

Etude à l'aide des séries de Volterra des non-linéarités des composants hydropneumatiques de la suspension CRONE

- Partie 2 : Performances -

Roy ABI ZEID DAOU^{1,3}, Xavier MOREAU¹, Clovis FRANCIS², Pascal SERRIER, Alain OUSTALOUP¹

¹ : Laboratoire IMS, Département LAPS – UMR 5218 CNRS
Université Bordeaux 1, 351 cours de la libération, 33405 Talence Cedex, France

² : Université Libanaise, Faculté de génie, Tripoli, Liban

³ : Département de Technologies Biomédicales, Faculté de Santé, Lebanese German University, Sahel Alma - P.O. Box: 206, Jounieh, Lebanon

XAVIER.MOREAU@IMS-BORDEAUX.FR

www.ims-bordeaux.fr

Résumé – Dans cette seconde partie l'analyse des performances est faite à la fois d'un point de vue mathématique, à l'aide des séries de Volterra, et d'un point de vue physique, à l'aide des domaines de fonctionnement de chaque élément R_i et C_i . La conclusion de cette analyse est que les non-linéarités des cellules RC des réseaux hydropneumatiques de la suspension CRONE n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, ne remettant pas ainsi en cause la mise en défaut de l'interdépendance masse-amortissement obtenue avec l'approche CRONE développée dans un contexte linéaire.

Mots-clés - Isolation vibratoire, Systèmes à Dérivées Non Entières, interdépendance masse-amortissement, robustesse du degré de stabilité, suspension CRONE.

I. INTRODUCTION

Dans cette seconde partie, les modèles linéaires pour la synthèse des réseaux hydropneumatiques des suspensions traditionnelle et CRONE, et les modèles non linéaires pour la validation en simulation développés dans la première partie sont confrontés. L'objectif est d'analyser l'origine des performances obtenues, tant d'un point de vue mathématique à l'aide des séries de Volterra [1] [2] [3] [4] [5], que d'un point de vue physique à l'aide des simulations des réseaux hydropneumatiques.

Ainsi, cette seconde partie est organisée de la manière suivante. Après une courte introduction permettant de faire le lien avec la première partie, le paragraphe II rappelle les résultats de la synthèse linéaire obtenus dans le cadre de l'approche CRONE, sachant que tous les détails sont donnés dans [6]. Ensuite, le paragraphe III confronte les réponses indicielles des modèles de synthèse et de validation, non seulement pour chacune des suspensions, mais aussi pour les valeurs extrêmes de la masse suspendue. Puis, le paragraphe IV présente l'analyse à l'aide des séries de Volterra des réponses non linéaires du modèle de validation de la suspension CRONE. Le paragraphe V complète l'analyse mathématique par une analyse des domaines de fonctionnement de chaque élément R_i et C_i . Enfin, les conclusions sont données dans le dernier paragraphe.

II. RESULTATS DE LA SYNTHÈSE LINÉAIRE

Les spécifications du cahier des charges utilisées pour la synthèse des suspensions traditionnelle et CRONE sont [7] :

- pour le degré de stabilité, une marge de phase M_ϕ de 45° pour la masse minimale ;
- pour la rapidité, une fréquence au gain unité ω_u de 6 rad/s toujours pour la masse minimale.

Tous les détails de la synthèse sont présentés dans [6].

Les figures 1 et 2 présentent les réponses fréquentielles et indicielles obtenues avec les *modèles linéaires* des suspensions traditionnelle (Fig. 1) et CRONE (Fig. 2), et ce pour les valeurs extrêmes de la masse suspendue (en bleu $M = 75$ kg et en vert $M = 150$ kg).

Plus précisément, les figures 1.a et 2.a présentent les diagrammes de Bode des impédances hydropneumatiques d'entrée de chacune des suspensions, illustrant ainsi l'influence de la variation de la masse suspendue.

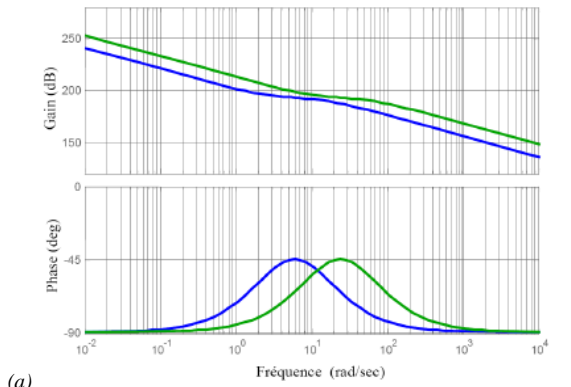
Les figures 1.b et 2.b représentent les diagrammes de Bode des fonctions de transfert de la boucle ouverte du schéma fonctionnel représenté Fig. 11 dans la « *Partie 1 : Modélisation* ». Là encore, l'influence de la variation de la masse suspendue est mise en évidence avec notamment une fréquence au gain unité ω_u insensible à ces variations (isorapidité), et ce pour les deux suspensions.

