

# Une approche Multi-modèles des équations de Saint-Venant : une analyse de la stabilité par techniques LMI

Mamadou DIAGNE<sup>1</sup>, Valérie DOS SANTOS<sup>1</sup>, Mickael RODRIGUES<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LAGEP, Université de Lyon, Lyon, F-69003, France ; université Lyon 1, CNRS, UMR 5007, LAGEP, Villeurbanne, F-69622, France ESCPE, Villeurbanne, F-69622.

*diagne@lagep.univ-lyon1.fr, dossantos@lagep.univ-lyon1.fr, rodrigues@lagep.univ-lyon1.fr*

**Résumé**— Ce document traite de la stabilité des EDP non-linéaires de Saint-Venant. L'approche repose sur la conception d'une structure Multi-Modèles qui prend en compte les Linéarisés Tangents Invariants (LTI) du système autour d'un ensemble d'états d'équilibre. Cette méthode permet d'intégrer un ensemble de modèles pour décrire la dynamique de sortie sur toute la plage de variation. Au moyen d'une commande par modèle interne appliquée aux frontières (IMBC), la synthèse d'un gain qui stabilise le procédé est réalisée. Cette synthèse est basée sur la résolution d'une LMI qui découle de l'application du second principe de Lyapunov.

**Mots-clés**— EDP de Saint-Venant, Multi-Modèles, Stabilité, LMI, IMBC.

## I. INTRODUCTION

Dans le monde industriel, les systèmes physiques sont généralement représentés par des modèles non-linéaires. Aujourd'hui, la structure Multi-Modèles est très adaptée à l'analyse de ces derniers parce qu'elle permet de les étudier sous forme d'interpolation de modèles linéaires locaux conçus autour de points de fonctionnement judicieusement choisis : chaque modèle local dit sous-modèle étant un système dynamique LTI (Linéarisé Tangent Invariant) valable autour d'un point d'équilibre. La stratégie des Multi-Modèles est basée sur des fonctions pondération qui assurent la transition entre les différents modèles locaux et dépendent des paramètres du système comme les entrées et les sorties qui varient dans le temps. Elles sont le plus souvent construites en considérant un algorithme qui repose sur la cohérence entre les sorties des modèles locaux et les sorties du système. Cette approche offre ainsi beaucoup de perspectives pour la synthèse de lois de commande, l'observation, et le diagnostic d'un grand nombre d'applications. L'utilisation de cette technique pour l'étude de la stabilité des systèmes décrits par des EDP (Equations aux Dérivées Partielles) non-linéaires est une problématique qui a fait l'objet de peu de travaux. Plus généralement d'autres approches basées sur l'approximation des EDP en dimension finie et le principe du contrôle adaptatif sont mises au point. Dans ce manuscrit nous proposons une analyse de la stabilité des équations de Saint-Venant par les Multi-Modèles à travers une structure de commande par modèle interne appliquée aux frontières. Ce sont des EDP de deux lois de conservation, modélisant l'écoulement de l'eau en surface libre sous les hypothèses dites de Saint-Venant. Cette analyse de la stabilité est ici étudiée au travers de la synthèse d'un gain LMI.

Dans un premier temps, les équations de Saint-Venant sont définies ainsi que le problème de contrôle. Leur linéarisation et leur insertion dans le formalisme LMI sont ensuite décrites. La troisième partie du papier est dédiée à la synthèse d'un gain par LMI qui assure la stabilité. Des simulations confirment la pertinence de cette approche, qui ont été confrontées aux expérimentations préliminaires réalisées sur le micro-canal de Valence, dans la dernière partie.

## II. LE PROBLÈME DE RÉGULATION DU CANAL : UN SYSTÈME DE COMMANDE FRONTIÈRE

On considère la classe suivante de canaux, représentés par la figure (1) pour un bief suivi d'un déversoir, ainsi que par la figure (2) pour un bief avec deux vannes où :

- $Q(x, t)$  est le débit,
- $Z(x, t)$  est la hauteur d'eau du canal,
- $L$  est la longueur du bief,
- $U_0(t)$ ,  $U_L(t)$  sont les ouvertures des vannes.

