

Etude à l'aide des séries de Volterra des non-linéarités des composants hydropneumatiques de la suspension CRONE

- Partie 1 : Modélisation -

Xavier MOREAU¹, Roy ABI ZEID DAOU^{1,3}, Clovis FRANCIS², Pascal SERRIER, Alain OUSTALOU¹

¹ : Laboratoire IMS, Département LAPS – UMR 5218 CNRS
Université Bordeaux 1, 351 cours de la libération, 33405 Talence Cedex, France

² : Université Libanaise, Faculté de génie, Tripoli, Liban

³ : Département de Technologies Biomédicales, Faculté de Santé, Lebanese German University, Sahel Alma - P.O. Box: 206,
Jounieh, Lebanon

xavier.moreau@ims-bordeaux.fr

www.ims-bordeaux.fr

Résumé - L'objectif de cet article en deux parties est d'expliquer à la fois d'un point de vue mathématique, à l'aide des séries de Volterra, et d'un point de vue physique, à l'aide de la simulation numérique, les raisons pour lesquelles les non-linéarités des cellules RC des réseaux hydropneumatiques de la suspension CRONE n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue. Dans cette première partie, l'accent est particulièrement mis sur l'obtention d'un modèle de validation non linéaire, puis d'un modèle de synthèse linéaire, ces modèles étant utilisés dans la seconde partie pour analyser les performances obtenues.

Mots-clés - Isolation vibratoire, Systèmes à Dérivées Non Entières, interdépendance masse-amortissement, robustesse du degré de stabilité, suspension CRONE.

I. INTRODUCTION

Dans le domaine du contrôle des vibrations, notamment en isolation vibratoire, l'équipe CRONE du Département LAPS du laboratoire IMS a montré l'intérêt de la dérivation non entière à travers la mise en défaut de l'interdépendance masse-amortissement [1]. En effet, dans le cadre de la dynamique des systèmes linéaires entiers (caractérisés par des équations différentielles linéaires d'ordres entiers), l'augmentation de la masse se traduit par une diminution de l'amortissement. Par contre, dans le cadre de la dynamique des systèmes linéaires non entiers (caractérisés par des équations différentielles linéaires d'ordres non entiers), l'amortissement est indépendant de la masse. Les conditions nécessaires à l'obtention de la mise en défaut de l'interdépendance masse-amortissement sont le résultat de l'approche CRONE [2]. La suspension issue de cette approche, appelée *suspension CRONE*, est caractérisée par une impédance qui n'est autre qu'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence [3] défini par quatre paramètres (appelés paramètres de synthèse de haut niveau), et ce indépendamment de toute solution technologique. D'un point de vue méthodologique, lorsque l'intégrateur est parfaitement défini par ses quatre paramètres, l'étape suivante consiste à rechercher une solution technologique pour sa réalisation [3]. D'une manière générale, les solutions pour la mise en œuvre d'un dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence ne sont pas uniques. Elles dépendent des technologies disponibles et des contraintes économiques associées au domaine d'application considéré. Toutefois, lorsqu'une solution passive

est retenue, celle-ci est réalisée à partir de réseaux de cellules RC. Dans le domaine de l'automobile, ces cellules RC peuvent être réalisées à partir d'éléments en matériaux viscoélastiques (suspension moteur) [2] ou à partir d'éléments déjà existants (amortisseurs et sphères pour une suspension hydropneumatique) [3]. Dans les deux cas ces éléments sont non linéaires.

Cependant, l'expérience montre que les non-linéarités des cellules RC des réseaux hydropneumatiques de la suspension CRONE n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, ne remettant pas ainsi en cause la mise en défaut de l'interdépendance masse-amortissement obtenue avec l'approche CRONE développée dans un contexte linéaire.

L'objectif de cet article en deux parties (*Partie 1 : Modélisation* et *Partie 2 : Performances*) est donc d'expliquer à la fois d'un point de vue mathématique, à l'aide des séries de Volterra, et d'un point de vue physique, à l'aide de la simulation numérique, les raisons d'un tel résultat.

Ainsi, cette première partie consacrée à la modélisation est organisée de la manière suivante. Après une introduction permettant de situer le contexte dans lequel s'inscrit cet article, le paragraphe II rappelle de manière synthétique l'essentiel à connaître en ce qui concerne les séries de Volterra. Ensuite, le paragraphe III présente le support d'étude, puis les développements conduisant à l'établissement d'un *modèle de validation* prenant en compte les non-linéarités des éléments R et C du réseau hydropneumatique. Ensuite, autour de la position d'équilibre statique, une linéarisation est effectuée afin d'établir un *modèle de synthèse*. Enfin, dans le dernier paragraphe, une première conclusion assure la transition avec la seconde partie où les performances sont analysées.

