

Analyse de performances et synthèse d'un contrôleur par retour de sortie dynamique pour les systèmes à commutation à temps discret.

Julie MELIN, Marc JUNGERS, Jamal DAAFOUZ et Claude IUNG

Centre de Recherche en Automatique de Nancy,
UMR 7039 – Nancy-Université, CNRS

2, Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandœuvre, France.

[Julie.Melin; Jamal.Daafouz; Claude.Iungj@ensem.inpl-nancy.fr Marc.Jungers@cran.uhp-nancy.fr

Résumé— La stabilité des systèmes linéaires à commutation en temps discret est un sujet qui a déjà été largement abordé dans la littérature. Cependant, l'étude de la stabilité de ces systèmes en tenant compte de critères de performances est moins répandue à l'heure actuelle. Cet article s'intéresse à la résolution de deux problèmes : le premier étant l'analyse de stabilité et de performance d'un ensemble système-contrôleur, le second étant la synthèse d'un contrôleur stabilisant qui minimise le coût garanti des performances. Une application aux systèmes contrôlés en réseaux est ensuite donnée en exemple.

Mots-clés— Systèmes à commutation, LMI, Retour de sortie dynamique, Systèmes contrôlés en réseaux.

I. INTRODUCTION

Les systèmes à commutation constituent un cas particulier des systèmes dynamiques hybrides. Ils sont composés d'une famille de systèmes et d'une loi de commutation qui détermine quel mode est activé à chaque instant. Ce type de système représente une large gamme de systèmes concrets dans de nombreux domaines tels que l'industrie automobile ou aéronautique.

Les outils traditionnels pour étudier la stabilité des systèmes ne sont pas adaptés au cas des systèmes à commutations. En effet, il peut être possible de déstabiliser un ensemble de systèmes stables en utilisant une loi de commutation malencontreuse. Par conséquent, l'étude de la stabilité des systèmes commutés a fortement intéressé la communauté scientifique [3, 6, 10, 14]. Ainsi, des outils plus appropriés à l'analyse de la stabilité de ce type de systèmes ont été développés tels que les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres de commutation [5, 7]. Des outils mathématiques peuvent être utilisés pour réussir à déterminer ces fonctions en posant, par exemple, le problème sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) [4].

Si l'étude de la stabilité de tels systèmes a reçu une grande attention, l'analyse de la stabilité en tenant compte de l'aspect performance est plus difficile. Néanmoins, des études ont été réalisées sur le sujet concernant des performances de type H_2 [8] ou H_∞ [2] (dans l'optique des systèmes contrôlés en réseaux). Le but de cet article est d'améliorer les outils existants pour la stabilité des systèmes à commutation afin d'inclure une analyse des performances adaptée au formalisme linéaire quadratique. Les perfor-

mances étudiées sont présentées sous la forme d'un critère quadratique et d'une dynamique linéaire pour chaque mode. A chaque séquence de lois de commutation, une valeur du coût est associée. Malheureusement celui-ci est difficile à évaluer. Ainsi, l'analyse des performances conduit à la détermination d'une borne supérieure du coût garanti. De plus, pour des systèmes réels, en général, tous les états ne sont pas disponibles et par conséquent, la loi de commande doit être réalisée en utilisant uniquement les informations des sorties. Parmi toutes les lois de commande par retour de sortie, cet article s'intéresse à un contrôleur par retour de sortie dynamique pour les systèmes à commutation en temps discret. Une analyse de la stabilité du système en boucle fermée et du niveau des performances quelque soit la loi de commutation est tout d'abord présentée. Un autre problème propose la conception d'un contrôleur par retour de sortie dynamique ainsi que d'une borne supérieure du coût. Les résultats théoriques obtenus seront ensuite appliqués à une illustration pratique que sont les Systèmes Contrôlés en Réseaux (SCR).

Cet article est organisé de la manière suivante : un système linéaire à commutation en temps discret, le problème de dégradation de performances et le contrôleur étudié sont présentés en section II. La section III propose l'analyse de stabilité et du niveau de performances d'un ensemble donné système-contrôleur. La conception d'un contrôleur par retour de sortie dynamique et une borne supérieure de la dégradation de performances sont données en section IV. La section V présente une application des résultats aux SCR. Enfin, la section VI conclut le papier.

