d'étendre l'espace d'état pour linéariser l'erreur de l'observation de cet exemple. En outre, leur construction sur cette exemple est un peu artificielle. Dans la section qui suit nous allons exposer la linéarisation par difféomorphisme sur les sorties.

IV. Difféomorphisme sur les sorties

Cette section présente les conditions nécessaires et suffisantes qui permettent de savoir si un système non linéaire peut se mettre sous la forme FCON.

Sous la condition d'indépendance des sorties et de leur dérivées, le lemme introduit déjà la notion du difféomorphisme sur les sorties avec une écriture particulière $\bar{y}_i = z_{i,r_i} = y_i + R(y_1, \dots, y_{i-1})$.

Par contre, si les conditions du lemme ne sont pas satisfaites : certaines conditions de commutativité (16) ne sont pas vérifiées, alors on doit vérifier si elles peuvent éventuellement être satisfaites en considérant un nouveau repère τ^1 en posant pour tout $1 \leq i \leq m$:

$$\tau_{i,1}^1 = l_i(y_1, \dots, y_i) \tau_{i,1} \quad (29)$$

où $l(y_1, \dots, y_i)$ sont des fonctions des sorties non nulles. Puis, on définit le reste des champs de vecteurs de τ^1 par induction comme suit :

$$\tau_{i,j}^1 = ad_f \tau_{i,j-1} \quad (30)$$

pour tout $2 \leq j \leq r_i$.

Il est facile de voir que :

$$\tau_{i,j}^1 = l(y_1, \dots, y_i) \tau_{i,j} - (L_f l) \tau_{i,j-1} \quad (31)$$

Les développements détaillés du résultat qui suit peuvent être consulter dans ([2]). Une autre version de ce résultat se trouve dans le papier qui a introduit pour la première fois la notion de difféomorphisme sur les sorties ([7]).

Théorème 1 : il existe un difféomorphisme qui transforme le système dynamique sous la forme FCON si et seulement si il existe des fonctions $(l_i)_{1 \leq i \leq m}$ telles que les champs de vecteurs du nouveau repère τ^1 satisfassent les conditions de commutativité.

Remarques 2 : 1. La structure triangulaire des fonctions l_i est imposée par la constructions des premières éléments $\tau_{1,i}$. Mais il facile de traiter le problème d'une manière plus générale.

2. Les fonctions l_i sont déterminée en imposant les conditions de commutativité.

3. Il existe un lien entre les composantes du difféomorphisme $\Gamma = (\Gamma_i)_{1 \leq i \leq m}$ et les fonctions l_i donné par :

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial y_i} = \frac{1}{l_i}. \quad (32)$$

4. Comme nous l'avons signalé dans la remarque le difféomorphisme Γ sur les sorties est une partie du difféomorphisme générale $z = \phi$ dont la différentielle est donné par :

$$d\phi = \Lambda_1^{-1} \theta \quad (33)$$

où $\Lambda_1 = \theta(\tau_1)$ est l'évaluation de θ sur le nouveau repère τ^1 .

Donnons un exemple simple pour illustré le théorème.

Exemple 4 : On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = x_1 + x_2 x_3, \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = 0, \dot{x}_5 = x_4 \\ y_1 = e^{x_3} - 1 = h_1 \text{ et } y_2 = e^{x_5} + e^{x_3} e^{x_5} - 2 = h_2 \end{cases} \quad (34)$$

Un calcul direct donne les champs de vecteurs du repère par :

$$\begin{aligned} \tau_{1,1} &= e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \tau_{1,2} = e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} + e^{-x_3} x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \tau_{1,3} &= e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} + e^{-x_3} (2x_2 + x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + e^{-x_3} x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \tau_{2,1} &= \eta \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad \tau_{2,2} = \eta \frac{\partial}{\partial x_5} - (x_4 \eta_{x_5} + x_2 \eta_{x_3}) \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que l'on a :

$$[\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] = 0, \quad [\tau_{1,2}, \tau_{1,3}] \neq 0 \text{ et } [\tau_{2,1}, \tau_{2,2}] \neq 0$$

Donc, les conditions de commutativité ne sont pas toutes vérifiées.