II. SERIES DE VOLTERRA

A. Introduction

Introduites par Vito Volterra [4] au cours des années 30, puis utilisées par Norbert Wiener [5] à la fin des années 50, les séries de Volterra sont un outil mathématique permettant de décrire le comportement d'un système dynamique non linéaire. Elles constituent, en fait, une généralisation du produit de convolution. Ainsi, les formules de transformation de Laplace et de Fourier, développées dans le cas des

fonctions monovariabes, peuvent être généralisées aux fonctions multivariabes. Il est alors possible de donner une représentation des réponses impulsionnelles d'ordre k , appelées noyaux de Volterra. La décomposition en série de Volterra de la réponse d'un système non linéaire pour une entrée donnée met donc en évidence que la réponse du système n'est autre que la somme des convolutions de chacun des noyaux avec l'entrée donnée. Sachant que la réponse correspondant au noyau d'ordre 1 est relative à la partie linéaire du système et que les réponses correspondant aux noyaux d'ordre supérieur à l'unité sont relatives à la partie non linéaire, il est possible d'évaluer les contributions des parties linéaire et non linéaire à la réponse du système, et de définir pour une précision donnée l'ordre à partir duquel la troncature de la série peut être faite.

L'un des aspects intéressants des séries de Volterra est de pouvoir continuer l'analyse dans le domaine fréquentiel malgré la présence de non-linéarités. En effet, en régime harmonique stationnaire, la transformée de Fourier du noyau d'ordre 1, qui est une fonction monovariabes, n'est autre que la réponse fréquentielle de la partie linéaire dont les diagrammes de Bode peuvent être tracés sans le moindre problème. La transformée de Fourier du noyau d'ordre 2 est une fonction à deux variables dont les diagrammes de Bode peuvent encore être tracés (en trois dimensions), les tracés devenant impossibles à partir du noyau d'ordre 3.

B. Définitions et propriétés

Les séries de Volterra sont présentées comme une généralisation du produit de convolution, soit

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad (1)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent, respectivement, l'entrée et la sortie du système et $h(t)$ sa réponse impulsionnelle [6].

La généralisation de la relation (1) a été proposée par Volterra en 1959 ([4], [7]) et prend la forme d'une série infinie :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots, \quad (2)$$

où

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k u(t-\tau_i) d\tau_i, \quad (3)$$

La combinaison des relations (2) et (3) permet de représenter la réponse temporelle $y(t)$ d'un système non linéaire en fonction de son entrée $u(t)$ sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k u(t-\tau_i) d\tau_i. \quad (4)$$

Pour que le système non linéaire puisse se présenter sous la forme d'une série de Volterra, il faut que les conditions nécessaires, définies par [8], [9], soient satisfaites. Ces conditions peuvent se résumer à l'aide des fonctions

$$w_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*, \quad (5)$$

localement bornées, continues par morceaux, telles que quel que soit $T > 0$, il existe $\varepsilon(T) > 0$ tel que pour toute fonction continue par morceau $u(\cdot)$ vérifiant $|u(t)| \leq \varepsilon$ sur $[0, T]$, la série

$$y(t) = w_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t w_k(t, \sigma_1, \dots, \sigma_k) u(\sigma_1) \dots u(\sigma_k) d\sigma_1 \dots d\sigma_k, \quad (6)$$

converge absolument et uniformément sur $[0, T]$.

Ainsi, la fonction $w_k(t, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$ est appelée noyau de Volterra d'ordre k .

A noter que les formules des transformées de Laplace et de Fourier monovariabes peuvent être généralisées aux fonctions multivariabes [10]. La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle d'ordre k est définie par :

$$H_k(s_1, \dots, s_k) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) e^{-s_1\tau_1 - \dots - s_k\tau_k} d\tau_1 \dots d\tau_k \quad (7)$$

et la transformée de Fourier d'ordre k par :

$$H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_k) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) e^{-j\omega_1\tau_1 - \dots - j\omega_k\tau_k} d\tau_1 \dots d\tau_k. \quad (8)$$

C. « Harmonic Probing Method »

Une méthode classique de détermination des noyaux de Volterra, dite "*harmonic probing method*", peut être utilisée [11]. L'entrée du système $u(t)$ est assez particulière : c'est une somme d'exponentielles complexes. L'équation (9) présente la forme générale de l'entrée lors de l'application de cette méthode :

$$u(t) = \sum_{r=1}^{n_t} e^{j\omega_r t}. \quad (9)$$

Ainsi, en remplaçant l'entrée $u(t)$ (relation (9)) par son expression dans l'équation (4), il vient :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k \left(\sum_{r=1}^{n_t} e^{j\omega_r(t-\tau_i)} \right) d\tau_i. \quad (10)$$

La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle du noyau de Volterra d'ordre k (relation (7)) est alors définie.