Les figures 1.c et 2.c présentent les lieux de Black-Nichols de ces mêmes fonctions de transfert en boucle ouverte, facilitant ainsi l'analyse de l'influence des variations de la masse suspendue sur le degré de stabilité.

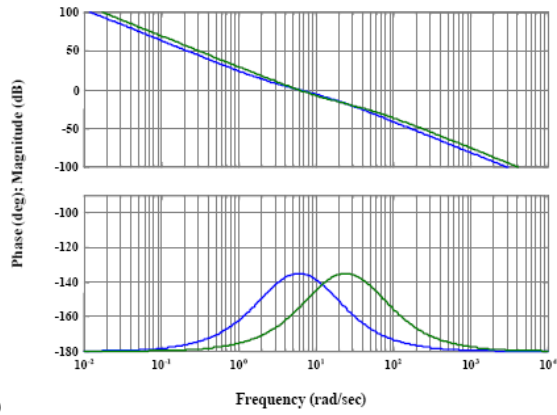
Enfin, les figures 1.d et 2.d représentent les réponses indicielles pour une amplitude de 10 cm.

Toutes ces figures mettent bien en évidence :

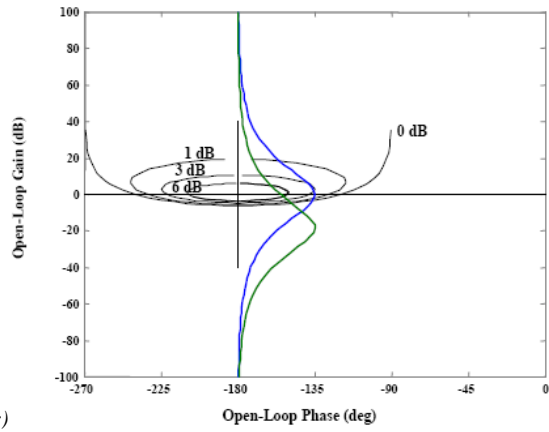
- pour les *deux suspensions*, la robustesse de la rapidité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, propriété due à la technologie hydropneumatique ;
- pour la *suspension traditionnelle*, la sensibilité du degré de stabilité aux variations de la masse suspendue, illustrant ainsi l'interdépendance masse-amortissement (Fig.1.d) ;
- pour la *suspension CRONE*, la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, illustrant au contraire la mise en défaut de l'interdépendance masse-amortissement (Fig.2.d).



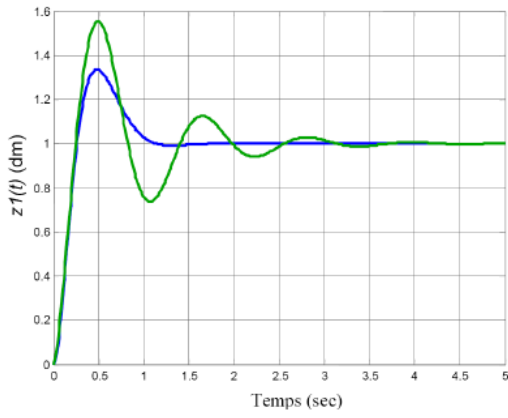
(a)



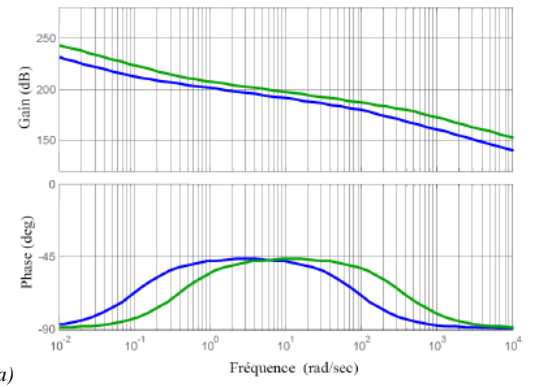
(b)