Maintenant en posant $\tau_{1,1}^1 = l_1(y_1) \tau_{1,1}$ et $\tau_{2,1}^2 = l(y_1, y_2) \tau_{2,1}$, puis on par induction $\tau_{1,2}^1, \tau_{1,3}^1$ et $\tau_{2,2}^2$, on montre que les équations :

$$[\tau_{1,2}, \tau_{1,3}] = 0 \text{ et } [\tau_{2,1}, \tau_{2,2}] = 0.$$

sont satisfaites pour :

$$l_1 = 1 + y_1 = e^{x_3} \text{ et } l_2 = \ln(y_2 + 2) - \ln(y_1 + 2).$$

Par conséquent, dans ce nouveau repère on a : $z_{1,1} = x_1$, $z_{1,2} = x_2 - \frac{1}{2}x_3^2$, $z_{1,3} = x_3$, $z_{2,1} = x_4$ et $z_{2,2} = x_5$. La partie de Λ_1 qui fournit le difféomorphisme sur les sorties est donnée par :

$$\begin{pmatrix} dz_{1,3} \\ dz_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^{x_3}} & 0 \\ -\frac{1}{e^{x_3} + 1} & \frac{1}{e^{x_5} + e^{x_3}e^{x_5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dh_1 \\ dh_2 \end{pmatrix}.$$

D'où on a : $z_{1,3} = x_3 = \ln(y_1 + 1)$ et $z_{2,2} = x_5 = \ln\left(\frac{y_2 + 2}{y_1 + 2}\right)$. Finalement le système dynamique dans les nouvelles coordonnées s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,1} = 0, \dot{z}_{1,2} = z_{1,1} + \frac{1}{2}(\bar{y}_1)^2 \text{ et } \dot{z}_{1,3} = z_{1,2} \\ \dot{z}_{2,1} = 0 \text{ et } \dot{z}_{2,2} = z_{2,1} \\ \bar{y}_1 = z_{1,3} \text{ et } \bar{y}_2 = z_{2,2} \end{cases} \quad (35)$$

V. Conclusion

Dans ce papier nous avons essayé de donner une idée sur quelques développements de la théorie de la linéarisation de l'erreur de l'observation. Nous avons aussi mis en évidence une rupture dans les idées de la recherche dans ce domaine.

Remerciements

Nous exprimons notre sincère gratitude aux reviewers de CIFA pour leurs remarques et commentaires qui ont permis d'améliorer le contenu de ce papier.