Il est donc possible d'exprimer les réponses impulsionnelles $y_k(t)$ de chaque noyau d'ordre k en fonction de la transformée de Laplace du noyau d'ordre k . Lorsque n_t et k sont égaux, la relation (10) se simplifie. En effet, pour la sortie d'ordre 1 ($k = n_t = 1$), $y_1(t)$ est définie par :

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) e^{j\omega_1(t-\tau)} d\tau, \quad (11)$$

sachant que la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle du noyau d'ordre 1, donnée par la relation (7), est la suivante :

$$H_1(s_1) = \int_0^{\infty} h_1(\tau) e^{-s_1\tau} d\tau, \quad (12)$$

il est possible d'écrire la sortie $y_1(t)$ sous la forme :

$$y_1(t) = H_1(j\omega_1) e^{j\omega_1 t}. \quad (13)$$

Ces résultats sont généralisables à toutes les réponses impulsionnelles des noyaux d'ordre $k > 0$.

Dans le cas où $n_t \neq k$ la relation est de la forme :

$$y_k(t) = \sum_{\substack{\text{Toutes les combinaisons} \\ \text{des } R \text{ fréquences prises} \\ \text{par groupe de } k}} \sum_{\substack{\text{Toutes les permutations} \\ \text{de } \omega_1, \dots, \omega_k}} H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_m) \prod_{i=1}^k e^{j\omega_i t}, \quad (14)$$

et se simplifie lorsque $n_t = k$ sous la forme :

$$y_k(t) = \sum_{\substack{\text{Toutes les permutations} \\ \text{de } \omega_1, \dots, \omega_k}} H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_m) \prod_{i=1}^k e^{j\omega_i t}. \quad (15)$$

Ainsi, lorsque l'entrée $u(t)$ du système non linéaire peut s'exprimer comme une somme d'exponentielles complexes, la

réponse temporelle $y(t)$ peut s'exprimer en fonction des transformées de Fourier des noyaux de Volterra du système $H_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_m)$ où k représente l'ordre du noyau. Afin de déterminer ces noyaux, il suffit alors de remplacer la sortie et l'entrée du système par leurs expressions dans l'équation différentielle régissant le comportement du système et d'identifier terme à terme les composants de l'équation.

D. Algèbre de George

Une autre méthode permettant de déterminer les noyaux de Volterra d'un système consiste à utiliser l'algèbre de George [12]. Cet algèbre permet de déterminer les noyaux de Volterra d'un système non linéaire constitué de sous-systèmes qui admettent eux même une représentation par une série de Volterra. Dans le cadre d'une définition de cette algèbre, la notation opérationnelle $\underline{\mathbf{H}}[.]$ représente le noyau de Volterra, soit :

$$y(t) = \underline{\mathbf{H}}[u(t)], \quad (16)$$

ou bien, sous forme implicite (vis-à-vis de la variable temporelle) :

$$\mathbf{y} = \underline{\mathbf{H}}[\mathbf{u}]. \quad (17)$$

La relation (17) étant une somme d'exponentielles, il est également possible d'utiliser la notation :

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\mathbf{H}}_k[u], \quad (18)$$

où $y_k = \underline{\mathbf{H}}_k[u]$ désigne la représentation temporelle des noyaux de la série de Volterra :

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k u(\sigma_i) d\sigma_i. \quad (19)$$

L'algèbre de George est muni de trois principales opérations :

- l'addition notée '+' (voir Fig.1(a));
- la multiplication notée '•' (voir Fig.1(b)) ;
- la mise en cascade notée '*' (voir Fig.1(c)).

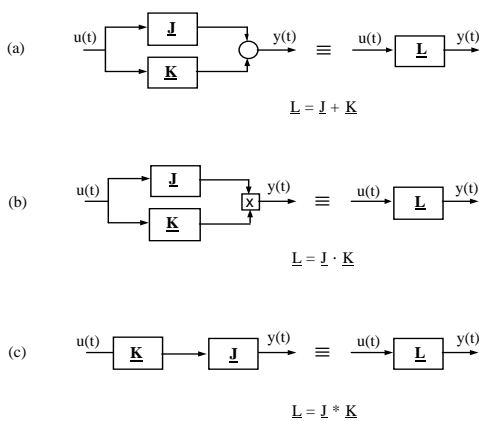


Fig. 1. Opérations élémentaires de l'algèbre de George

Dix règles opératoires, associées à cette algèbre, présentent les propriétés d'associativité, de commutativité, de distributivité et de décomposition des trois opérations de cet algèbre.