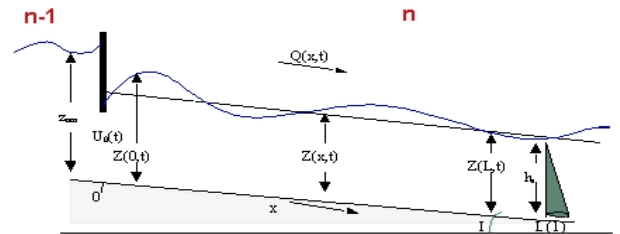


Fig. 1. Schéma du Canal : une vanne

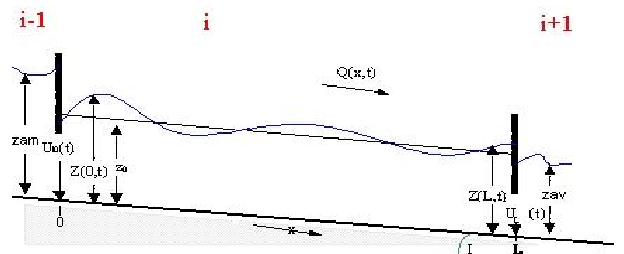


Fig. 2. Schéma du Canal : un bief, deux vannes

Le problème de régulation concerne la stabilisation du débit et/ou de la hauteur d'eau, autour d'un niveau d'équilibre pour un bief, noté  $(z_e(x), q_e(x))$ . Un modèle linéaire à coefficients variables peut donc être utilisé pour décrire les variations dans ce bief. Nous allons rappeler ces modèles.

### A. Le modèle d'un bief

On suppose que le canal a une longueur  $L$  suffisante, de telle sorte qu'on puisse considérer un mouvement uniforme dans la direction latérale. Les EDP non linéaires de Saint Venant qui décrivent un canal rectangulaire sont les suivantes ([9], [13]) :

$$\partial_t Z = -\partial_x \frac{Q}{b}, \quad (1)$$

$$\partial_t Q = -\partial_x \left( \frac{Q^2}{bZ} + \frac{1}{2}gbZ^2 \right) + gbZ(I - J), \quad (2)$$

$$Z(x, 0) = Z_0(x), \quad Q(x, 0) = Q_0(x), \quad (3)$$

où  $I$  est la pente du fond,  $b$  la largeur du canal,  $g$  la constante de gravité.

$J$  la pente de frottement exprimée à partir de la formule de Manning-Strickler et  $R$  est le rayon hydraulique.  $J$  et  $R$  s'expriment selon les expressions suivantes :

$$J = \frac{n^2 Q^2}{(bZ)^2 R^{4/3}}, \quad R = \frac{bZ}{b + 2Z}. \quad (4)$$

Les différentes conditions aux limites nous amènent à considérer deux cas de contrôle possible :

**Cas a** *Contrôle monovariante, cas du déversoir :*

L'équation de la condition en amont du bief ( $x = x_{am}$ ) est donnée par

$$Q(x_{am}, t) = U_{am}(t)\Psi_1(Z(x_{am}, t)), \quad (5)$$

avec  $\Psi_1(Z) = K_i \sqrt{2g(z_{am} - Z)}$ .

La condition en aval du bief ( $x = x_{av}$ ) est l'équation du déversoir (Fig. 1) :

$$Z(x_{av}, t) = \Psi_2(Q(x_{av}, t)), \quad (6)$$

où  $\Psi_2(Q) = \left( \frac{Q^2}{2gK_i^2} \right)^{1/3} + h_s$ .

$z_{am}$  est la hauteur d'eau en amont de la vanne,  $K_i$  est le produit de la largeur du canal avec le coefficient de débit de la vanne  $n^0 i$ ,  $U_{am}(t)$  est la commande amont. Notons que la variable à contrôler est la hauteur en  $x_{av}$ .

*Remarque 1 :* On a dans ce cas  $x_{am} = 0$ ,  $x_{av} = L$ ,  $U_{am} = U_0$  (cf. figure.1).

**Cas b** *Contrôle multivariante :*

L'équation de la condition amont est toujours (5).

Une autre commande apparaît en aval du bief, i.e. en  $x = x_{av}$  (Fig. 2) :

$$\begin{aligned} Q(x_{av}, t) &= U_{av}(t)\Psi_3(Z(x_{av}, t)), \\ \text{où } \Psi_3(Z) &= K_i \sqrt{2g(Z - z_{av})} \end{aligned}$$

et  $U_{av}(t)$  est la commande aval du bief,  $z_{av}$  est la hauteur d'eau en aval de la vanne.

*Remarque 2 :*

- L'amont et l'aval dépendent du bief considéré, il en est de même pour les abscisses et les vannes.
- On se place dans le deuxième cas, i.e. le cas multivariante.

### B. Un modèle de régulation

Un état d'équilibre du système vérifie les équations suivantes :

$$\partial_x q_e = 0$$

$$\partial_x z_e = gbz_e \frac{I + J_e + \frac{4}{3}J_e \frac{1}{1+2z_e/b}}{gbz_e - q_e^2/bz_e^2}, \quad (7)$$