Notation. $(.)^T$ et \star représentent respectivement la transposée et le bloc symétrique dans une matrice symétrique. $\text{diag}\{A, B\}$ représente la matrice diagonale composée de A et B . Les matrices I_n et $0_{n \times m}$ sont respectivement la matrice identité de taille n et la matrice nulle de taille $n \times m$. Les écritures abrégées $0_n = 0_{n \times n}$ et $I_{n \times m} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix}$ seront également utilisées.

II. FORMULATION DU PROBLÈME

Le but de cet article est double. D'une part, des outils sont fournis pour analyser la stabilité d'un système à commutation prédéfini, contrôlé par un régulateur par retour de sortie dynamique et pour caractériser, de ce fait,

le niveau de dégradations de performances. D'autre part, un problème d'optimisation est proposé pour réaliser un contrôleur par retour de sortie dynamique qui stabilise le système à commutation et en même temps minimise le coût garanti des performances. Dans cet article, le système étudié est un système à commutation linéaire en temps discret avec deux lois de commutation. Le choix de travailler avec deux paramètres de commutation est justifié par l'interprétation physique des deux lois de commutation. C'est le cas, par exemple, de l'illustration proposée à la Section V, concernant les SCR. Cette manière de formuler le problème a d'ailleurs été utilisée dans [18]. Néanmoins, même si la représentation avec une seule loi de commutation est possible, en considérant la seconde comme non pertinente ou constante, ou en reformulant les lois de commutation grâce à une renumérotation des modes, on conservera, par esprit de clarté, l'approche décrite utilisant deux lois de commutation.

Considérons le système suivant :

$$x_{k+1} = A_{(\alpha(k), \lambda(k))} x_k + B_{(\alpha(k), \lambda(k))} u_k, \quad (1)$$

$$z_k = C_{(\alpha(k), \lambda(k))} x_k \quad (2)$$

où, à chaque instant $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{r_u}$ et $z_k \in \mathbb{R}^{m_z}$ sont respectivement l'état, la commande appliquée au système et la sortie. Les deux paramètres de commutation sont $\alpha(k) \in \Omega$ et $\lambda(k) \in \Lambda$ où $\Omega = \{1, \dots, N_\alpha\}$, $\Lambda = \{1, \dots, N_\lambda\}$, avec $N_\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $N_\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Bien que différentes approches intégrant l'aspect performance existent déjà, avec des critères de type H_2 dans [2] pour les SCR ou de type H_∞ dans [8], nous faisons le choix d'un critère de type quadratique qui est très courant dans les applications pratiques. Ce critère est défini par :

$$J(\{\alpha(k)\}, \{\lambda(k)\}, x_0, \{u_k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (z_k^T z_k + u_k^T R u_k). \quad (3)$$

La matrice de pondération R de la commande est symétrique et définie positive. Le critère est donc convexe par rapport à la commande et est implicitement fonction de la séquence des paramètres de commutation.

On souhaite connaître le niveau de performance résultant des commutations. Comme à chaque séquence de commutation, la valeur du critère correspondant est différente, on s'intéresse au pire cas pour toute séquence de commutation. Le critère

$$\hat{J}(\{u_k\}, x_0) = \sup_{\substack{\{\lambda(k) \in \Lambda\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \{\alpha(k) \in \Omega\}_{k \in \mathbb{N}}} J(\{\alpha(k)\}, \{\lambda(k)\}, x_0, \{u_k\}) \quad (4)$$

correspond au coût maximale pour toute séquence possible de paramètres de commutation et pour une séquence de commande donnée. Comme il n'est pas possible d'obtenir cette valeur exacte, on s'attachera à en donner le majorant le plus petit possible.

L'objectif de cet article est de proposer une solution aux deux problèmes suivants :

Problème 1 : (Analyse) Pour un ensemble système-contrôleur donné, déterminer si celui-ci est stable et donner son niveau de performance par une borne supérieure la plus petite possible. \square

Problème 2 : (Synthèse) Pour un système donné, déterminer le contrôleur par retour de sortie dynamique stabilisant le système et minimisant le coût garanti des performances. \square

Tout d'abord, écrivons ce contrôleur pour le système à commutation et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\zeta_{k+1} = A_{(\alpha(k), \lambda(k))}^K \zeta_k + B_{(\alpha(k), \lambda(k))}^K z_k, \quad (5)$$

$$u_k = C_{(\alpha(k), \lambda(k))}^K \zeta_k + D_{(\alpha(k), \lambda(k))}^K z_k. \quad (6)$$

avec les matrices du contrôleur, linéaires en les paramètres et de dimensions appropriées, avec $i = \alpha(k)$ et $j = \lambda(k)$:

$$[A^K; B^K; C^K; D^K]_{(\alpha(k), \lambda(k))} = [A_{ij}^K; B_{ij}^K; C_{ij}^K; D_{ij}^K] \quad (7)$$

et où $\zeta_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état du contrôleur. Pour $k < 0$, nous faisons l'hypothèse que $\zeta_k = 0$. La valeur initiale ζ_0 peut être choisie arbitrairement.