Il est à noter que l'algèbre de George étant un outil intéressant qui nécessite la connaissance des parties non linéaires formant le système non linéaire, l'application de la méthode *Harmonic Probing* est alors évidente.

III. PRESENTATION DU SUPPORT D'ETUDE

Le support d'étude est un dispositif hydraulique composé d'une masse M reliée mécaniquement à un vérin hydraulique simple effet (Fig. 2). Ce vérin est appelé vérin de suspension par analogie au vérin de suspension des véhicules automobiles équipés de suspension hydropneumatique [3]. Pour ce support d'étude, la masse suspendue M peut varier de 75 à 150 kg grâce à la présence de masses additionnelles.

Le vérin de suspension est connecté à un circuit hydraulique composé de deux parties.

- La première est constituée d'un groupe électropompe équipé d'un conjoncteur-disjoncteur et d'un distributeur commandé en courant $i(t)$ délivrant un débit $q_c(t)$. Son rôle est de maintenir à une valeur de référence la position d'équilibre statique de la masse M pour toutes les valeurs comprises au moins entre 75 et 150 kg. Cet objectif est atteint grâce à la présence d'une boucle de régulation de hauteur.

- La seconde est composée de plusieurs réseaux hydropneumatiques constitués de $N+1$ accumulateurs hydropneumatiques et de N résistances hydrauliques. Ces réseaux sont dimensionnés pour présenter une impédance hydropneumatique d'entrée d'ordre non entier [3]. Ils jouent le rôle d'une suspension hydropneumatique.

Les accumulateurs hydropneumatiques, aussi appelés sphères de suspension, sont des éléments capacitifs. Ils sont constitués d'une sphère métallique qui contient une membrane en élastomère. Cette membrane divise l'espace intérieur en deux cavités indépendantes. Une des cavités est reliée au fluide du circuit hydraulique auquel est raccordée la sphère, l'autre cavité contient un gaz neutre (azote), à une pression P_0 (pression de tarage) et à un volume V_0 au repos.

Les amortisseurs hydrauliques sont des éléments résistifs. Pour cette raison, ils sont également désignés par le terme résistance hydraulique par la suite.

Le schéma de commande associé au support d'étude est présenté figure 3. La boucle externe, qui régule la position d'équilibre statique à une valeur égale à la moitié de la course du vérin de suspension, présente une rapidité identique à celle du régulateur de hauteur d'un véhicule équipé d'une suspension hydropneumatique [3], rapidité caractérisée par une fréquence au gain unité en boucle ouverte de 0.1 rad/s. Quant à la boucle interne qui fait l'objet d'une présentation détaillée dans la suite, elle est synthétisée pour présenter une rapidité identique à celle du mode de pompage de la masse suspendue d'un véhicule de tourisme équipé d'une suspension hydropneumatique [3], rapidité caractérisée par une fréquence au gain unité en boucle ouverte de 6 rad/s. Ces deux boucles sont donc dynamiquement découplées.

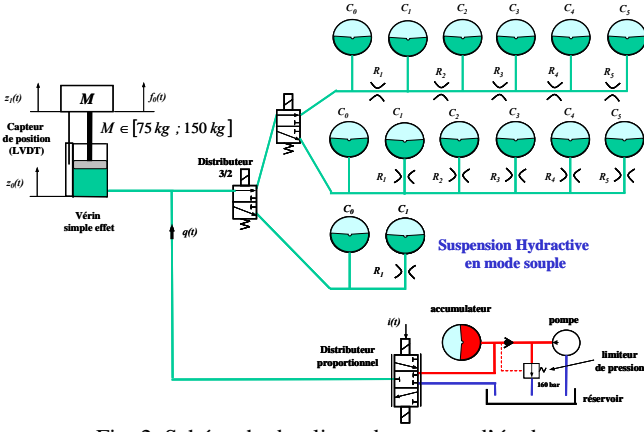


Fig. 2. Schéma hydraulique du support d'étude

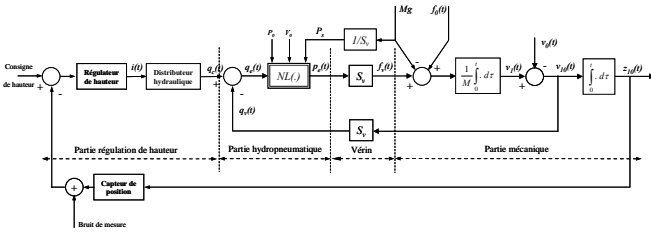


Fig. 3. Schéma de commande associé au support d'étude

IV. MODELISATION DU SUPPORT D'ETUDE

Dans un premier temps, et à titre de comparaison pour la suite, un réseau avec $N = 1$ est utilisé comme élément de référence (Fig. 4). Ce réseau correspond à la toute première itération pour la construction d'un réseau à N cellules d'un arrangement parallèle de cellules RC en série par exemple.