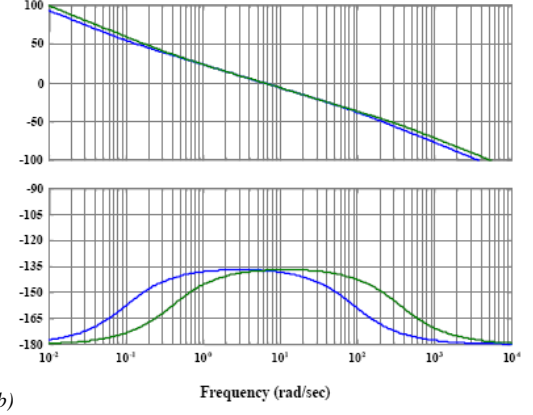
(c)



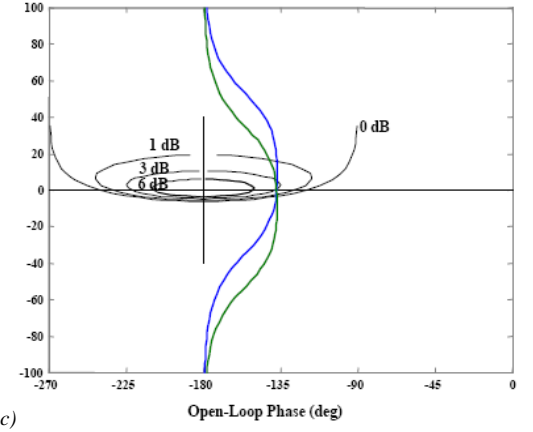
(d)



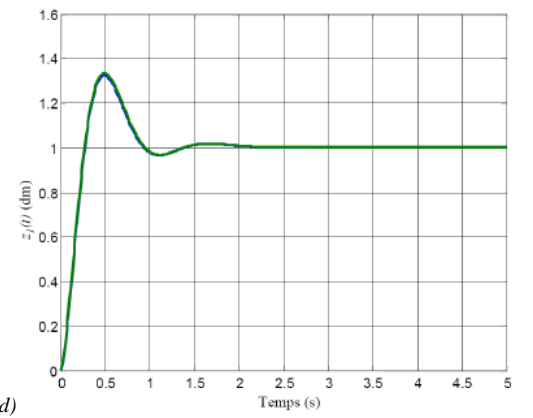
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 1. Réponses fréquentielles et indicelles obtenues avec la suspension traditionnelle pour les valeurs extrémales de la masse suspendue (en bleu $M = 75$ kg et en vert $M = 150$ kg)

Fig. 2. Réponses fréquentielles et indicelles obtenues avec la suspension CRONE pour les valeurs extrémales de la masse suspendue (en bleu $M = 75$ kg et en vert $M = 150$ kg)

III. COMPARAISON DES REPNSES DES MODELES DE SYNTHESE ET DE VALIDATION

Les figures 3 et 4 présentent les réponses indicielles linéaires et non linéaires des suspensions traditionnelle (Fig. 3) et CRONE (Fig. 4) à une amplitude de 10 cm pour 75 kg et 150 kg

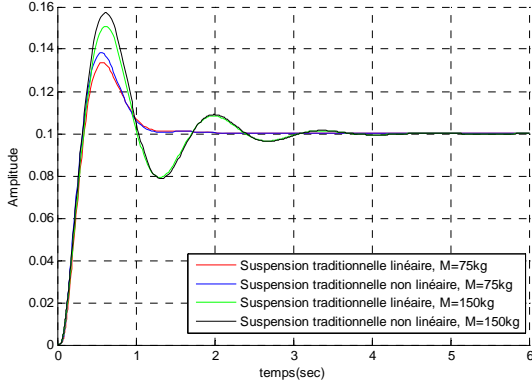


Fig. 3. Réponses indicielles linéaires et non linéaires de la suspension traditionnelle à une amplitude de 10 cm pour 75 kg et 150 kg

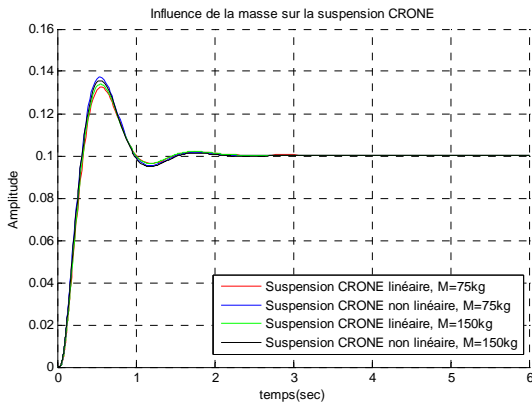


Fig. 4. Réponses indicielles linéaires et non linéaires de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour 75 kg et 150 kg