L'expression en boucle fermée du système avec le contrôleur (5) est

$$x_{cl, k+1} = \mathbb{A}_{(\alpha(k), \lambda(k))} x_{cl, k} \quad \text{avec} \quad x_{cl, k} = \begin{bmatrix} x_k \\ \zeta_k \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbb{A}_{(\alpha(k), \lambda(k))} = \mathbb{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}; \quad (i, j) = (\alpha(k), \lambda(k)) \quad (9)$$

et

$$\mathbb{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} + B_{ij} D_{ij}^K C_{ij} & B_{ij} C_{ij}^K \\ B_{ij}^K C_{ij} & A_{ij}^K \end{bmatrix}. \quad (10)$$

L'expression du critère J peut être réécrite en prenant en compte l'état augmenté $x_{cl, k}$ et par conséquent, elle va dépendre des séquences de paramètres de commutation $\{\alpha(k)\}$ et $\{\lambda(k)\}$, de la condition initiale x_0 et de l'état initial ζ_0 du contrôleur (5)

$$J(\{\alpha(k)\}, \{\lambda(k)\}, x_0, \zeta_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{T}_{(\alpha(k), \lambda(k))}(k), \quad (11)$$

avec

$$\mathbb{T}_{(\alpha(k), \lambda(k))}(k) = (x_{cl, k}^T \mathbb{Q}_{(\alpha(k), \lambda(k))}^T \mathbb{Q}_{(\alpha(k), \lambda(k))} x_{cl, k})$$

et

$$\mathbb{Q}_{ij} = \begin{bmatrix} R^{1/2} D_{ij}^K C_{ij} & R^{1/2} C_{ij}^K \\ C_{ij} & 0_{m_z \times n_x} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Le coût garanti (4) pour toute séquence possible des paramètres de commutation et un contrôleur donné s'écrit comme une fonction de la condition initiale x_0 et de l'état initial du contrôleur ζ_0

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) = \sup_{\substack{\{\lambda(k); \lambda(k) \in \Lambda \\ \{\alpha(k); \alpha(k) \in \Omega\}}} J(\{\alpha(k)\}, \{\lambda(k)\}, x_0, \zeta_0). \quad (13)$$

III. ANALYSE DE LA STABILITÉ ET DE LA DÉGRADATION DE PERFORMANCES

Considérons donné le système défini par (1) et un contrôleur défini par (5). Par conséquent, les matrices \mathbb{A}_{ij} et \mathbb{Q}_{ij} sont connues puisqu'elles sont composées des matrices du système et de celles du contrôleur. La proposition suivante donne une solution du problème 1.

Proposition 1 : La borne supérieure de la dégradation maximale est solution (si elle existe) du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} & \min \beta_1 \\ & \mathbb{G}_{ij}, \mathbb{S}_{ij}, \beta_1 \\ & \text{sous les contraintes (14) et (15)} \end{aligned}$$

avec $\forall i \in \Omega, \forall j \in \Lambda, \mathbb{G}_{ij} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}, \mathbb{S}_{ij} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ des matrices symétriques, et β_1 un scalaire et $\forall (i, l) \in \Omega^2, \forall (j, p) \in \Lambda^2$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{G}_{ij} + \mathbb{G}_{ij}^T - \mathbb{S}_{ij} & \star & \star \\ \mathbb{A}_{ij} \mathbb{G}_{ij} & \mathbb{S}_{lp} & \star \\ \mathbb{Q}_{ij} \mathbb{G}_{ij} & 0_{(r_u+m_z) \times 2n_x} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_t, \quad (14)$$

où $t = 4n_x + r_u + m_z$ et

$$\begin{bmatrix} \beta_1 I_{2n_x} & \star \\ I_{2n_x} & \mathbb{S}_{ij} \end{bmatrix} > 0_{4n_x}. \quad (15)$$

Alors la borne supérieure est donnée par

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) \leq \beta_1 \left(\|x_0\|_2^2 + \|\zeta_0\|_2^2 \right). \quad (16)$$