RÉFÉRENCES

- [1] D. Boutat and K. Busawon, "Extended Nonlinear Observable Canonical Form for Multi-Output Dynamical Systems", *Proceedings of the IEEE CDC*, 2009.
- [2] D. Boutat, A. Benali, H. Hammouri and K. Busawon "New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs", *Automatica*, 2009.
- [3] D. Boutat, "Geometrical conditions to linearize observer error via 0,1,...,(n-2)" *7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS'07*, 2007.
- [4] M. Fliess and I. Kupka, "A finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems", *SIAM Journal of Control and Optimization* 21(5), 721-728, 1983.
- [5] M. Hou and A.C. Pugh, "Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems", *Systems and Control Letters*, 37, 1-9, 1999.
- [6] A. J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observer", *Systems and Control Letters* 3, 47-52, 1983.
- [7] A.J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observer with linearizable error dynamics", *SIAM J. Control and Optimization*, 30, 197-216, 1985.
- [8] M.V. Lopez, F. Plestan, A. Glumineau, "Linearization by Completely Generalized Input Output Injection", *Kybernetika*, 35, no. 6, 793-802, 1999.
- [9] A. Phelps, "On constructing nonlinear observers", *SIAM J. Control and Optimization* 29, 1991.
- [10] F. Plestan and A. Glumineau, "Linearization by generalized input output injection", *System Control Letters*, 31 115-128, 1997.
- [11] X. H. Xia and W.B. Gao, "Nonlinear observer with linearizable error dynamics", *SIAM Journal Control and Optimization* 27, 199-216, 1989.
- [12] Aranda-Bricaire E. , C. H. Moog, et J. B. Pomet. *A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization*. IEEE Trans. Automat. Control, 40 :127132, 1995.
- [13] B. Charlet, J. Lévine, et R. Marino. *Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization*. SIAM J. Control Optim., 29 :3857, 1991.
- [14] E. Delaleau et P. S. Pereira da Silva. *Filtrations in feedback synthesis : Part I systems et feedbacks*. Forum Math., 10(2):147174, 1998.
- [15] J. Descusse et C. H. Moog. Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems. *Internat. J. Control*, 42 :13871398, 1985.
- [16] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 315 :619624, 1992.
- [17] M. Guay, P. J. McLellan, et D.W. Bacon. *A condition for dynamic feedback linearization of control-affine nonlinear systems*. *Internat. J. Control*, 68(1) :87106, 1997.
- [18] D. Noh, N.H. Jo, J.H. Seo, "Nonlinear observer design by dynamic observer error linearization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49, 10 :1746-1753, 2004.
- [19] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, 3rd edition, 1995.
- [20] B. Jakubczyk et W. Respondek. *On linearization of control systems*. *Bull. Acad. Pol. Sc., Ser. Sci. Math.*, 28 :517522, 1980.
- [21] P. Martin, R. M. Murray, P. Rouchon. *Flat Systems*. European Control Conference, Plenary Lectures and Mini-Courses, 1997 Brussels.
- [22] P. Rouchon. *Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization*. *J. Math. Systems Estim. Control*, 5(3) :345358, 1995.
- [23] J. Rudolph. *Well-formed dynamics under quasi-static state feedback*. In B. Jakubczyk, W. Respondek, et T. Rzezuchowski, editors, *Geometry in Nonlinear Control et Differential Inclusions*, pages 349360, Warsaw, 1995. Banach Center Publications.
- [24] H. Nijmeijer and A. van der Schaft "Nonlinear dynamical control systems" Springer-Verlag New York, Inc. New York, NY, USA
- [25] Marino R. and P. Tomei (1995). *Nonlinear Control Design : Geometric, Adaptive and Robust*. Prentice Hall.
- [26] W. M. Sluis. *A necessary condition for dynamic feedback linearization*. *Systems Control Lett.*, 21 :277283, 1993.
- [27] W. M. Sluis et D. M. Tilbury. *A bound on the number of integrators needed to linearize a control system*. *Systems Control Lett.*, 29(1) :4350, 1996.
- [28] D. Tilbury, R. M. Murray, et S. R. Sastry. *Trajectory generation for the n-trailer problem using Goursat normal form*. *IEEE Trans. Automat. Control*, 40 :802819, 1995.
- [29] M. van Nieuwstadt, M. Rathinam, et R. M. Murray. *Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems*. *SIAM J. Control Optim.*, 36(4) :12251239 (electronic), 1998.
- [30] C.G. Luenberger. *An introduction to observers*. *IEEE Automatica Control*, 16 :1971, 596-602.
- [31] J. Back, Y. Kyung T, J.H. Seo, "Dynamic observer error linearization", *IEEE Transactions on Automatica Control*, vol. 42, no12, 2006, pp. 2195-2200
- [32] C.G. Luenberger. *Observing the state on a linear system*. *IEEE Trans. Mil. Electron*, 8 :1964, 74-80. *Systemes Non*
- [33] Fossard et Normand-Cyrot "Systèmes Non Linéaires T.1 Modélisation Et Estimation" Masson
- [34] J.P. Gauthier, I.A.K. Kupka, "Deterministic observation theory and applications", Cambridge University Press, October 2001
- [35] Plestan F. Glumineau A., Moog CH. "New algebro-geometric conditions for the linearization by input-output injection" *IEEE Trans. on Autom. Ctrl.*, 41(1) :598-603, 1996.
- [36] Chiasson J. N. and Novotnak R. T. "Nonlinear speed observer for the PM stepper motor" *IEEE transactions on automatic control* 1993, vol. 38, no10, pp. 1584-1588
- [37] Lopez-M.V, F. Plestan, A. Glumineau (1999). "Linearization by Completely Generalized Input Output Injection", *Kybernetika*, 35, n° 6, 793-802.
- [38] Zheng G., Boutat D., and Barbot J.P. "A Single output dependent observability normal form" *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 46 (6), pp. 2242-2255, 2007.
- [39] Phelps, A. (1991). "On constructing nonlinear observers." *SIAM J. Control and Optimization* 29.
- [40] Respondek W., A. Pogromsky and H. Nijmeijer (2004). Time scaling for observer design with linearization error dynamics. *Transactions on Automatic Control* 3, 199-216.
- [41] Plestan F. and A. Glumineau (1997). Linearization by generalized input output injection. *Syst. Contr. Letters*, 31 115-128.