*Remarque 3 :* On se place dans le cas fluvial, on obtient :

$$z_e > \sqrt[3]{q_e^2/(gb^2)}. \quad (8)$$

Notons que  $q_e$  est constant mais que  $z_e$  dépend de la variable d'espace. Le système linéarisé autour d'un niveau d'équilibre, est alors (un niveau d'équilibre différent par bief) :

$$\xi(t) = (z(t) \ q(t))^t$$

$$\partial_t \xi(x, t) = A_1(x)\partial_x \xi(x, t) + A_2(x)\xi(x, t) \quad (9)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x)$$

$$\begin{aligned} q(x_{am}, t) &= u_{am,e} \partial_z \Psi_1(z_e(x_{am}, t)) z(x_{am}, t) \\ &\quad + u_{am}(t) \Psi_1(z_e(x_{am}, t)) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} q(x_{av}, t) &= u_{av,e} \partial_z \Psi_3(z_e(x_{av}, t)) z(x_{av}, t) \\ &\quad + u_{av}(t) \Psi_3(z_e(x_{av}, t)) \end{aligned} \quad (11)$$

où  $u_{am,e}$ ,  $u_{av,e}$  sont les ouvertures de vannes pour les points d'équilibre amont et aval d'un bief et  $u_{am}$ ,  $u_{av}$  sont les variations de ces ouvertures.

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \begin{pmatrix} 0 & -a_1(x) \\ -a_2(x) & -a_3(x) \end{pmatrix}, \\ A_2(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_4(x) & -a_5(x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

avec  $a_1(x) = 1/b$ ,  $a_2(x) = gbz_e(x) - \frac{q_e^2}{bz_e^2(x)}$ ,  $a_3(x) = \frac{2q_e}{bz_e(x)}$ ,  $a_4(x) = gb(I + J_e(x) + \frac{4}{3}J_e(x) \frac{1}{1+2z_e(x)/b})$ ,  $a_5(x) = \frac{2gbJ_e(x)z_e(x)}{q_e}$ .

Le problème de commande est alors le suivant : trouver les variations de  $u_{am}(t)$  à l'extrémité  $x = x_{am}$  et  $u_{av}(t)$  à l'extrémité  $x = x_{av}$  du bief telles que la ou les variable(s) de sorties en un ou des point(s)  $x \in [0, L]$  (variables mesurées), suivent un signal de référence  $r(t)$ . **Ici, on se propose de contrôler la hauteur d'eau en  $x = L$ .** Le signal de référence  $r(t)$  est choisi dans tous les cas, soit constant, soit non persistant (une réponse indicielle stable d'un système non oscillatoire).

Dans ce manuscrit nous adoptons un schéma de contrôle basé sur la régulation par modèle interne appliquée aux frontières ou *IMBC* pour "Internal Model Boundary Control" ([4], [5], [6], [7]) comme l'illustre la figure (3). Cette stratégie de commande intègre le modèle du procédé en temps réel et permet de réguler la hauteur d'eau en tout point du canal par une prise en compte de l'erreur entre le modèle et le système.

- $M_f$  est le modèle de filtrage linéaire et de dimension finie qui sert à filtrer le signal d'erreur  $e(t) = y_s(t) - y(t)$ .
- $M_r$  est le modèle de poursuite qui permet d'imposer une dynamique par rapport à la consigne fixée  $r(t)$ .

Pour contrôler le niveau de l'eau sur une plage de variation définie, nous considérons des modèles établis autour de plusieurs points d'équilibre judicieusement choisis : chaque modèle est une approximation du procédé dans un intervalle restreint de la plage de variation et doit être activé pour concevoir la commande dans cet intervalle. L'idée est de construire un ensemble de modèles définies dans des intervalles successifs pour commander le système sur toute la plage de variation.

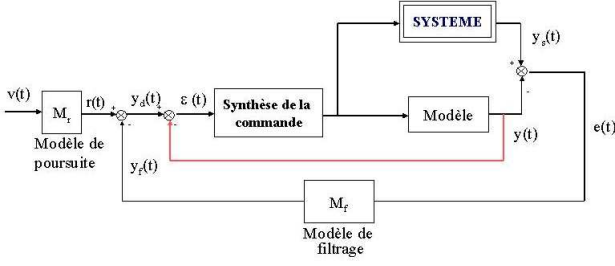


Fig. 3. Structure IMBC : Commande Frontière par Modèle Interne

### C. Une modélisation Multi-Modèles des équations de Saint-Venant

La structure Multi-Modèles ([19]) permet d'atteindre les objectifs de commande parce qu'elle prend en compte différents sous-modèles pouvant être activés sous des modes de fonctionnement particuliers ([14], [15], [16], [17], [18], [19]). La représentation des EDP de Saint-Venant autour de  $N$  points d'équilibres par approche Multi-Modèles est définie par les équations suivantes :

$$\xi(x, t) = (z(x, t) \ q(x, t))^t, \xi \in L^2(0, L) \quad (13)$$

$$\partial_t \xi(x, t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta(t)) A_i(x) \xi(x, t), x \in \Omega, t > 0 \quad (14)$$

$$A_i(x) = A_{1,i}(x) \partial_x + A_{2,i}(x) \quad (15)$$

$$F_b \xi(x, t) = B_b u(t), \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, t > 0 \quad (16)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x)$$