L'observation de ces deux figures permet d'affirmer :

- pour la **suspension traditionnelle** (Fig. 3) :
 - que les non-linéarités diminuent le degré de stabilité (augmentation du premier dépassement réduit), et ce pour les deux valeurs extrêmes de la masse suspendue ;
 - que les non-linéarités n'affectent pas la robustesse de la rapidité vis-à-vis des variations de la masse, propriété liée à la technologie hydropneumatique ;
- pour la **suspension CRONE** (Fig. 4) :
 - que pour une masse donnée, les non-linéarités ne diminuent que très faiblement le degré de stabilité par rapport au cas linéaire ;
 - que dans le cas non linéaire, la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse est quasiment maintenue ;
 - que là encore, comme pour la suspension traditionnelle, les non-linéarités n'affectent pas la robustesse de la rapidité vis-à-vis des variations de la masse.

IV. ANALYSE A L'AIDE DES SERIES DE VOLTERRA

A. Calcul des noyaux de Volterra

Dans le domaine opérationnel, les expressions des noyaux d'ordre $j = 1$ à 3 pour les éléments de rang i résistifs $H_j^{R_i}(\cdot)$ et capacitifs $H_j^{C_i}(\cdot)$ sont de la forme [6] :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1^{R_i}(s_1) = \frac{1}{R_i} \\ H_2^{R_i}(s_1, s_2) = 0 \\ H_3^{R_i}(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{3 R_i P_{R_i}^2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} H_1^{C_i}(s_1) = \frac{\gamma P_s^2}{P_{0i} V_{0i} s_1} \\ H_2^{C_i}(s_1, s_2) = \frac{\gamma^2 P_s^3}{P_{0i}^2 V_{0i}^2 s_1 s_2} \\ H_3^{C_i}(s_1, s_2, s_3) = \frac{\gamma^3 P_s^4}{P_{0i}^3 V_{0i}^3 s_1 s_2 s_3} \end{array} \right. , \quad (2)$$

les notations utilisées étant conformes à celles définies et introduites dans la « *Partie 1 : Modélisation* ».

Par ailleurs, pour faciliter l'analyse de l'influence des non-linéarités, trois cas sont étudiés conformément à la progression suivante :

- cas 1 : résistances linéarisées et accumulateurs non linéaires [8] [9] [10] ;
- cas 2 : résistances non linéaires et accumulateurs linéarisés ;
- cas 3 : résistances et accumulateurs non linéaires.

Le calcul des noyaux de Volterra du réseau hydropneumatique étudié peut être astucieusement développé uniquement pour le troisième cas (résistances et accumulateurs non linéaires). En effet, les deux premiers cas sont des cas particuliers dans la mesure où il suffit seulement d'utiliser le noyau d'ordre 1 de l'élément linéarisé considéré, les autres étant nuls.

De plus, le calcul s'appuie sur le schéma de la figure 7 présenté dans la « *Partie 1 : Modélisation* », et sur les règles de réduction de schéma de l'algèbre de George [11] présentées aussi dans cette partie.

Les développements étant très longs (inconvenient des séries de Volterra), ceux-ci ne sont volontairement pas présentés dans cet article faute de place, mais le lecteur intéressé trouvera tous les détails dans [6].

B. Résistances linéarisées et accumulateurs non linéaires

La figure 5 présente les réponses indicielles de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour une masse de 75 kg et de 150 kg dans le cas de résistances linéarisées et d'accumulateurs non linéaires.

La figure 6 illustre la contribution des noyaux d'ordre 1 à 3 à la réponse indicielle de la suspension CRONE pour une amplitude de 10 cm et pour une masse de 150 kg.

La figure 7 présente l'influence de l'amplitude du signal d'entrée sur la réponse indicielle réduite de la suspension CRONE pour une masse de 150 kg (chaque réponse est normalisée par rapport à sa valeur en régime permanent).

L'observation de ces trois figures permet d'affirmer :

- que les non-linéarités des accumulateurs n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse (Fig. 5) ;
- que la contribution des noyaux d'ordre supérieur à 1 est d'autant plus faible que l'ordre est élevé (Fig. 6) ;
- que la sensibilité du degré de stabilité à l'amplitude du saut échelon n'est pas très importante (Fig. 7), sachant que le cas d'une amplitude de 40 cm est purement théorique puisque la course totale du vérin est limitée à 20 cm (soit +/- 10 cm par rapport à la position de référence, cf. « *Partie 1 : Modélisation* »).

