Découplage dynamique des systèmes linéaires non stationnaires

Frédéric ROTELLA[1], Irène ZAMBETTAKIS[2]

[1]Ecole d'Ingénieurs de Tarbes,
47, Avenue d'Azereix, 65016 CEDEX, France.
rotella@enit.fr

[2]Institut Universitaire de Technologie de Tarbes de l'Université Paul Sabatier de Toulouse,
1 rue Lautréamont, 65016 Tarbes CEDEX, France.
izambettakis@iut-tarbes.fr

Résumé— **Le problème du découplage diagonal des systèmes linéaires par un retour d'état dynamique est maintenant bien compris lorsque les coefficients sont constants. L'algorithme de Silverman, appelé aussi algorithme de structure, permet de résoudre ce problème et de concevoir l'extension dynamique et le retour statique d'état augmenté associé. Nous présentons ici l'adaptation de cet algorithme au cas des systèmes linéaires non stationnaires en insistant sur les étapes spécifiques à appliquer lorsque les coefficients dépendent du temps. Basée sur le formalisme d'état, la manipulation de matrices non constantes relativement au temps implique l'utilisation d'opérateurs différentiels ou de factorisations matricielles non triviales.**

Mots-Clés : Découplage, extension dynamique, retour d'état dynamique, indices de structure, degré relatif, degré différentiel, système non stationnaire, système linéaire, équation d'état, sortie plate, platitude.

I. Introduction

L'importance des modèles linéaires non stationnaires réside essentiellement dans la linéarisation d'un système non linéaire autour d'une trajectoire de référence. On peut ainsi concevoir une commande en boucle fermée à coefficients non stationnaires afin d'obtenir une poursuite asymptotique de cette trajectoire dans un cadre linéaire mais dont les coefficients dépendent du temps. Pour les systèmes à autant d'entrées que de sorties, de façon à pouvoir assurer un pilotage plus facile, il peut être intéressant de découpler les entrées et les sorties par bouclage pour obtenir finalement un système diagonal où une entrée influence une sortie et une seule. Le découplage est alors diagonal. Cette propriété acquise, il est aisé, en utilisant des techniques propres aux systèmes mono-entrée mono-sortie de pouvoir régler les performances du système canal par canal. Ce problème du découplage, étroitement lié à celui de l'inversion, a été considéré assez tôt pour les systèmes linéaires à coefficients constants ([19], [3], [23]) et peut être traité à l'aide du formalisme d'état [28], du formalisme polynomial [17], [41] ou du formalisme géométrique [42], [43]. [9] en présente une analyse complète. Assez rapidement ce problème a été considéré pour les modèles linéaires non stationnaires [34], [22], [8], [1], [21]. Des conditions d'existence et la forme d'une solution au problème de découplage, parfois étendues à des systèmes non carrés où le nombre d'entrées est différent de celui des sorties [2] ou aux modèles singuliers [18], ont été établies en ne considérant que des retours statiques d'état. Notre objectif est de proposer la résolution du problème de découplage par retour d'etat dynamique et d'en détailler les algorithmes.

Ainsi dans la suite nous allons considérer le système non stationnaire décrit par l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

où pour tout t, $x(t)$ est dans $\mathbb{R}^n$, $u(t)$ et $y(t)$ sont dans $\mathbb{R}^m$ et $\dot{x}(t)$ désigne la dérivée temporelle de $x(t)$. Les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ ont leurs coefficients qui dépendent du temps et sont supposées suffisamment dérivables sur un intervalle de temps $T = [t_I, t_f]$. De façon à rendre plus concises les expressions nous omettons dans toute la suite le paramètre temporel t dont dépendent les variables et les matrices considérées. Les algorithmes d'analyse et de traitement des modèles linéaires non stationnaires nécessitent l'utilisation d'opérateurs différentiels sur des matrices dépendantes du temps et de tailles compatibles (M, N et P ici), définis par récurrence sous la forme suivante. Pour tout $i > 1$, on définit :

$$C_P^{i+1}(M) = PC_P^i(M) - \dot{C}_P^i(M), \qquad (2)$$

$$L_P^{i+1}(N) = L_P^i(N)P + \dot{L}_P^i(N), \qquad (3)$$

avec $C_P^0(M) = M$ et $L_P^0(N) = N$. Enfin, pour clore ce paragraphe sur les notations adoptées, nous notons la i-ième dérivation d'une quantité par rapport au temps sous la forme habituelle, pour tout $i > 1$:

$$w^{(i)} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

Le principe des techniques de découplage repose essentiellement sur la remarque suivante. Lorsque D est inversible, le retour d'état $u = D^{-1}(v - Cx)$, résout de façon immédiate le découplage entre la sortie y et la nouvelle entrée v puisque l'on obtient $y = v$. Par contre cette commande conduit au système :