Dans la mesure où la boucle externe est dynamiquement découplée, celle-ci est volontairement négligée dans la suite.

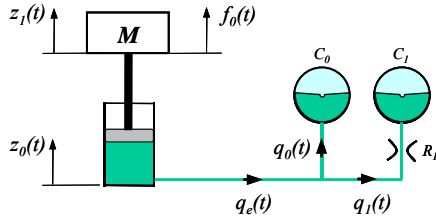


Fig. 4. Schéma hydraulique du support d'étude en considérant un arrangement parallèle de deux cellules dont une RC ($N = 1$), point de départ pour la construction d'un arrangement de $N+1$ cellules

L'application du principe fondamental de la dynamique à la masse M conduit à une équation de la forme

$$M \ddot{z}_1(t) = f_0(t) + f_v(t) - Mg, \quad (20)$$

où $f_0(t)$ désigne la force d'excitation appliquée à la masse M et $f_v(t)$ la force développée par le vérin résultant de la pression $p_v(t)$, soit :

$$f_v(t) = S_v p_v(t), \quad (21)$$

avec S_v la section utile du vérin.

Si on néglige les pertes de charge dans la canalisation qui relie le vérin au réseau hydraulique, alors la pression $p_e(t)$ à l'entrée du réseau est égale à la pression $p_v(t)$ dans le vérin.

Lorsque le régulateur de hauteur ne fonctionne pas en raison du découplage dynamique, le débit entrant $q_e(t)$ dans le réseau hydraulique est égal au débit de déplacement $q_v(t)$ généré par la vitesse de débattement $v_0(t) - v_1(t)$ du vérin, soit :

$$q_e(t) = q_v(t), \quad (22)$$

avec

$$q_v(t) = S_v (v_0(t) - v_1(t)), \quad (23)$$

où $v_0(t)$ et $v_1(t)$ représentent les vitesses verticales de la base du vérin ($v_0(t) = dz_0(t)/dt$) et de la masse M ($v_1(t) = dz_1(t)/dt$).

A. Prise en compte des non-linéarités

La relation non linéaire $NL_{Ci}(\cdot)$ entre la pression du gaz $p_i(t)$ et la variation de volume du liquide $v_{li}(t)$ de la sphère de rang i est de la forme [3]

$$p_i(t) = \frac{P_s}{\left(1 - \frac{P_s}{P_{0i}} \frac{v_{li}(t)}{V_{0i}}\right)^\gamma}, \quad (24)$$

où P_s désigne la pression statique dans le vérin ($P_s = Mg/S_v$), P_{0i} et V_{0i} la pression de gonflage et le volume de la sphère de rang i , γ une constante caractérisant l'évolution du gaz dans la sphère ($\gamma=1,4$ pour une évolution adiabatique, 1 pour une évolution isotherme), $v_{li}(t)$ étant donné par

$$v_{li}(t) = \int_0^t q_i(\tau) d\tau. \quad (25)$$

La relation (24) est issue de la modélisation de la sphère dans laquelle l'azote est considéré comme un gaz parfait.

La figure 5 présente le schéma fonctionnel non linéaire associé à la sphère de rang i .

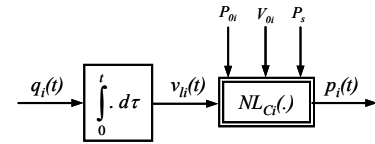


Fig. 5. Schéma fonctionnel non linéaire associé à la sphère de rang i

Par ailleurs, la relation non linéaire entre le débit $q_i(t)$ traversant la résistance hydraulique de rang i et la perte de charge $\Delta p_{Ri}(t)$ aux bornes de celle-ci est de la forme :

$$\Delta p_{Ri}(t) = P_{Ri} \tanh\left(\frac{R_i}{P_{Ri}} q_i(t)\right), \quad (26)$$

où \tanh représente la fonction tangente hyperbolique, P_{Ri} la valeur asymptotique de la pression de la résistance de rang i (saturation), R_i la pente à l'origine de la caractéristique pression-débit (valeur de la résistance dans la zone linéaire). Bien qu'il n'y ait pas de causalité préférentielle pour un élément R [13], le schéma fonctionnel non linéaire (respectant les causalités intégrales) associé au réseau hydropneumatique de l'itération 1 ($N = 1$) présenté figure 6 met bien en évidence qu'il s'agit de la relation (26) inversée, notée $NL_{Ri}(\cdot)$, qui est utilisée.