Preuve 1 : Quand l'inégalité (14) est vérifiée, on a $\mathbb{G}_{ij} + \mathbb{G}_{ij}^T - \mathbb{S}_{ij} > 0$ et $\mathbb{S}_{ij} > 0$, ce qui implique que \mathbb{G}_{ij} est de rang plein. En développant $(\mathbb{S}_{ij} - \mathbb{G}_{ij})^T \mathbb{S}_{ij}^{-1} (\mathbb{S}_{ij} - \mathbb{G}_{ij})$, on a $\mathbb{G}_{ij}^T \mathbb{S}_{ij}^{-1} \mathbb{G}_{ij} \geq \mathbb{G}_{ij} + \mathbb{G}_{ij}^T - \mathbb{S}_{ij} > 0$. Alors l'inégalité (14) conduit à

$$\begin{bmatrix} \mathbb{G}_{ij}^T \mathbb{S}_{ij}^{-1} \mathbb{G}_{ij} & \star & \star \\ \mathbb{A}_{ij} \mathbb{G}_{ij} & \mathbb{S}_{lp} & \star \\ \mathbb{Q}_{ij} \mathbb{G}_{ij} & 0_{(r_u+m_z) \times 2n_x} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_t. \quad (17)$$

En pré-multipliant cette inégalité par $\text{diag}\{\mathbb{G}_{ij}^{-T}, \mathbb{S}_{lp}^{-1}, I_{r_u+m_z}\}$ et en la post-multipliant par sa transposée, il vient avec le changement de variable $\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{S}_{ij}^{-1}$

$$\mathbb{L}_{ijlp} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{ij}^{-1} & \star & \star \\ \mathbb{P}_{lp}^{-1} \mathbb{A}_{ij} & \mathbb{P}_{lp}^{-1} & \star \\ \mathbb{Q}_{ij} & 0_{(r_u+m_z) \times 2n} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_t. \quad (18)$$

Sans aucune hypothèse sur l'évolution des lois de commutation entre deux instants consécutifs, on peut écrire en posant $(i, j) = (\alpha(k), \lambda(k))$ et $(l, p) = (\alpha(k+1), \lambda(k+1))$:

$$\mathbb{L}_{ijlp} = \mathbb{W}_{(\alpha(k), \alpha(k+1), \lambda(k), \lambda(k+1))} > 0_t \quad (19)$$

dont l'expression de $\mathbb{W}_{(\alpha(k), \alpha(k+1), \lambda(k), \lambda(k+1))}$ est donnée par l'équation (27) et où $\mathbf{P}_{(\alpha(k), \lambda(k))}$ s'écrit

$$\mathbf{P}_{(\alpha(k), \lambda(k))} = \mathbb{P}_{ij}.$$

En utilisant judicieusement deux compléments de Schur (pour plus de détails voir [4]), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_{(\alpha(k), \lambda(k))}^T \mathbf{P}_{(\alpha(k+1), \lambda(k+1))} \mathbb{A}_{(\alpha(k), \lambda(k))} \\ & - \mathbf{P}_{(\alpha(k), \lambda(k))} < -\mathbb{Q}_{(\alpha(k), \lambda(k))}^T \mathbb{Q}_{(\alpha(k), \lambda(k))}. \end{aligned} \quad (20)$$

On considère une fonction de Lyapunov qui dépend des paramètres. Cette technique a été proposée dans [6, 10]. Une

fonction de Lyapunov dépendante des deux paramètres de commutation est définie comme suit :

$$V(x_{cl,k}, \alpha(k), \lambda(k)) = x_{cl,k}^T \mathbf{P}_{(\alpha(k), \lambda(k))} x_{cl,k}.$$

En pré-multipliant l'inégalité (20) par $x_{cl,k}^T$ et en la post-multipliant par $x_{cl,k}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(\alpha(k), \lambda(k))} & \leq V(x_{cl,k}, \alpha(k), \lambda(k)) \\ & - V(x_{cl,k+1}, \alpha(k+1), \lambda(k+1)). \end{aligned} \quad (21)$$

En sommant toutes ces dernières inégalités on obtient

$$\begin{aligned} \hat{J}(x_0, \zeta_0) & = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{T}_{(\alpha(k), \lambda(k))} \\ & \leq V(x_{cl,0}, \alpha(0), \lambda(0)) = x_{cl,0}^T \mathbf{P}_{(\alpha(0), \lambda(0))} x_{cl,0}, \end{aligned} \quad (22)$$

parce que le système est stable. Comme l'état initial augmenté est $x_{cl,0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix}$, l'inégalité (22) peut s'écrire