$$\dot{x} = (A - BD^{-1}C)x + BD^{-1}v.$$

Le bouclage découplant ne sera admissible que si ce système est uniformément asymptotiquement stable. Remarquons que l'évolution de l'état $x(t)$ n'influence pas celle de la sortie $y(t)$: il est non observable. D'où l'importance de la question relative à la stabilité de cette partie non observable. Ce point fondamental doit toujours être étudié car c'est la réponse à cette question qui valide toute procédure de découplage. En effet, le principe que l'on vient de voir est étendu de la façon suivante : trouver une relation linéaire entre la commande, l'état et la sortie, puis la résoudre, de façon exacte en la commande, pour obtenir le retour d'état statique qui assure les deux objectifs principaux, découplage entrées-sorties et stabilité interne de la partie non observable. Bien que ce dernier objectif n'ait pas été la préoccupation essentielle des premiers travaux sur le découplage, la partie non observable de l'état, qui correspond aux zéros du système, peut être mise en évidence par la forme normale de (1) [11], [10]. Ces points vont être rappelés dans la partie II où va intervenir une quantité fondamentale, la matrice de découplage. Dans certains cas, qu'il faut impérativement détecter, le découplage diagonal n'est pas toujours possible et nous allons rencontrer essentiellement deux situations. Lorsque la matrice de découplage n'est pas inversible, on peut à l'aide de l'algorithme de Silverman [35], [17], étendu au cas non stationnaire dans la partie III, obtenir une extension dynamique, ou précompensation, par ajout d'intégrateurs sur les commandes du système initial, permettant le découplage éventuel du système ainsi augmenté. Lorsque le modèle présente des zéros instables nous verrons dans la dernière partie que le choix d'autres sorties que celles initialement considérées permet le découplage diagonal relativement à ces nouvelles sorties et la platitude peut alors être d'un grand secours. La mise en évidence des sorties plates conduit toujours à la commande découplante, bien sûr relativement à ces sorties.

Dans tous les cas l'objectif est de concevoir un retour d'état non stationnaire pour obtenir un système découplé stable de façon interne. Il est cependant évident que l'on pourrait appliquer la technique générale de découplage diagonal élaborée dans le cas des systèmes non linéaires [11]. Cette éventualité nécessite d'une part de considérer le temps t comme une composante d'état (évidemment non commandable) en augmentant la taille du système. D'autre part elle ne permet pas de tenir compte des particularités spécifiques propres au formalisme des systèmes linéaires afin de conduire à des algorithmes spécifiques. Ces dernières remarques constituent la raison d'être du présent article.

II. Découplage par retour d'état statique

Les principaux résultats obtenus pour les modèles (1) concernent la recherche des conditions pour lesquelles le découplage peut être réalisé par un retour d'état statique non stationnaire de la forme :

$$u = Gv - Kx, \tag{4}$$

où v est une nouvelle entrée de dimension m, telle que, pour i de 1 à m, $y_i = \phi(v_i)$, où y_i et v_i désignent les i-ièmes composantes de la sortie et de la nouvelle entrée. La solution et les conditions de réalisation de ce bouclage ont été données dès les premiers travaux. Par exemple, [34] propose de résoudre le problème de l'inversion d'un système en effectuant un certain nombre de dérivations globales sur la sortie, technique proposée également dans [22] où le nombre de dérivations est différent suivant la composante de la sortie sur laquelle on les effectue. Cette technique met en œuvre l'opérateur (3) et permet de réaliser le découplage diagonal par retour d'état. Généralisant la notion de degré relatif pour les modèles stationnaires [6], [8] définit l'ordre différentiel, appelé aussi nombre caractéristique [21], ou degré relatif [30] pour le modèle linéaire non stationnaire (1). Notons que ces définitions ont été proposées pour $D = 0$ sur T et que nous les adaptons ici à (1). En notant, pour i de 1 à m, C_i et D_i les i-ièmes lignes des matrices C et D, le degré relatif est le m-uplet d'entiers :

$$r = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$$

défini par :
- si $\forall t \in T$, $D_i \neq 0$ alors $r_i = 0$;
- sinon :
  - si $\forall t \in T$, $C_i B \neq 0$ alors $r_i = 1$;
  - sinon r_i est défini comme le plus petit entier ρ tel que pour $j = 0$ à $\rho - 2$, $\forall t \in T, L^j(C_i)B = 0$ et $L^{\rho-1}(C_i)B \neq 0$.

C'est-à-dire que T est un intervalle de temps pendant lequel les vecteurs $L^j(C_i)B$ pour $j = 0$ à $r_i - 2$ sont identiquement nuls et les vecteurs D_i ou $L^{r_i-1}(C_i)B$ ne le sont jamais. Si l'un de ces vecteurs était nul pour une valeur particulière du temps il conviendrait de considérer deux intervalles successifs. Notons également que dans [10], le degré relatif est défini au sens de [34], c'est-à-dire sous la forme de l'entier correspondant au nombre de dérivations à effectuer sur la sortie pour faire apparaître la commande. Si cette définition est convenable pour les systèmes à une entrée, pour lesquels la notion de découplage perd son intérêt, elle ne l'est plus dans le cas des modèles à plusieurs entrées. Enfin, on peut montrer qu'une définition équivalente du degré relatif à l'aide de l'opérateur différentiel (2) peut être donnée [30].