- $A_i(x)$  est l'opérateur correspondant au  $i^{\text{ème}}$  état d'équilibre ou profil de fonctionnement.
- $\mu_i(\zeta(t))$  est la fonction d'activation qui sélectionne le modèle de synthèse de la loi de commande en fonction de la hauteur en sortie du procédé soit  $z_L$ .
- Les domaines de définition des différents opérateurs pour un bief, tel que  $x \in [0, L]$ , sont dans le cas (Figure 2), le contrôle étant multivariable i.e.  $U = \mathbb{R}^2 \ni u$  et :

$$D(A_d) = \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X \right\}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \ker(F_b) &= \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X, \right. \\ &\quad q(0) = u_{0,e} \partial_z \Psi_1(z_e(0)) z(0), \\ &\quad \left. q(L) = u_{L,e} \partial_z \Psi_3(z_e(L)) z(L) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

- $\zeta(t)$  est une fonction qui dépend d'un certain nombre de variables de décision qui sont liées aux variables d'état mesurables et éventuellement à l'entrée [17].

Le système abstrait équivalent de contrôle frontière est obtenu par changement d'opérateurs et de variable, cette approche est due à H.O. Fattorini [8], [21] pour le contrôle comme fonction continue et E. Washburn [22] dans le cas  $L^p$ ,  $p \geq 1$ . On cherche à se ramener sous une forme plus connue du type Kalmanien, i.e. :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (19)$$

Pour cela, considérons le changement de variables suivant :

$$\xi(t) = \varphi(t) + Du(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (20)$$

où  $u(t) \in U$ ,  $D$  est un opérateur borné de  $C^2([0, \infty], U)$  dans  $X$  ( $u \in C^2([0, \infty], U)$ ), tel que :

$$Du \in D(A_d) \quad F_b(Du(t)) = B_b u(t) \quad \forall u(t) \in U$$

*Remarque 4* : L'opérateur  $D$  est appelé **opérateur de distribution** du contrôle frontière [20], [21].

En effet, la commande n'agit que sur le bord du domaine (16). Le fait de répartir son action sur l'état ne doit pas modifier cette propriété, et l'opérateur  $A_d$  n'agit lui que dans le domaine ouvert (14). Il apparaît alors logique que l'opérateur  $D$  s'annule dans le domaine de  $A_d$ , pour n'agir que sur la frontière du domaine. Ainsi, sans perdre en généralité, l'opérateur  $D$  peut être choisi tel que l'opérateur  $A_d$  reste inchangé, i.e.  $Im(D) \subset Ker(A_d)$ .

L'opérateur  $C$  tel que la sortie  $y(t) = C\xi(x, t)$  sélectionne la ou les composante(s) de  $\xi$  à réguler en temps en un ou des point(s)  $x \in [0, L]$ .

Notre travail s'appuie sur ce modèle de type Kalman sur lequel on pourra appliquer une approche Multi-Modèles pour l'étude de la stabilité selon la deuxième théorie de Lyapunov. Il s'agit de considérer un retour de sortie sous l'hypothèse d'une commande intégrale, pour finalement aboutir à la synthèse d'un gain par *LMI* qui stabilise le système.

Le système s'écrit alors (après changement de variable) :

$$\partial_t \varphi(x, t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta(t)) [A_i(x) \varphi(x, t) - D\dot{u}] \quad (21)$$

$$A_i(x) = A_{1,i}(x) \partial_x + A_{2,i}(x)$$

$$\varphi(x, 0) = \xi_0(x) - Du(0) \quad (22)$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons nous intéresser à la synthèse d'une loi de commande faisant appel aux techniques *LMI*.

### III. LA STABILITÉ PAR LES TECHNIQUES *LMI*

Dans cette partie nous nous intéressons à la structure de la boucle fermée (Fig. 3) sous l'hypothèse d'un Feedback de type intégral. D'autre part nous ne considérons pas les modèles de poursuite ( $M_r$ ) et de filtrage ( $M_f$ ). Le choix d'un intégrateur se justifie par le fait que la dérivée de la commande intervient dans l'expression de la boucle ouverte.

#### A. Expression de la boucle fermée pour un Feedback de type intégral

Pour une commande en retour de sortie,  $K$  étant le gain,  $u(x, t) = K \int \varepsilon(x, t) dt$ , on obtient [4] :

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t), \quad (23)$$

$$u(t) = K \int r(t) - y(t) dt, \quad (24)$$

En remplaçant  $y(t) = C\xi(x, t) = C\varphi(x, t) + CDu(t)$  dans l'expression de la commande :

$$u(t) = K \int r(t) - C\varphi(x, t) - CDu(t) dt \quad (25)$$

$$\Rightarrow \dot{u}(t) = (r(t) - C\varphi(x, t) - CDu(t)) \quad (26)$$

et  $\dot{u}$  dans l'équation d'état (21) l'expression de la boucle fermée est décrit par :

$$\partial_t \varphi(x, t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta(t)) [A_i(x) \varphi(x, t) - DK(r(t) - C\varphi(x, t) - CDu(t))] \quad (27)$$