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) \leq \begin{bmatrix} x_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix}^T \mathbf{P}_{(\alpha(0), \lambda(0))} \begin{bmatrix} x_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Pour s'affranchir de la direction des vecteurs x_0 et ζ_0 , on utilise un complément de Schur pour la LMI (15). Il vient alors $\mathbf{P}_{(\alpha(0), \lambda(0))} < \beta_1 I_{2n_x}$. En pré-multipliant la dernière inégalité par $x_{cl,0}^T$ et en la post-multipliant pas sa transposée, il s'en suit

$$x_{cl,0}^T \mathbf{P}_{(\alpha(0), \lambda(0))} x_{cl,0} < \beta_1 x_{cl,0}^T x_{cl,0}. \quad (24)$$

Ce qui conduit, pour tout $\alpha(0) \in \Omega$ et tout $\lambda(0) \in \Lambda$, à l'inégalité

$$x_{cl,0}^T \mathbf{P}_{(\alpha(0), \lambda(0))} x_{cl,0} < \beta_1 \left(\|x_0\|_2^2 + \|\zeta_0\|_2^2 \right). \quad \blacksquare \quad (25)$$

La précédente proposition donne une analyse de la stabilité du système considéré en boucle fermée mais également de la dégradation des performances en permettant de déterminer une borne supérieure de la dégradation maximale.

IV. CONCEPTION D'UN CONTRÔLEUR PAR RETOUR DE SORTIE DYNAMIQUE

Cette partie s'attache à la synthèse d'un contrôleur par retour de sortie dynamique. La proposition suivante permet de déterminer les matrices du contrôleur afin de stabiliser le système et d'obtenir une borne supérieure de la dégradation maximale. Les variables du problème d'optimisation sont désormais écrites en caractères gras pour plus de clarté.

Proposition 2 : Soit un système défini par (1). Supposons l'existence des matrices $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et pour $i \in \Lambda$ et $j \in \Omega$, l'existence des matrices $\hat{\mathbf{A}}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\hat{\mathbf{B}}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_x \times m_z}$, $\hat{\mathbf{C}}_{ij} \in \mathbb{R}^{r_u \times n_x}$, $\hat{\mathbf{D}}_{ij} \in \mathbb{R}^{r_u \times m_z}$, des matrices symétriques $\hat{\mathbf{S}}_{ij} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ et un scalaire β_1 tels que les LMIs suivantes soient vérifiées

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 - \hat{\mathbf{S}}_{ij} & \star & \star \\ \mathcal{X}_{2;ij} & \hat{\mathbf{S}}_{lp} & \star \\ \mathcal{X}_{3;ij} & 0_{(r_u+m_z) \times 2n_x} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_t, \quad (26)$$

$$\mathbb{W}_{(\alpha(k), \alpha(k+1), \lambda(k), \lambda(k+1))} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(\alpha(k), \lambda(k))} & \star & \star \\ \mathbf{P}_{(\alpha(k+1), \lambda(k+1))} \hat{\mathbf{A}}_{(\alpha(k), \lambda(k))} & \mathbf{P}_{(\alpha(k+1), \lambda(k+1))} & \star \\ \mathbf{Q}_{(\alpha(k), \lambda(k))} & \mathbf{0}_{(r_u+m_z) \times 2n_x} & \mathbf{I}_{r_u+m_z} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}^T > \mathbf{0}_{n_x} \quad (28)$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \mathbf{I}_{2n_x} & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0}_{n_x} \end{bmatrix} \\ \star & \hat{\mathbf{S}}_{ij} \end{bmatrix} > \mathbf{0}_{4n_x} \quad (29)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T & \mathbf{I}_{n_x} + \mathbf{T} \\ \mathbf{I}_{n_x} + \mathbf{T}^T & \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X}_{2;ij} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^T \mathbf{A}_{ij} + \hat{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{C}_{ij} & \hat{\mathbf{A}}_{ij} \\ \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij} \hat{\mathbf{D}}_{ij} \mathbf{C}_{ij} & \mathbf{A}_{ij} \mathbf{X} + \mathbf{B}_{ij} \hat{\mathbf{C}}_{ij} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X}_{3;ij} &= \begin{bmatrix} R^{1/2} \hat{\mathbf{D}}_{ij} \mathbf{C}_{ij} & R^{1/2} \hat{\mathbf{C}}_{ij} \\ \mathbf{C}_{ij} & \mathbf{C}_{ij} \mathbf{X}_{ij} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ vérifiant l'inégalité (28) est inversible, il est possible de poser $N = (\mathbf{M}^T)^{-1}(\mathbf{T} - \mathbf{Y}^T \mathbf{X})$. Alors le contrôleur par retour de sortie dynamique dont les matrices sont donnés par