Il est à noter que l'absence de résistance hydraulique dans la cellule de rang 0 conduit à l'égalité $p_0(t) = p_e(t)$.

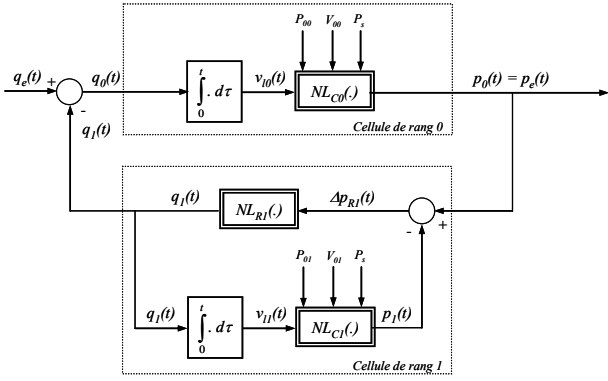


Fig. 6. Schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydropneumatique de la suspension de référence (itération 1 : $N = 1$)

A partir de la modélisation obtenue pour la suspension de référence ($N = 1$), la généralisation de la modélisation de la boucle à un réseau parallèle de $N+1$ cellules RC en série est immédiate [3]. La figure 7 présente le schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydropneumatique de la suspension CRONE pour N quelconque.

Finalement, la figure 8 présente le schéma fonctionnel de la boucle interne associée à l'ensemble masse-vérin-réseau hydropneumatique quel que soit le nombre de cellules considéré. Ce modèle non linéaire constitue le **modèle de validation**.

B. Linéarisation

L'approche CRONE a été développée dans un contexte linéaire à travers des modèles linéaires ou linéarisés. Autant dire que l'approche CRONE a été menée

- dans le cas linéaire proprement dit (donc sans contrainte sur le niveau de sollicitation)
- et dans le cas non linéaire pour de faibles sollicitations (cas de petites variations autour d'un point de fonctionnement).

C'est la raison pour laquelle la synthèse de l'impédance hydropneumatique d'entrée d'ordre non entier qui caractérise la suspension CRONE a été faite à partir des caractéristiques linéarisées des éléments C et R . Ainsi, les non-linéarités $NL_{C_i}(\cdot)$ et $NL_{R_i}(\cdot)$ de la cellule RC de rang i sont décomposées en séries de Taylor, soit :

- pour la sphère

$$p_i(t) = P_s + \frac{1}{C_i} v_{li}(t) + NL_{C_i}^*(v_{li}(t)), \quad (27)$$

où $NL_{C_i}^*(v_{li}(t))$ représente la somme des termes de la série supérieurs à l'ordre 1 et C_i la capacité hydropneumatique de la sphère de rang i , avec

$$C_i = \frac{P_{0i} V_{0i}}{\gamma P_s^2}; \quad (28)$$

- pour la résistance hydraulique

$$q_i(t) = \frac{1}{R_i} \Delta p_{Ri}(t) + NL_{R_i}^*(\Delta p_{Ri}(t)), \quad (29)$$

où $NL_{R_i}^*(\Delta p_{Ri}(t))$ représente la somme des termes de la série supérieurs à l'ordre 1 et R_i la résistance de rang i .

La figure 9 présente le schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydraulique de l'exemple d'illustration dans le cas $N = 1$ en tenant compte de la décomposition en séries de Taylor.

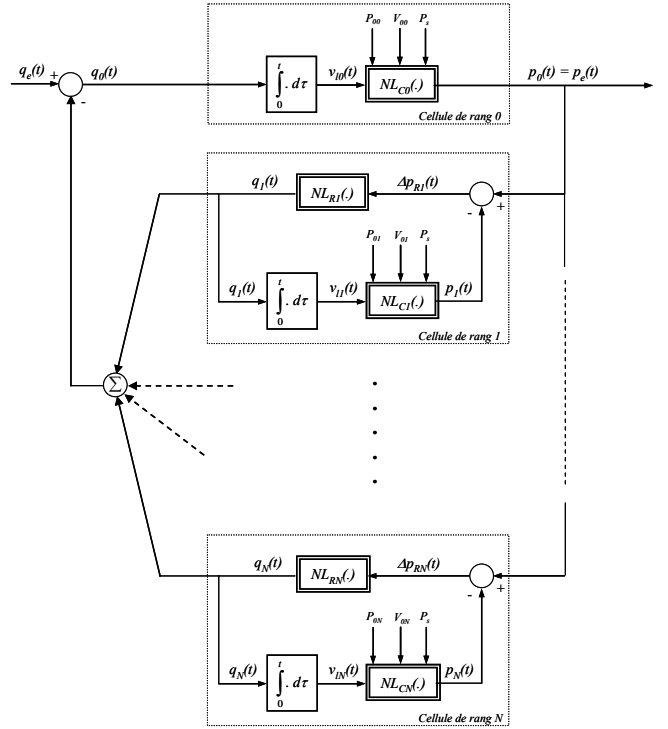


Fig. 7. Schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydropneumatique de la suspension CRONE pour N quelconque