Le développement de cette expression permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(x, t) &= \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta(t)) [(A_i(x) + DKC) \varphi(x, t) \\ &+ DK(CDu(t) - r(t))] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{En posant :} \quad \tilde{K} = DK \quad (29)$$

l'équation (28) s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(x, t) &= \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta(t)) [(A_i(x) + \tilde{K}C) \varphi(x) \\ &+ \tilde{K}(CDu(t) - r(t))]. \end{aligned} \quad (30)$$

Or réguler le canal revient à garantir une convergence de la hauteur d'eau au point  $x_{av}$  vers la référence imposée  $r(t)$  sur une plage de fonctionnement. Nous proposons de déduire les conditions qui assurent cette stabilité en utilisant une fonction quadratique de Lyapunov ([17], [2]).

### B. Etude de la stabilité par fonction quadratique de Lyapunov

$$\text{Soit :} \quad V(\varphi(x, t), t) = \varphi^T(x, t) P \varphi(x, t). \quad (31)$$

La représentation Multi-Modèles des EDP de Saint-Venant défini par l'équation (30) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il existe une matrice  $P > 0$  telle que <sup>1</sup> :

$$\dot{V}(\varphi(x, t), t) < 0, \quad (32)$$

$$\text{donc :} \quad \varphi^T(x, t) P \varphi(x, t) + \varphi^T(x, t) P \dot{\varphi}(x, t) < 0, \quad (33)$$

d'où l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta(t)) (A_i(x) + \tilde{K}C) \varphi(x) \right. \\ &+ \tilde{K}(CDu(t) - r(t)) \left. \right]^T P \varphi(x, t) \\ &+ \varphi^T(x, t) P \left[ \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta(t)) (A_i(x) + \tilde{K}C) \varphi(x) \right. \\ &+ \tilde{K}(CDu(t) - r(t)) \left. \right] < 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Le développement de cette inégalité conduit à une inéquation, pour chaque  $i$ , de la forme :

$$\begin{aligned} &\varphi^T(x, t) [A_i(x) + \tilde{K}C]^T P \varphi(x, t) \\ &+ \varphi^T(x, t) P [A_i(x) + \tilde{K}C] \varphi(x, t) \\ &+ [\tilde{K}(CDu(t) - r(t))]^T P \varphi(x, t) \\ &+ \varphi^T(x, t) P [\tilde{K}(CDu(t) - r(t))] < 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Dans l'inégalité (35) qui définit la condition de stabilité du système global intervient le paramètre de commande  $u$ . Or la stabilité en boucle fermée locale garantit localement la convergence et donc pour toute référence  $r(t)$  il existe un  $u$  tel que  $CDu(t) - r(t) \rightarrow 0$ , les majorations suivantes sont déduites :

$$[CDu(t) - r(t)] < C\varphi(x, t) \quad (36)$$

$$[CDu(t) - r(t)]^T < \varphi^T(x, t) C^T \quad (37)$$

Les inégalités (36) et (37) appliquées à l'inégalité (35), on peut alors déduire :

$$\begin{aligned} \varphi^T(x, t) &[A_i(x) + \tilde{K}C]^T P \varphi(x, t) + \varphi^T(x, t) P [A_i(x) \\ &+ \tilde{K}C] \varphi(x, t) + \varphi^T(x, t) (\tilde{K}C)^T P \varphi(x, t) \\ &+ \varphi^T(x, t) P \tilde{K}C \varphi(x, t) < 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où :} \quad &\varphi^T(x, t) [A_i(x) + 2\tilde{K}C]^T P \varphi(x, t) \\ &+ \varphi^T(x, t) P [A_i(x) + 2\tilde{K}C] \varphi(x, t) < 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Les  $A_i(x)$  sont les opérateurs du modèle linéarisé tangent des équations de Saint-Venant au  $i^{\text{ème}}$  point de fonctionnement. La stabilité du système suppose que pour tout point d'équilibre l'opérateur correspondant à un spectre défini dans le demi-plan gauche : la stabilité du Multi-Modèles implique celle de tous les sous-modèles. Pour calculer le gain  $\tilde{K}$  par LMI :  $\tilde{K}$  est le gain  $K$  associé à la distribution  $D$  (29). Pour le calcul de ce gain, les opérateurs  $A_i(x)$  ont été discrétisés par la méthode de Chang and Cooper afin d'obtenir les matrices  $\tilde{A}_i$  ([1], [11]). Nous pouvons ainsi écrire :

$$\begin{aligned} &\varphi^T(x, t) [\tilde{A}_i + 2\tilde{K}C]^T P \varphi(x, t) \\ &+ \varphi^T(x, t) P [\tilde{A}_i + 2\tilde{K}C] \varphi(x, t) < 0 \end{aligned} \quad (40)$$

La LMI en  $P$  et  $W$  s'écrit alors sous la forme :

$$\tilde{A}_i^T P + P \tilde{A}_i + WC + C^T W^T < 0, \quad (41)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{K} = \frac{1}{2} P^{-1} W \quad (42)$$

Le gain  $\tilde{K}$  a été implémenté dans le modèle de simulations dans le but de vérifier la stabilité du système. Les résultats ont été obtenus pour une configuration mono-bief avec deux vannes et notre objectif est de comparer les courbes avec celles obtenues expérimentalement dans les travaux [4].