On construit alors la matrice $\Delta(m \times m)$ dont la i-ième ligne Δ_i, pour $i = 1$ à m, est donnée par :

$$\Delta_i = \begin{cases} D_i & \text{si} \quad r_i = 0, \\ L_A^{r_i-1}(C_i)B & \text{si} \quad r_i \neq 0, \end{cases}$$

et la matrice $\Phi(m \times n)$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} L_A^{r_1}(C_1) \\ L^{r_2}(C_2) \\ \vdots \\ L_A^{r_m}(C_m) \end{bmatrix}.$$

Elles permettent d'écrire $Y = \Phi x + \Delta u$ où Y est le vecteur dont la i-ième composante est $y^{(r_i)}$. Sans contrainte de stabilité du système obtenu, la condition nécessaire et suffisante de découplage diagonal [8], [30], réside dans l'inversibilité sur T de Δ, appelée matrice de découplage. Cette condition d'inversibilité conduit au bouclage statique découplant :

$$u = \Delta^{-1}(v - \Phi x), \tag{5}$$

et aux relations découplées, pour tout i dans $\{1, \ldots, m\}$, $y_i^{(r_i)} = v_i$. Le système entrée-sortie obtenu est un système linéaire à coefficients constants dont on peut placer les dynamiques par m bouclages supplémentaires stabilisants. Auparavant il est nécessaire de garantir la stabilité interne. En adaptant les preuves utilisées dans [11], [10], on montre que le rang de la matrice $(\rho \times n)$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ L^{r_i - 1}(C_1) \\ C_2 \\ \vdots \\ L^{r_m - 1}(C_m) \end{bmatrix},$$

est $\rho = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ et qu'il existe, d'après le théorème de Doležal [5], une matrice Π^* de taille $(n - \rho) \times n$ telle que :

$$P = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^* \end{bmatrix},$$

soit inversible. On peut ainsi définir les changements de variables $z = \Pi x$ et $\eta = \Pi^* x$, pour obtenir, à partir de la définition du degré relatif, la forme normale du système :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_m \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix} u, \\ \dot{\eta} &= \Gamma z + \Xi \eta + \Psi u, \\ y &= \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_m \end{bmatrix} z, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} H_i &= \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & \Phi_i & & \end{bmatrix}, J_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_i \end{bmatrix}, \\ K_i &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma &= \Pi^* A \left[P^{-1}\right]_1, \Xi = \Pi^* A \left[P^{-1}\right]_2, \Psi = \Pi^* B, \end{aligned}$$

où $\left[P^{-1}\right]_1$ est la matrice constituée par les ρ premières colonnes de P^{-1} et $\left[P^{-1}\right]_2$ celle constituée par les $n - \rho$ dernières. Les composantes de η apparaissent comme une partie non observable et l'utilisation cumulée du bouclage découplant et du bouclage stabilisant, qui n'est qu'un bouclage sur l'état z, ne modifie pas la matrice Ξ. Le système :

$$\dot{\eta} = \Xi \eta + \Psi u,$$

représente le système dynamique des zéros qui est rendu non observable par le bouclage découplant. Sa stabilité est donc primordiale.

En résumé, le bouclage découplant conduit à l'équation d'état en boucle fermée :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[A - B\Delta^{-1}\Phi\right] x + B\Delta^{-1} v, \\ y &= \left[C - D\Delta^{-1}\Phi\right] x + D\Delta^{-1} v, \end{aligned}$$

et il y a lieu de s'assurer, lorsque $\rho < n$, que le système bouclé est stable de façon interne, c'est-à-dire que le système de taille $n - \rho$ des zéros du système est stable. Lorsque $\rho = n$, il est évident que cette question n'a plus lieu d'être.

Lorsque le système des zéros est instable, la commande découplante par retour d'état ne peut être utilisée. Nous verrons cependant que l'utilisation de la platitude permet de contourner cet inconvénient en proposant des sorties qui permettent le découplage, c'est-à-dire des variables pour lesquelles, entre autres propriétés, il n'y a pas de système des zéros. Par ailleurs le découplage n'est pas possible si la matrice de découplage n'est pas inversible sur T. La première solution, envisagée dans [39] dans le cas de modèles non stationnaires, consiste à se contenter d'un découplage partiel. Afin d'avoir une partie découplable de taille maximale, nous proposons dans la partie suivante d'étendre aux systèmes non stationnaires l'algorithme de structure de Silverman [35].