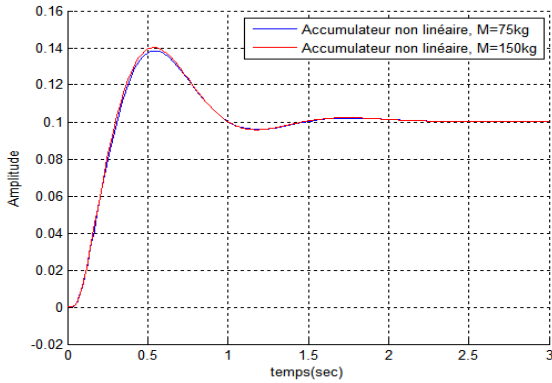


Fig. 5. Réponses indicielles de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour une masse de 75kg et de 150 kg dans le cas de résistances linéarisées et d'accumulateurs non linéaires

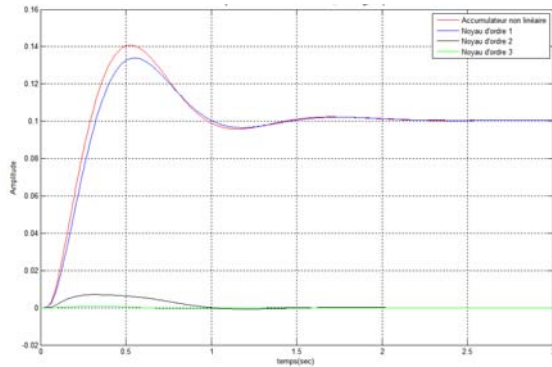


Fig. 6. Contribution des noyaux d'ordre 1 à 3 à la réponse indicielle de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour une masse de 150 kg dans le cas de résistances linéarisées et d'accumulateurs non linéaires

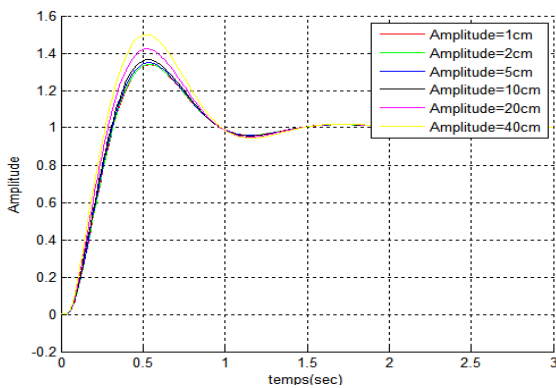


Fig. 7. Influence de l'amplitude du signal d'entrée sur la réponse indicielle réduite de la suspension CRONE pour une masse de 150 kg dans le cas de résistances linéarisées et d'accumulateurs non linéaires

C. Résistances non linéaires et accumulateurs linéarisés

La figure 8 présente les réponses indicielles de la suspension CRONE toujours pour les mêmes conditions.

La figure 9 illustre la contribution des noyaux d'ordre 1, 3 et 5 (les noyaux d'ordre 2 et 4 étant nuls) à la réponse indicielle de la suspension CRONE pour une amplitude de 10 cm et pour une masse de 150 kg.

La figure 10 présente l'influence de l'amplitude du signal d'entrée sur la réponse indicielle réduite de la suspension CRONE pour une masse de 150 kg (là aussi chaque réponse est normalisée par rapport à sa valeur en régime permanent).

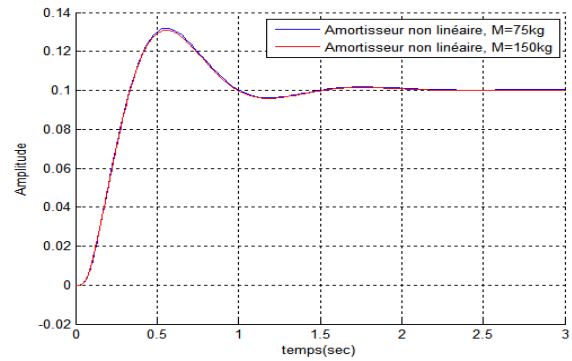


Fig. 8. Réponses indicielles de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour une masse de 75 kg et de 150 kg dans le cas de résistances non linéaires et d'accumulateurs linéarisés