## IV. SIMULATIONS ET RÉSULTATS

### A. Configuration et données du canal

Pour cette étude nous considérons l'ensemble des paramètres du canal expérimental de Valence (Fig.4).

Les données de ce canal sont :

- $L = 64.5dm$  est la longueur du canal,
- $l = 1dm$  est la largeur du canal,
- $N = 10$  est le nombre de points de discrétisation,
- $z_L$  est la hauteur d'eau à réguler,
- $K_1$  et  $K_2$  sont les coefficients d'ouverture des vannes amont et aval,
- $U_0(t)$ ,  $U_L(t)$  sont les ouvertures des vannes.

Dans une configuration monobief à deux vannes, la régulation de la hauteur d'eau en  $x = L$  soit  $z_L$ , se fait en contrôlant des ouvertures de vannes adéquates en amont et

<sup>1</sup>On pose pour la suite que  $\partial_t \psi = \dot{\psi}$  pour toute fonction  $\psi$ .

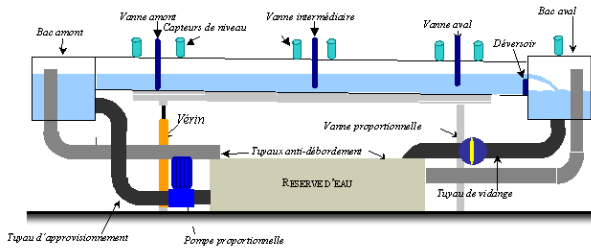


Fig. 4. Maquette du canal de valence

en aval du bief soit  $U_0(t)$  et  $U_L(t)$  : c'est une commande multi-variables (cf. figure (2)).

Les profils d'équilibres ont été choisis de telle sorte que la commande calculée à partir des modèles locaux puisse être performante sur toute la plage de variation de la hauteur d'eau [4]. Sachant que nous avons pu vérifier expérimentalement qu'un modèle local est valable à  $\pm 20\%$  autour d'un profil d'équilibre. Pour assigner des références comprises entre  $0.4dm$  et  $2dm$ , les points de fonctionnement sont les suivants en  $x = 0$  :

en $x = 0$	$z_{e1}$	$z_{e2}$	$z_{e3}$	$z_{e4}$	$z_{e5}$
en $dm$	0.6216	0.7695	0.9948	1.3558	1.8053

Dans cette application la fonction d'activation  $\mu_i(\zeta(t))$  vaut 1 si la hauteur en sortie appartient à l'intervalle de validité du modèle et 0 dans le cas contraire, pour chaque point d'équilibre. Le paramètre  $\zeta(t)$  dépend exclusivement de la sortie qui est la seule variable de décision dans ce cas de figure.

### B. Résultats

Ces résultats sont obtenus au moyen d'une commande par modèle interne en Multi-Modèles avec le gain  $LMI$  calculé précédemment. La figure (5) montre que la sortie converge vers la référence même si cette dernière varie fortement (variation  $> 100\%$ ). La référence suit une dynamique assez lente et on peut bien voir que la convergence de la sortie est presque instantanée.

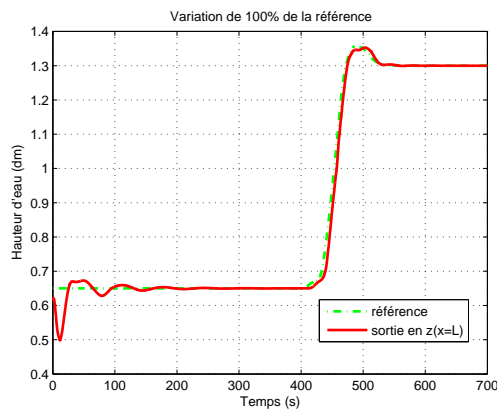


Fig. 5. Variation de référence de 100%

Les courbes décrivant les ouvertures de vannes en amont et en aval du bief présente un comportement quasi-similaire. Cette dynamique est illustrée par la figure (6).