III. Découplage par retour dynamique

On se place ici dans le cas où la matrice Δ n'est pas inversible sur T. L'algorithme d'extension dynamique que nous allons étendre ici aux systèmes non stationnaires permet dans certains cas d'augmenter le rang de cette matrice jusqu'à ce qu'elle soit inversible. Comme pour ses versions stationnaires [35] ou non linéaire [11], cet algorithme fournit la position et le nombre d'intégrateurs à introduire sur les commandes du système (1). Un retour statique d'état peut ensuite être utilisé et conduire à un bouclage dynamique qui, finalement, combine :

- une extension dynamique par ajout d'intégrateurs sur certains canaux d'entrée ;
- un bouclage statique découplant le système augmenté obtenu.

Le bouclage découplant ainsi réalisé conservant les inconvénients décrits dans la section précédente, il convient de s'assurer de la stabilité de la partie non observable engendrée par le retour découplant.

Cet algorithme se déroule en des étapes itérées qui consistent à construire une succession de systèmes augmentés. Deux points fondamentaux concernent cet algorithme. D'une part, il est de type fini, c'est-à-dire que la conclusion est apportée au bout d'un nombre fini d'itérations. D'autre part, si la conclusion est négative, il est assuré qu'aucun autre algorithme ne permettra un découplage avec une dynamique des zéros asymptotiquement stable. Seul un changement de sortie conduit à une autre conclusion. Nous traitons cette question dans la section suivante.

Notons $\Sigma_{(i)}$ le système obtenu à l'étape i, sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{(i)} &= A_{(i)} X_{(i)} + B_{(i)} U_{(i)}, \\ Y_{(i)} &= \Phi_{(i)} X_{(i)} + \Delta_{(i)} U_{(i)}. \end{aligned} \tag{6}$$

L'initialisation de l'algorithme est fournie par :

- la relation entre l'état et la commande : $\dot{x} = Ax + Bu$;
- la relation obtenue par dérivations pour faire apparaître la matrice de découplage : $Y = \Phi x + \Delta u$,

soit le système $\Sigma_{(0)}$:

$$\begin{aligned} &X_{(0)} = x, U_{(0)} = u, Y_{(0)} = Y, \\ &A_{(0)} = A, B_{(0)} = B, \Phi_{(0)} = \Phi, \Delta_{(0)} = \Delta. \end{aligned}$$

Pour $i \geq 0$, le passage d'un système, $\Sigma_{(i)}$, au suivant, $\Sigma_{(i+1)}$, est conditionné par un test préliminaire sur le rang de $\Delta_{(i)}$:

– si rang $\Delta_{(i)} = m$, l'algorithme est terminé, le système est découplable par le retour d'état :

$$U_{(i)} = \Delta_{(i)}^{-1}(v - \Phi_{(i)}X_{(i)});$$

– si rang $\Delta_{(i)} = l < m$, on construit le système augmenté $\Sigma_{(i+1)}$:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{(i+1)} &= A_{(i+1)}X_{(i+1)} + B_{(i+1)}U_{(i+1)}, \\ Y_{(i+1)} &= \Phi_{(i+1)}X_{(i+1)} + \Delta_{(i+1)}U_{(i+1)}, \end{aligned}$$

par la procédure suivante.

1. On cherche une matrice $M_{(i)}$ inversible sur T de taille $(m \times m)$ telle que :

$$\Delta_{(i)}M_{(i)} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ F_{(i)} & 0 \end{bmatrix},$$

où $F_{(i)}$ est une matrice de taille $((m-l) \times (l))$ et I_l la matrice identité d'ordre l. Le théorème de Doležal et ses extensions [5], [36], [40], [4] garantit l'existence de cette factorisation lorsque $\Delta_{(i)}$ est de rang constant et suffisamment continûment dérivable sur T. On peut même imposer certaines contraintes sur $M_{(i)}$ comme son orthogonalité ou une norme bornée pour elle ou son inverse.

2. On partitionne $M_{(i)}$ sous la forme $M_{(i)} = \begin{bmatrix} M_{1(i)} & M_{2(i)} \end{bmatrix}$ où $M_{1(i)}$ est une matrice $(m \times l)$ ce qui permet d'introduire l'extension sous la forme de l intégrateurs :

$$\begin{aligned} U_{(i)} &= M_{1(i)}z_{(i)} + M_{2(i)}w_{2(i)}, \\ \dot{z}_{(i)} &= w_{1(i)}, \end{aligned}$$

où w_1 et w_2 vont constituer la commande de $\Sigma_{(i+1)}$.

3. On applique $U_{(i)}$ à $\Sigma_{(i)}$ ce qui donne le système décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{(i)} &= A_{(i)}X_{(i)} + B_{(i)}M_{1(i)}z_{(i)} + B_{(i)}M_{2(i)}w_{2(i)}, \\ \dot{z}_{(i)} &= w_{1(i)}, \\ Y_{(i)} &= \Phi_{(i)}X_{(i)} + \Delta_{(i)}M_{1(i)}z_{(i)}, \end{aligned}$$

car $\Delta_{(i)}M_{2(i)} = 0$, et la commande n'apparaît plus dans la sortie $Y_{(i)}$.