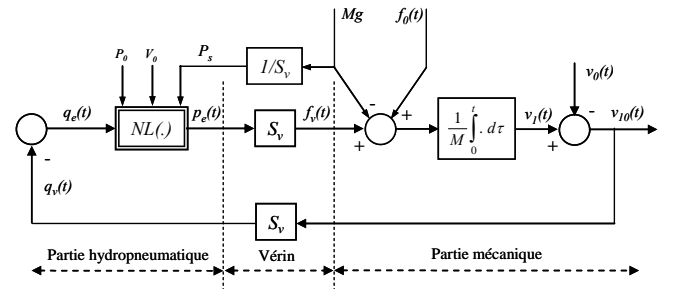


Fig. 8. Schéma fonctionnel non linéaire associé à l'ensemble masse-vérin-réseau hydropneumatique (cf. boucle interne Fig. 3)

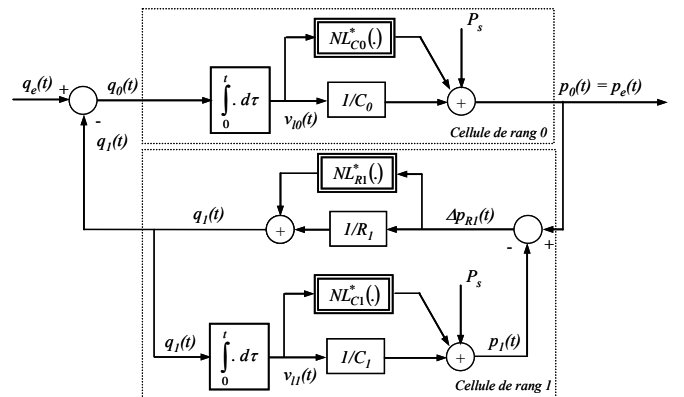


Fig. 9. Schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydropneumatique de la suspension hybractive en mode souple ($N = 1$) après décomposition en séries de Taylor

Le schéma fonctionnel de la figure 10 est une extension du schéma précédent pour un réseau parallèle de cellules RC série avec N quelconque.

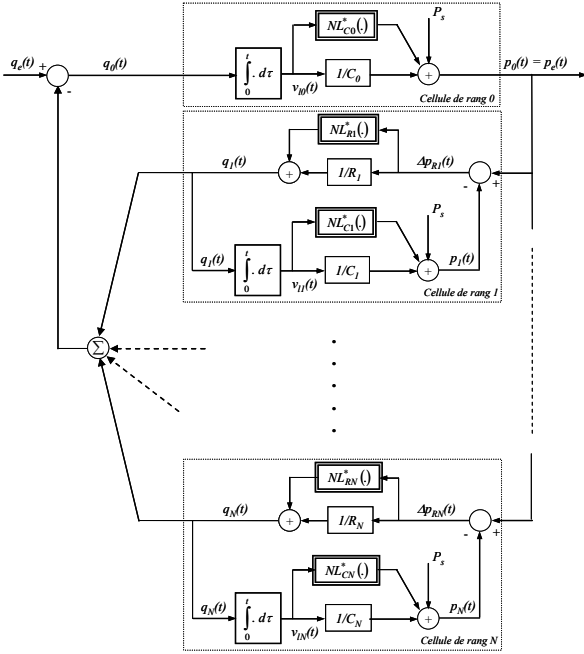


Fig. 10. Schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydropneumatique de la suspension CRONE après décomposition en séries de Taylor

La figure 11 présente le schéma fonctionnel de l'ensemble masse-vérin-réseau hydropneumatique en tenant compte de la décomposition en séries de Taylor. Le réseau hydropneumatique est décomposé en une partie linéaire regroupé dans l'impédance hydropneumatique d'entrée Z_{He} des réseaux et une partie non linéaire regroupé dans Δ . Dans le cas où $N = 1$ (suspension traditionnelle), l'impédance Z_{He} est de la forme [3] :

$$Z_{He}(s) = \frac{K}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \right), \quad (30)$$

où K est une constante positive, ω_z et ω_p les fréquences transitionnelles basse et haute, ces 3 paramètres étant fonction des paramètres C_0 , C_1 et R_1 .