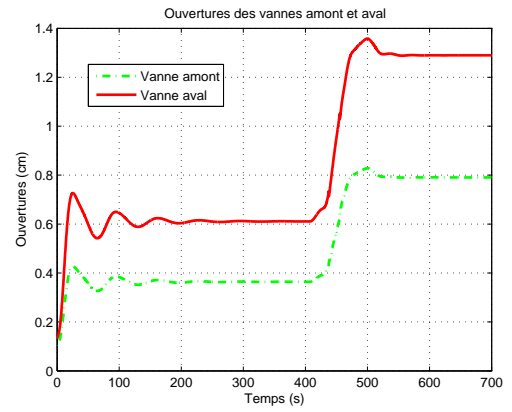


Fig. 6. Ouvertures de vannes

La convergence de la sortie vers la référence est assurée pour une baisse ou une augmentation de la hauteur d'eau dans le cadre des simulations effectuées. La figure (7) représente l'évolution du système pour une dynamique de référence plus variée. Le niveau de référence est passé :

- de  $1dm$  à  $1.92dm$  sur un temps de  $120s$ ,
- puis de  $1.92dm$  à  $0.69dm$  sur un temps de  $300s$
- et enfin de  $0.69dm$  à  $1dm$  sur un temps de  $120s$ .

Ces résultats permettent d'observer la stabilité du système quelque soit la référence a priori.

*Remarque 5 :* Le niveau de référence au canal est limitée par les contraintes physiques (le minimum est restreint par les hauteurs dans le bief aval et le maximum par la hauteur de l'ouvrage) et la condition de fluvialité qui a été émise initialement pour le modèle (8). Dans ces simulations la hauteur critique admise sous la contrainte de fluvialité est :  $z_{ec} = 0.369dm$ .

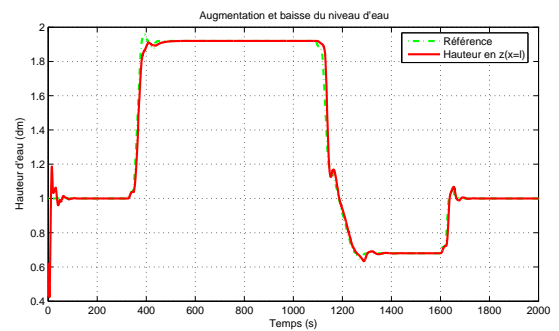


Fig. 7. Forte montée et baisse du niveau d'eau

Cette étude part des travaux de Rodrigues [17] et de Dos Santos [4]. Des expérimentations ont été réalisées sur le canal de Valence (Fig.4) avec une approche Multi-Modèles de façon empirique comme l'illustre les figures (8) et (9). Nous avons simulé les mêmes trajectoires de référence avec le gain  $LMI$  calculé par notre approche, les résultats comparatifs sont donnés par la Figure (8). Pour plus de visibilité, un retard a été imposé entre les courbes expérimentales [4] et les simulations  $LMI$ . En résumé, la figure (8) est une comparaison des résultats obtenus à travers un PI-IMBC en expérimental et des dynamiques pour un gain synthétisé par les techniques  $LMI$ . Les résultats prouvent que le

système présentent moins de dépassements et convergent plus rapidement en *LMI* pour une dynamique de référence quasi-identique à celle du PI-IMBC.

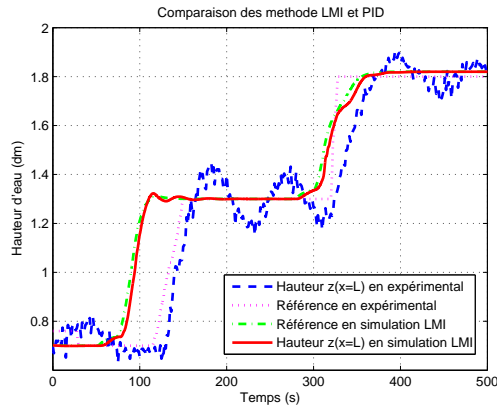


Fig. 8. Comparaison LMI et PID

Les ouvertures de vannes pour les deux cas de figure (en expérimental et en simulation)(Fig.9) ont un comportement assez similaire.

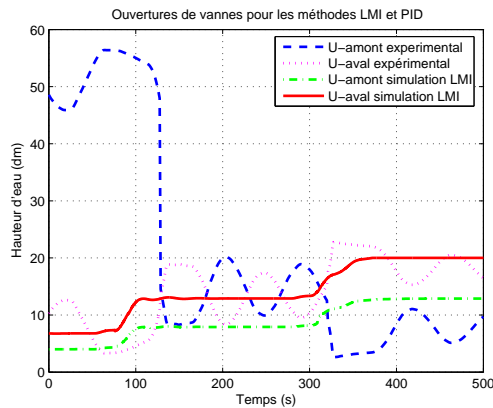


Fig. 9. Comparaison LMI et PID

## V. CONCLUSION

A travers ce papier nous avons proposé une méthode de synthèse de Gain LMI pour le contrôle des EDP de Saint-Venant. L'approche est basée sur une représentation Multi-Modèles de l'écoulement dans un canal et sur l'étude de la stabilité par une fonction quadratique de Lyapunov. Un changement de variable permet de contrôler le système en structure IMBC avec une commande par retour de sortie. Ce travail est le prolongement des expérimentations en Multi-Modèles réalisée sur le canal de valence sans un calcul de gain au préalable [4]. La comparaison des résultats obtenus en simulation et en expérimental montre que l'approche Multi-Modèles pourrait être utilisée pour la régulation des canaux.