4. En introduisant l'état et la commande :

$$X_{(i+1)} = \begin{pmatrix} X_{(i)} \\ z_{(i)} \end{pmatrix}, \; U_{(i+1)} = \begin{pmatrix} w_{1(i)} \\ w_{2(i)} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

et comme :

$$\Delta_{(i)}M_{1(i)} = \begin{bmatrix} I_l \\ F_{(i)} \end{bmatrix},$$

les relations précédentes se mettent sous la forme de l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{(i+1)} &= A_{(i+1)}X_{(i+1)} + B_{(i+1)}U_{(i+1)}, \qquad (8) \\ A_{(i+1)} &= \begin{bmatrix} A_{(i)} & B_{(i)}M_{1(i)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{(i+1)} &= \begin{bmatrix} 0 & B_{(i)}M_{2(i)} \\ I_l & 0 \end{bmatrix}, \\ Y_{(i)} &= C_{(i+1)}X_{(i+1)}, \; C_{(i+1)} = \begin{bmatrix} \Phi_{(i)} & \begin{matrix} I_l \\ F_{(i)} \end{matrix} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dont nous allons calculer le degré relatif.

5. Notons $Y_{j(i)}(t)$, $\Phi_{j(i)}$ et $F_{j(i)}$ les j-ièmes composantes et lignes du vecteur $Y_{(i)}$ et des matrices $\Phi_{(i)}$ et $F_{(i)}$. On peut alors calculer les degrés relatifs $r_{j(i)}$ des variables $Y_{j(i)}$ relativement aux commandes $w_{1(i)}$ et $w_{2(i)}$. Rappelons que $r_{j(i)}$ est le nombre de dérivations de $Y_{j(i)}$ nécessaires pour faire apparaître la commande.

(a) Pour j de 1 à l : $\dot{Y}_{j(i)} =$

$$L_{A_{(i)}}\Phi_{j(i)}X_{(i)} + \Phi_{j(i)}B_{(i)}M_{1(i)}z_{(i)} + w_{j,1(i)} + \Phi_{j(i)}B_{(i)}M_{2(i)}w_{2(i)},$$

où $w_{j,1(i)}$ est la j-ième composante de $w_{1(i)}$. Donc, pour j de 1 à l, on a $r_{j(i)} = 1$.

(b) Pour j de $l+1$ à m, avec $C_{j(i+1)} = \begin{bmatrix} \Phi_{j(i)} & F_{j-l(i)} \end{bmatrix}$,on obtient : $Y_{j(i)}^{(r_{j(i)})} =$

$$L_{A_{(i+1)}}^{r_{j(i)}}(C_{j(i+1)})X_{(i+1)} + L_{A_{(i+1)}}^{r_{j(i)}-1}(C_{j(i+1)})B_{(i+1)}U_{(i+1)}.$$

On peut remarquer que, compte tenu de la structure des matrices, on obtient, pour k entier : $L_{A_{(i+1)}}^k(C_{j(i+1)}) =$

$$\begin{bmatrix} L_{A_{(i)}}^k\Phi_{j(i)} & F_{j-l(i)}^{(k)} + \sum_{\eta=0}^{k-1}\left(\left(L_{A_{(i)}}^\eta\Phi_{j(i)}\right)B_{(i)}M_{1(i)}\right)^{(k-\eta)} \end{bmatrix}.$$

6. En posant :

$$Y_{(i+1)} = \begin{bmatrix} Y_{1(i)}^{(r_{1(i)})} \\ \vdots \\ Y_{m(i)}^{(r_{m(i)})} \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

on obtient la relation :

$$Y_{(i+1)} = \Phi_{(i+1)}X_{(i+1)} + \Delta_{(i+1)}U_{(i+1)}, \qquad (10)$$

$$\Phi_{(i+1)} = \begin{bmatrix} L_{A_{(i)}}\Phi_{(i)} \quad \Phi_{(i)}B_{(i)}M_{1(i)} \\ L_{A(i+1)}^{r_{l+1(i)}}(C_{l+1(i+1)}) \\ \vdots \\ L_{A(i+1)}^{r_{m(i)}}(C_{m(i+1)}) \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{(i+1)} = \begin{bmatrix} I_l \quad \Phi_{(i)}B_{(i)}M_{2(i)} \\ L_{A(i+1)}^{r_{l+1(i)}-1}(C_{l+1(i+1)})B_{(i+1)} \\ \vdots \\ L_{A(i+1)}^{r_{m(i)}-1}(C_{m(i+1)})B_{(i+1)} \end{bmatrix},$$

qui, associée à (8) et aux variables (7), définit complètement $\Sigma_{(i+1)}$.

On peut alors recommencer en testant le rang de $\Delta_{(i+1)}$ pour construire un système augmenté permettant le découplage. L'algorithme s'arrête donc lorsque la matrice de découplage à l'étape i est inversible. Mais si le rang de cette matrice n'augmente pas il existe une nombre d'itérations maximal qui permet de conclure à l'impossibilité du découplage. On obtient le résultat suivant qui indique la finitude de l'algorithme d'extension dynamique. Dupliquant la preuve élaborée dans le cas non linéaire [11] on est conduit à la proposition suivante.