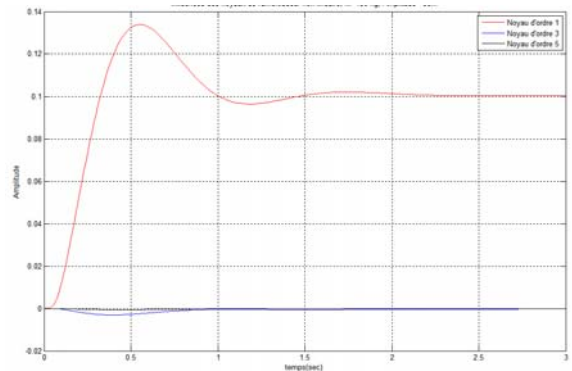


Fig. 9. Contribution des noyaux d'ordre 1, 3 et 5 à la réponse indicielle de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour une masse de 150 kg dans le cas de résistances non linéaires et d'accumulateurs linéarisés

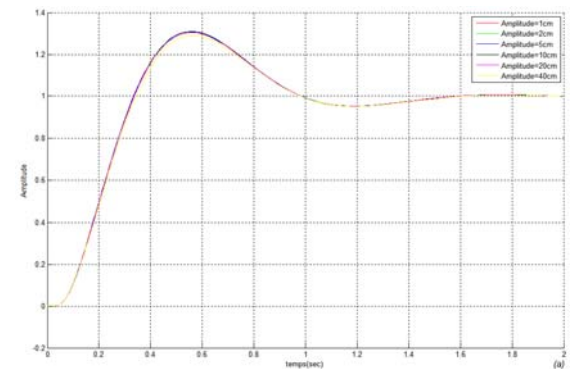


Fig. 10. Influence de l'amplitude du signal d'entrée sur la réponse indicielle réduite de la suspension CRONE pour une masse de 150 kg dans le cas de résistances non linéaires et d'accumulateurs linéarisés

L'observation de ces trois figures permet d'affirmer :

- que les non-linéarités des résistances n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse (Fig. 8) ;
- que la contribution des noyaux d'ordre supérieur à 1 est négligeable (Fig. 9) ;
- que la sensibilité du degré de stabilité à l'amplitude du saut échelon est quasiment nulle (Fig. 10).

D. Résistances et accumulateurs non linéaires

La figure 11 présente les réponses indicielles de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour une masse de 75 kg et de 150 kg dans le cas de résistances et d'accumulateurs non linéaires.

La figure 12 illustre la contribution des noyaux d'ordre 1 à 4 à la réponse indicielle de la suspension CRONE pour une amplitude de 10 cm et pour une masse de 150 kg.

La figure 13 présente l'influence de l'amplitude du signal d'entrée sur la réponse indicielle réduite de la suspension CRONE pour une masse de 150 kg.

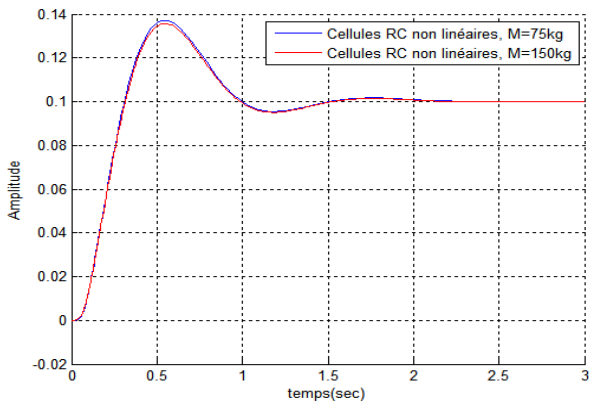


Fig. 11. Réponses indicielles de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour une masse de 75 kg et de 150 kg dans le cas de résistances et d'accumulateurs non linéaires

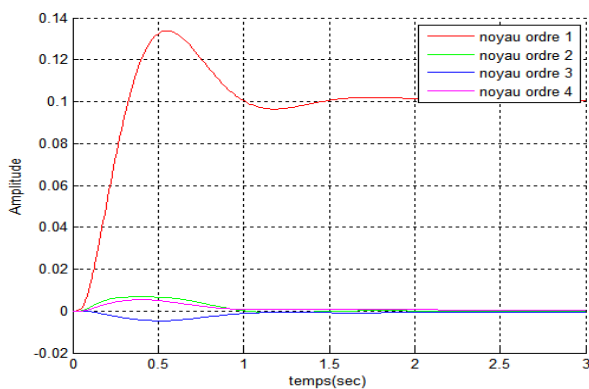


Fig. 12. Contribution des noyaux d'ordre 1 à 4 à la réponse indicielle de la suspension CRONE à une amplitude de 10 cm pour une masse de 150 kg dans le cas de résistances et d'accumulateurs non linéaires