Dans le cas où $N = 5$ (suspension CRONE), l'impédance Z_{He} est caractérisée par un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence, noté $I_{NE}(s)$, de la forme [3] :

$$I_{NE}(s) = \frac{D_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad (31)$$

où D_0 est une constante positive, m un ordre non entier compris entre 0 et 1, ω_b et ω_h les fréquences transitionnelles basse et haute. Ces 4 paramètres (appelés paramètres de synthèse de haut niveau) sont fonction des paramètres C_i , et R_i .

On peut remarquer sur la figure 11, contrairement au schéma de la figure 8, que le poids Mg n'apparaît plus de manière **explicite** dans le bilan des efforts extérieurs appliqués à la masse M dans la mesure où il est compensé par la pression statique P_s du réseau hydropneumatique ($Mg = S_v P_s$). Par contre il apparaît toujours de manière **implicite** dans les

expressions des capacités C_i et des relations non linéaires $NL_{C_i}^*(\cdot)$.

La synthèse du réseau hydropneumatique se fait sous l'hypothèse de petites variations, ce qui revient à négliger dans un premier temps la partie non linéaire Δ . Le modèle linéaire ainsi défini constitue le **modèle de synthèse**.

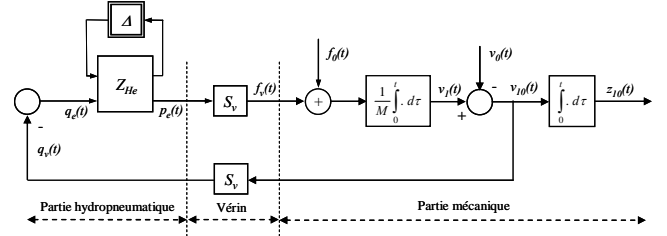


Fig. 11. Schéma fonctionnel de l'ensemble masse-vérin-réseau hydropneumatique après décomposition en séries de Taylor

IV. CONCLUSION

Après un rappel synthétique de l'essentiel à connaître en ce qui concerne les séries de Volterra, cette première partie a été consacrée à la modélisation du support d'étude. Ainsi, dans un premier temps, un **modèle de validation** prenant en compte les non-linéarités des éléments R et C du réseau hydropneumatique a été développé. Ensuite, autour de la position d'équilibre statique, une linéarisation a été faite afin d'établir un **modèle de synthèse**. Les réponses de ces deux modèles sont analysées dans la seconde partie pour comprendre pourquoi les non-linéarités des composants hydropneumatiques n'affectent pas la mise en défaut de l'interdépendance masse-amortissement.

REFERENCES

- [1] Oustaloup A. La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications, Edition Hermès, Paris, 1995.
- [2] Ramus-Serment C. Synthèse d'un isolateur vibratoire d'ordre non entier fondée sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques. Thèse de l'Université Bordeaux 1, 10 Juillet 2001.
- [3] Serrier P. Analyse de l'influence des non-linéarités dans l'approche CRONE : Application en isolation vibratoire. Thèse de l'Université Bordeaux 1, 30 Septembre 2008.
- [4] Volterra V. Theory of functionals and of integrals and integro-differential equations. New York. Dover. 1959.
- [5] Wiener N. Nonlinear Problems in Random Theory. New York: Wiley 1958.
- [6] Worden K. and Manson G. Random vibrations of a duffing oscillator using the Volterra series. Journal of Sound and Vibration, Vol. 217, n°4, pp. 781-789, 1998.
- [7] Mirri D., Iuculano G., Filicori F., Pasini G., Vannini G., Gualtieri G. P. A Modified Volterra Series Approach for Nonlinear Dynamic Systems Modeling. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, vol. 49, No. 8, pp. 1118-1128, August 2002.
- [8] Gilbert E.G. Functional expansions for the response of nonlinear differential systems. IEEE transactions on Automatic Control, vol. AC-22, pp.909-921, Dec. 1977.
- [9] Lesiah C., Krener A.J. The existence and uniqueness of Volterra series for non linear systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-23, pp. 1090-1095, Dec. 1978.
- [10] Lubbock J. K. and Bansal V. S. Multidimensional Laplace transforms for solution of non linear equations. Proc I.E.E., Vol. 116, N° 12, pp. 2075-2082, 1969.
- [11] Rugh W. J. Nonlinear System Theory - the Volterra-Wiener Approach. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1981.
- [12] George D. A. Continuous non linear systems. Technical Report 355, Research Laboratory of Electronics, M. I. T. 1959.
- [13] Dauphin-Tanguy G. Les bond-graphs. Edition Hermès, Paris, 2000.