Proposition : Pour le système (6), dans le cas où rang $\Delta_{(i)} = l < m$, les deux événements suivants sont mutuellement exclusifs :
- après au plus $n - (r_1 + \cdots + r_l + \min_{j=l+1}^{m} r_j)$ itérations de l'étape d'extension dynamique, le nouveau système augmenté est tel que le rang de sa matrice de découplage est supérieur à l ;
- après un nombre quelconque d'itérations, le système obtenu a constamment une matrice de découplage de rang l.

IV. Découplage par platitude

Dans le cas où la sortie considérée ne permet pas le découplage du système, nous montrons ici qu'il est toujours possible de le découpler relativement à une sortie plate. Nous allons voir que ce point de vue, non seulement évite le problème de la dynamique des zéros, mais en plus conduit toujours à un découplage par retour statique d'état. De façon à détecter une sortie plate de (1) nous allons décrire la construction de la forme canonique commandable de (1) à l'aide de l'algorithme de Silverman-Meadows [33], [37].

Soit la suite de matrices $C_A^i(B)$, pour $i = 0, 1, \ldots$. S'il existe un intervalle de temps $T = [t_1, t_2]$ et un entier μ tel que la matrice :

$$C_{A\{\mu\}} = \left[\; C_A^0(B) \quad C_A^1(B) \quad \cdots \quad C_A^{\mu-1}(B) \;\right],$$

soit de rang n, sur tout T alors le système est commandable sur T. Notons b_i la i-ième colonne de B et supposons que rang $B = m$ sur T. Lorsque le système est commandable :

1. Dans la suite ordonnée de vecteurs $C_A^0(b_1), \ldots, C_A^0(b_m), C_A^1(b_1), \ldots, C_A^1(b_m), \ldots, C_A^i(b_1), \ldots, C_A^i(b_m), \ldots$, on sélectionne un vecteur qui ne soit pas linéairement dépendant des précédents.

2. On détermine alors les m indices de commandabilité μ_i, pour $i = 1, \ldots, m$, comme les plus petits entiers k tel que $C_A^k(b_i)$ soit linéairement dépendant des vecteurs précédents. On calcule les indices cumulés de commandabilité, pour $i = 1, \ldots, m$, $\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} \mu_j$.

3. On réordonne les vecteurs sélectionnés dans l'étape 1 pour construire la matrice $V = [C_A^0(b_1) \cdots C_A^{\mu_1-1}(b_1)\; C_A^0(b_2) \cdots C_A^{\mu_2-1}(b_2) \cdots C_A^0(b_m) \cdots C_A^{\mu_m-1}(b_m)]$, qui est inversible sur T par construction.

4. On calcule V^{-1}, d'où l'on extrait les σ_i-ièmes lignes. Soient M_i, $i = 1, \ldots, m$, ces lignes.

5. On construit la matrice de changement de variables :

$$T_\mathrm{C} = \begin{bmatrix} L_A^0(M_1) \\ \vdots \\ L_A^{\mu_1-1}(M_1) \\ L_A^0(M_2) \\ \vdots \\ L_A^{\mu_2-1}(M_2) \\ \vdots \\ L_A^0(M_m) \\ \vdots \\ L_A^{\mu_m-1}(M_m) \end{bmatrix}.$$

6. Les transformations $x_\mathrm{C} = T_\mathrm{C} x$ et $u_\mathrm{C} = H_\mathrm{C} u$ où H_C est la matrice $(m \times m)$ formée des lignes significatives de $T_\mathrm{C} B$:

$$H_\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 1 & \times & \cdots & \times \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

conduisent à l'équation d'état canonique commandable :

$$\dot{x}_\mathrm{C} = A_\mathrm{C} x_\mathrm{C} + \overline{B}_\mathrm{C} u_\mathrm{C},$$
$$y = C_\mathrm{C} x_\mathrm{C} + \overline{D}_\mathrm{C} u_\mathrm{C},$$

avec $A_\mathrm{C} = T_\mathrm{C} A T_\mathrm{C}^{-1} + \dot{T}_\mathrm{C} T_\mathrm{C}^{-1} = [A_{\mathrm{C}ij}]$, $\overline{B}_\mathrm{C} = T_\mathrm{C} B H_\mathrm{C}^{-1} = [\overline{B}_{\mathrm{C}i}]$, $C_\mathrm{C} = C T_\mathrm{C}^{-1}$, $\overline{D}_\mathrm{C} = D H_\mathrm{C}^{-1}$, où pour $i = 1$ à m :

$$A_{\mathrm{C}ii}(\mu_i \times \mu_i) = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \times & \times & \cdots & \times \end{bmatrix},$$

$$\overline{B}_{\mathrm{C}i}(\mu_i \times m) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & (i) & & & \end{bmatrix},$$

et pour $i = 1$ à m et $j = 1$ à m avec $j \neq i$:

$$A_{\mathrm{C}ij}(\mu_i \times \mu_j) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

On peut remarquer qu'en notant a_i la σ_i-ième ligne de A_C, elle est donnée également par la relation $a_i = L_A^{\mu_i}(M_i) T_\mathrm{C}^{-1}$.