A court terme, il serait intéressant d'implémenter les gains obtenus sur le canal de Valence et dans le long terme une étude plus approfondie prenant en compte les perturbations serait d'une grande utilité de nos jours vus les problèmes causés par les débordements dans les aménagement en eau.

## RÉFÉRENCES

- [1] Buet C., Cordier S., Dos Santos V., A conservative and entropy scheme for a simplified model of granular media, *Transport theory and statistical, Physics*, Volume 33, issue 2, Avril 2004. Hyke 2003-021.
- [2] M. Chadli, Commande et stabilité des systèmes décrits par des Multi- Modèles thèse l'Institut National Polytechnique de Lorraine, cf 30-44, 2002 .
- [3] Dos Santos V., Touré Y., On the Regulation of Irrigation Canals : Internal Model and Boundary Control Approach, Second International Conference on Signals, Decision and Information Technology (SSD'03), IEEE, Tunisie 26-28 Mars 2003, n° SSD-03-A-MD-50.
- [4] Dos Santos V., Contrôle Frontière par Modèle Interne de Systèmes Hyperboliques : Application à la Régulation de Canaux d'Irrigation, thèse de l'université d'Orléans, 2004.
- [5] Dos Santos V., Touré Y., Cisló N., Régulation de Canaux d'irrigation : Approche par Contrôle Frontière Multivariable, et Modèle Interne d'EDP, Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2004), Conférence IEEE, Tunisie, novembre, 2004.
- [6] Dos Santos V., Touré Y., Mendes E., Courtial E. : Multivariable Boundary Control approach by internal model, applied to irrigations canals regulation 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, from July 4 to July 8, 2005.
- [7] Dos Santos V., Prieur C., Boundary control of open channels with numerical and experimental validations, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Volume 16, pages 1252-1264, Nov 2008.
- [8] Fattorini H.O., Boundary Control Systems, *SIAM J. Control*, 6, 3, 1968.
- [9] Georges & al. (2002) Automatique pour la Gestion des Ressources en Eau, *IC2, Systèmes automatisés, Hermès*.
- [10] Litrico X., Baume J.P., Experimental validation of a methodology to control irrigation canals based on Saint-Venant equations, *Control Engineering Practice*, Vol. 13/11, pp. 1425-1437, 2004.
- [11] Le Pourhiet A., Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles. *Collection la cheveche*, CEPADUES EDITION, 1988.
- [12] Malaterre P.O., Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation, PhD Thesis, CEMAGREF, 1994.
- [13] Malaterre P.O. (2003) Le Contrôle automatique des Canaux d'Irrigation : Etat de l'Art et Perspectives, *Colloque Automatique et Agronomie, Montpellier*.
- [14] Orjuela R., Marx B., Ragot J. et Maquin D. : Estimation d'état des systèmes non linéaires par une approche Multi-Modèles découplé, 2èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS JD-JN-MACS, 9-11 Juillet, Reims, France, 2007.
- [15] Orjuela R., Marx B., Ragot J. et Maquin D. : Conception d'un observateur PI pour un Multi-Modèles découplé, STA'2007 - SSI, pages 1 à 10, 2007.
- [16] Ragot J. et Maquin D. : Estimation d'état et diagnostic de systèmes décrits par un Multi-Modèles publié dans "2èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS, Reims, France, 2007.
- [17] Rodrigues M., Diagnostic et Commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des Multi-Modèles linéaires, thèse de l'université Henri Poincaré, Nancy 1, p30-p32, 2005.
- [18] Rodrigues M., Theilliol R. and Sauter D. : Design of an Active Fault Tolerant Control for Nonlinear Systems described by a Multi-Model Representation, Author manuscript, published in "The 20th IEEE International Symposium on Intelligent Control, ISIC'05 and the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'05, Limassol : Chypre, 2005.
- [19] Rodrigues M., Theilliol D., Adam-Medina M. and Sauter D., A Fault Detection and Isolation Scheme for Industrial Systems based on Multiple Operating Models, Author manuscript, published in *Control Engineering Practice* 16, 2 , p.p. 225-239, 2008.
- [20] Sakawa Y. and Matsushita T., Feedback Stabilization of a Class of Distributed Systems and Construction of a State Estimator, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-20, 6, 1975.
- [21] Touré Y. and Rudolph J., Controller Design for Distributed Parameter Systems, *Encyclopedia of LIFE Support on Control Systems, Robotics and Automation*, I, 933-979, 2002.
- [22] Don Washburn, A Bound on the Boundary Input Map for Parabolic Equations with Application to Time Optimal Control, *SIAM J. Control and Optimization*, 17, 5, 652-671, 1979.