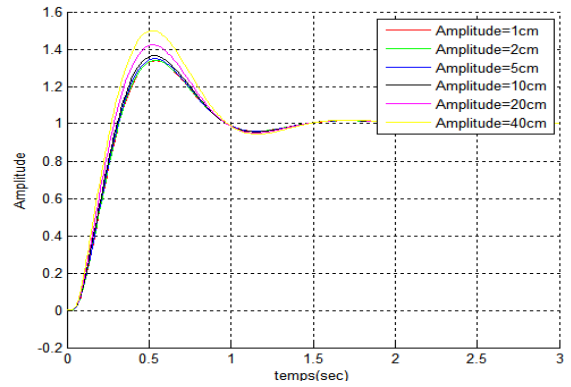


Fig. 13. Influence de l'amplitude du signal d'entrée sur la réponse indicielle réduite de la suspension CRONE pour une masse de 150 kg dans le cas de résistances et d'accumulateurs non linéaires

L'observation de ces trois figures permet d'affirmer :

- que les non-linéarités n'affectent quasiment pas la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse (Fig. 11) ;
- que la contribution des noyaux d'ordre supérieur à 1 est faible (Fig. 12) ;
- que la sensibilité du degré de stabilité à l'amplitude du saut échelon (Fig. 13) est la même que celle déjà observée dans le cas 1 (Fig. 7).

V. ANALYSE A L'AIDE DES DOMAINES DE FONCTIONNEMENT

Les figures 14 et 15 présentent les caractéristiques non linéaires (en bleu) des 6 éléments capacitifs (Fig.14) et des 5 éléments résistifs (Fig.15) qui composent le réseau hydropneumatique étudié. Sur ces caractéristiques, les domaines de variation (en rouge) au cours d'un saut échelon d'amplitude 40 cm pour une masse de 150 kg (cas le plus défavorable), sont superposés. Ces résultats mettent en évidence que même dans le cas d'une sollicitation de grande amplitude au niveau du vérin de suspension, les variations au niveau de chaque élément restent faibles.

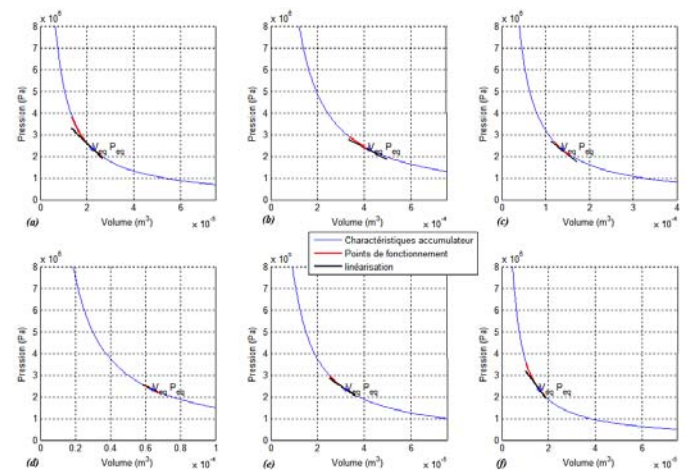


Fig. 14. Caractéristiques non linéaires (en bleu) des 6 éléments capacitifs et superposition (en rouge) des domaines de variation pour un saut échelon d'amplitude 40 cm et pour une masse de 150 kg

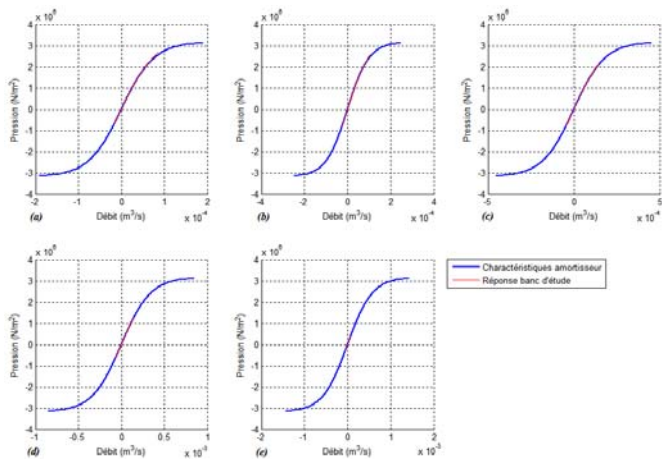


Fig. 15. Caractéristiques non linéaires (en bleu) des 5 éléments dissipatifs et superposition (en rouge) des domaines de variation pour un saut échelon d'amplitude 40 cm et pour une masse de 150 kg

VI. CONCLUSION

L'introduction et l'exploitation des séries de Volterra en isolation vibratoire ont permis d'expliquer pourquoi, dans le cas de la suspension CRONE réalisée en technologie hydropneumatique à partir de réseaux de cellules RC, la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue n'est pas affectée par les non-linéarités des composants RC lors de grandes sollicitations.