À partir de cette forme canonique, formons le vecteur :

$$z = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{C},1} \\ x_{\mathrm{C},\sigma_1+1} \\ x_{\mathrm{C},\sigma_2+1} \\ \vdots \\ x_{\mathrm{C},\sigma_{m-1}+1} \end{bmatrix} = \Lambda x_C, \tag{11}$$

où $x_{\mathrm{C},i}$ représente la i-ième composante de l'état x_C. D'après la structure de A_C, on obtient des matrices U_j et T_j conduisant aux relations :

$$u = H_\mathrm{C}^{-1}(z^{(\mu)} + \sum_{j=0}^{\mu-1} U_j z^{(j)}) \text{ et } x = T_\mathrm{C}^{-1} x_\mathrm{C} = \sum_{j=0}^{\mu-1} T_j z^{(j)},$$

où $\mu = \max_{j=1,\ldots,m} \mu_j$. Ces deux relations indiquent que z est une sortie plate du système linéaire (1) permettant de paramétrer toutes les variables [7], [27]. Plus précisément, on s'aperçoit que toutes les composantes de $z^{(\mu)}$ ne sont pas nécessaires. Soit le vecteur :

$$Z = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{C},1}^{(\mu_1)} \\ x_{\mathrm{C},\sigma_1+1}^{(\mu_2)} \\ x_{\mathrm{C},\sigma_2+1}^{(\mu_3)} \\ \vdots \\ x_{\mathrm{C},\sigma_{m-1}+1}^{(\mu_m)} \end{bmatrix},$$

alors la structure de $(A_C, \overline{B}_C)$ permet d'écrire $Z = \Xi_C x_C + H_C u$, où Ξ_C est la matrice formée de toutes les lignes significatives de A_C. Ce système est donc découplable par le retour statique d'état :

$$u = H_C^{-1}(v - \Xi_C T_C x),$$

où v est une nouvelle commande sur laquelle on peut réaliser un retour supplémentaire stabilisant canal par canal. Comme de plus $\sum_{j=1}^{m} \mu_j = n$, la dimension de l'état non observable est nulle et l'on n'a pas à se soucier de la stabilité de la partie interne du système découplé ainsi obtenu. Ainsi relativement au découplage, l'avantage de considérer la sortie plate d'un système est double, il n'y a pas besoin d'extension dynamique et la dynamique des zéros n'existe pas.

V. Conclusion

Nous avons quelquefois précisé et quelquefois simplement rappelé une panoplie d'algorithmes permettant d'envisager le découplage diagonal d'un modèle linéaire non stationnaire. Ces algorithmes, cas particuliers d'algorithmes plus généraux, font appel à des opérateurs différentiels propres aux systèmes linéaires non stationnaires et peuvent être mis en œuvre dans une bibliothèque spécialisée de calcul formel pour l'analyse et le traitement des modèles linéaires non stationnaires. Comme cela a été le cas pour le découplage par retour statique d'état, ce que nous avons présenté peut être étendu aux modèles singuliers ou au découplage par blocs. Enfin, mentionnons que moyennant la transformation des opérateurs de dérivation en opérateurs d'avance, les algorithmes que nous avons décrit peuvent être utilisés par simple transposition dans le cadre des systèmes discrets.

Références

[1] Alonso-Concheiro, A., On the definition of non-interaction for linear time-varying systems, *Int. J. Control*, vol. 28, n. 6, pp. 917–925, 1978.

[2] Arvanitis, K.G., Uniform decoupling feedback by restricted static state feedback for linear time-varying analytic systems, *J. Franklin Institute*, vol. 335B, n. 2, pp. 359–373, 1998.

[3] Brockett, R.W., Poles, zeros and feedback : state space interpretation, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-10, n. 2, pp. 129–135, 1965.

[4] Ciampa, M., Volpi, A., A note on smooth matrices of constant rank, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, vol. XXXVII, pp. 155–170, 2005.

[5] Doležal, V., The existence of a continuous basis of a certain linear subspace of E_r which depends on a parameter, *Casopsis pro pestováni matematiki*, vol. 89, pp. 466–468, 1964.

[6] Falb, P.L., Wolowich, W.A., On the decoupling of multivariable systems, *Proc. Joint Aut. Control Conf.*, Philadelphia, pp. 791–796, 1967.

[7] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., Rouchon, Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples, Int. J. Control, vol. 61, n. 6, pp. 1327–1361, 1995.

[8] Freund, E., Design of time-variable multivariable systems by decoupling and by the inverse, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-16, n. 2, pp. 183–185, 1971.

[9] Herrera, H.A.N., Lafay, J.-F., New results about Morgan's problem, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-38, n. 12, pp. 1834–1838, 1993.

[10] Ilchmann, A., Mueller, M., Time-varying linear systems : relative degree and normal forms, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-52, n. 5, pp. 840–851, 2007.

[11] Isidori, I., *Nonlinear control systems*, Springer Verlag, 1989.

[12] Kailath, T., *Linear systems*, Prentice Hall, 1980.

[13] Kalman, R.E., A new approach to linear filtering and prediction problems, *Trans. ASME ser. D, J. Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.

[14] Kalman, R.E., Bucy, R.S., New results in linear filtering and prediction problems, *Trans. ASME ser. D, J. Basic Engineering*, vol. 83, pp. 95–108, 1961.

[15] Kamen, E.W., Fondamentals of linear time-varying systems, chap. 25, *The control handbook*, Levine W.S. (Ed.), pp. 451–468, CRC Press, 1996.

[16] Kato, T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, 1966.

[17] Kučera, V., *Analysis and design of discrete linear control systems*, Prentice Hall, 1991.

[18] Liu, X.P., Input-output decoupling of linear time-varying singular systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-44, n. ?, pp. 1016–1021, 1999.

[19] Morgan, B.S., The sysnthesis of linear multivariable systems by state variable feedback, *Proc. Joint Aut. Control Conf.*, Stanford, pp. 468–472, 1964.

[20] O'Brien, R.T., Jr., Iglesias, P.A., On the poles and zeros of linear, time-varying systems, *IEEE Trans. Circuits and Systems, I : Fundamental, Theory and Applications*, vol. 48, n. 5, pp. 565–577, 2001.

[21] Paraskevopoulos, P.N., Arvanitis, K.G., State feedback uniform decoupling problem of linear time-varying analytic systems, *J. Franklin Institute*, vol. 330, n. 6, pp. 1135–1163, 1993.

[22] Porter, W.A., Decoupling of and inverses for time-varying linear systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-14, n. 4, pp. 378–380, 1969.

[23] Rekasius, Z.V., Decoupling of mutivariable systems by means of state variable feedback, *Proc. 3rd Allerton Conf.*, pp. 439–447, 1965.

[24] Richards, J.A., *Analysis of periodically time-varying systems*, Springer-Verlag, 1983.

[25] Rotella, F., Systèmes linéaires non stationnaires, *Techniques de l'Ingénieur*, S 7035, 2003.

[26] Rotella, F., Borne, P., *Théorie et pratique du calcul matriciel*, Technip, 1995.

[27] Rotella, F., Zambettakis, I., Commande des systèmes par platitude, *Techniques de l'Ingénieur*, S 7450, 2007.

[28] Rotella, F., Zambettakis, I., *Automatique élémentaire*, Hermès-Lavoisier, 2008.

[29] Rouche, N., Mawhin, J., *Équations différentielles ordinaires, T. 1 : Théorie générale*, Masson, 1973.

[30] Rugh, W.J., *Linear system theory*, Prentice Hall, 2nd ed., 1996.

[31] Seal, C.E., Stubberud, A.R., Canonical forms for multiple-input time-variable systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-14, n. 6, pp. 704–707, 1969.

[32] Sen, P., Chidambara, M.R., Doležal's theorem revisited, *Mathematical Systems Theory*, vol. 13, n. 1, pp. 67–79, 1979.

[33] Silverman, L.M., Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form, *IEEE Trans. Aut. Control,* AC-11, n. 2, pp. 303–306, 1966.

[34] Silverman, L.M., Inversion of multivariable linear systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-14, n. 3, pp. 270–276, 1969.

[35] Silverman, L.M., Decoupling with state feedback and precompensation, *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-15, pp. 487 - 489, 1970.

[36] Silverman, L.M., Bucy, R.S., Generalizations of a theorem of Doležal, *Mathematical Systems Theory*, vol. 4, n. 4, pp. 334–339, 1969.

[37] Silverman, L.M., Meadows, H.E., Controllability and observability in time-variable linear systems, *SIAM J. Control and Optimization,* vol. 5, n. 1, pp. 64–73, 1967.

[38] Starkov, K.E., Observability conditions of linear time-varying systems and its computational complexity aspects, *Math. Problems in Engineering*, vol. 8, n. 4-5, pp. 439–449, 2002.

[39] Tzafestas, S.G., Pimenides, T.G., On the decoupling of linear time-varying control systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-21, n. 3, pp. 410–412, 1976.

[40] Weiss, L., Falb, P.L., Doležal's theorem, linear algebra with continuously parametrized elements, and time-varying systems, *Mathematical Systems Theory*, vol. 3, n. 1, pp. 67–75, 1969.

[41] Wang, Q.-G., *Decoupling control*, Springer, 2003.

[42] Wolowich, W.A. , *Linear multivariable systems*, Springer-Verlag, 1974.

[43] Wonham, W.M., *Linear multivariable control : a geometric approach*, Springer-Verlag, 1985.