D'un point de vue mathématique, pour de grandes sollicitations correspondant aux limites de fonctionnement de la suspension, l'influence des noyaux supérieurs à 3 est négligeable quelle que soit la nature de la sollicitation (impulsion, échelon, rampe, sinus,...). Ensuite, pour une réponse indicelle, par exemple, et pour une masse donnée, la réponse des noyaux d'ordre 1 et 2 augmente de quelques pourcents la valeur du premier dépassement de la réponse du noyau d'ordre 1. Ce résultat traduit le fait que les non-linéarités des cellules RC sont continues et « douces ». Enfin, comme déjà précisé, bien qu'augmentée de quelques pourcents, la valeur du premier dépassement de la réponse indicelle du système non linéaire reste aussi constante quelle que soit la masse (conservation de la robustesse du degré de stabilité).

D'un point de vue technologique, le débit généré par le mouvement de la tige de suspension se répartit dans le réseau hydropneumatique en fonction des impédances d'entrée de chacune des cellules RC. L'expérience montre que, même pour de grandes variations correspondant aux limites de fonctionnement de la suspension, la répartition du débit généré dans chaque cellule RC conduit seulement à de petites ou moyennes variations autour de leurs points d'équilibre. Ce résultat est d'autant plus prononcé que le nombre N de cellules utilisés pour synthétiser l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence est important.

En conclusion, les non-linéarités des cellules RC des réseaux hydropneumatiques de la suspension CRONE n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, ne remettant pas ainsi en cause la mise en

défaut de l'interdépendance masse-amortissement obtenue avec l'approche CRONE développée dans un contexte linéaire [12].

Les perspectives à très court terme qui s'inscrivent dans la continuité des travaux présentés dans cet article concernent la prise en compte des effets inductifs d'origine hydraulique dus aux longueurs des canalisations, les réseaux étudiés devenant alors des arrangements de cellules RLC.

RÉFÉRENCES

- [1] Sandberg I. W. Expansions of nonlinear systems. *Bell Syst. Tech. Journal*, vol. 61, no. 2, Feb. 1982.
- [2] Chua L.O. and Ng C.Y. Frequency domain analysis of nonlinear systems: General theory. *Electronics Circuits and Systems*, Vol. 3, N° 4, July 1979.
- [3] Crum L. A. and Heinen J. A. Simultaneous reduction and expansion of multidimensional Laplace transform kernels. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 26, N° 4, pp. 753-771, 1974.
- [4] Bedrosian E. and Rice S.O. The output properties of Volterra systems, driven by harmonic and Gaussian inputs. *Proc. IEEE*, Vol. 59, pp. 1688-1707, Dec. 1971.
- [5] Busgang J. J., Ehrman L. and Graham J. W. Analysis of nonlinear systems with multiple inputs. *Proc. IEEE*, Vol. 62, pp. 1088-1119, Aug. 1974.
- [6] Serrier P. Analyse de l'influence des non-linéarités dans l'approche CRONE : Application en isolation vibratoire. Thèse de l'Université Bordeaux 1, 30 Septembre 2008.
- [7] Serrier P., Moreau X. and Oustaloup A. Synthesis of a limited-bandwidth fractional differentiator made in hydropneumatic technology. *ASME 2005, International Design Engineering Technical Conferences*, Long Beach, California, USA, September 2005.
- [8] Serrier P., Moreau X. and Oustaloup A. Volterra series based analysis of components nonlinearities in a limited-bandwidth fractional differentiator achieved in hydropneumatic technology. *Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications - FDA 06*, Porto, Portugal, 2006.
- [9] Serrier P., Moreau X., Sabatier J. and Oustaloup A. Taking into account of non-linearities in the CRONE approach: application to vibration isolation. *IECON'06, IEEE, Paris*, 7-10 Nov. 2006.
- [10] Serrier P., Moreau X. and Oustaloup A. Volterra series based analysis of components nonlinearities in a limited-bandwidth fractional differentiator achieved in hydropneumatic technology. *Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, FDA 06*, Porto, Portugal, 2006.
- [11] George D. A. Continuous non linear systems. Technical Report 355, Research Laboratory of Electronics, M. I. T. 1959.
- [12] Oustaloup A. La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications, Edition Hermès, Paris, 1995.