$$\mathbf{A}_{ij}^K = \mathbf{M}^{-T}(\hat{\mathbf{A}}_{ij} - \mathbf{Y}^T(\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij} D_{ij}^K \mathbf{C}_{ij}) \mathbf{X}) \quad (30)$$

$$- \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_{ij} \mathbf{C}_{ij}^K N - \mathbf{M}^T \mathbf{B}_{ij}^K \mathbf{C}_{ij} \mathbf{X}) N^{-1}, \quad (31)$$

$$\mathbf{B}_{ij}^K = \mathbf{M}^{-T}(\hat{\mathbf{B}}_{ij} - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_{ij} D_{ij}^K \mathbf{C}_{ij}), \quad (32)$$

$$\mathbf{C}_{ij}^K = (\hat{\mathbf{C}}_{ij} - D_{ij}^K \mathbf{C}_{ij} \mathbf{X}) N^{-1}, \quad (33)$$

$$\mathbf{D}_{ij}^K = \hat{\mathbf{D}}_{ij}, \quad (34)$$

stabilise le système et mène à une borne supérieure de la dégradation maximale pour un état initial du contrôleur nul telle que $\hat{J}(x_0, \zeta_0) < \beta_1 (\|x_0\|_2^2 + \|\zeta_0\|_2^2)$.

Preuve 2 : L'objectif est ici d'effectuer un changement de variables et une transformation de congruence afin d'obtenir une forme particulière de l'inégalité (14) par l'intermédiaire de matrices particulières \mathbb{G}_{ij} et \mathbb{S}_{ij} . Une technique classique proposée par [17] est adaptée pour qu'elle soit compatible avec la dépendance en temps du système, comme les lois de commutation dépendent du temps. Pour cela on impose que les matrices \mathbb{G}_{ij} soient indépendantes du mode, c'est-à-dire $\mathbb{G}_{ij} = \mathbb{G}$. Décomposons la matrice \mathbb{G} et son inverse \mathbb{G}^{-1} de la façon suivante :

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \bullet \\ \mathbf{N} & \bullet \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \bullet \\ \mathbf{M} & \bullet \end{bmatrix}, \quad (35)$$

où la notation « \bullet » signifie que le bloc n'est pas important pour la suite du problème. Ces blocs peuvent éventuellement être déterminés en utilisant la contrainte $\mathbb{G}\mathbb{G}^{-1} = \mathbf{I}_{2n_x}$. On définit alors la matrice de projection (inversible par l'inversibilité de \mathbf{M})

$$\mathbb{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0}_{n_x} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Cette définition de matrice de projection permet d'écrire les relations suivantes :

$$\mathbb{G}\mathbb{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0}_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{\Pi}^T(\mathbb{G}^T + \mathbb{G})\mathbb{\Pi} = \mathcal{X}_1. \quad (37)$$

En introduisant aussi \mathbb{S}_{ij} tel que $\hat{\mathbf{S}}_{ij} = \mathbb{\Pi}^T \mathbb{S}_{ij} \mathbb{\Pi}$, on a

$$\mathbb{Q}_{ij} \mathbb{G} \mathbb{\Pi} = \mathcal{X}_{3;ij}; \quad \mathbb{\Pi}^T \mathbb{A}_{ij} \mathbb{\Pi} = \mathcal{X}_{3;ij}. \quad (38)$$

En pré-multipliant la LMI (26) par $\text{diag}\{\mathbb{\Pi}^{-T}, \mathbb{\Pi}^{-T}, \mathbf{I}_{r_u+m_z}\}$ et en la post-multipliant par sa transposée, il vient

$$\begin{bmatrix} \mathbb{G}^T \mathbb{S}_{ij}^{-1} \mathbb{G} & \star & \star \\ \mathbb{A}_{ij} \mathbb{G} & \mathbb{S}_{lp} & \star \\ \mathbb{Q}_{ij} \mathbb{G} & \mathbf{0}_{(r_u+m_z) \times 2n_x} & \mathbf{I}_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > \mathbf{0}_t, \quad (39)$$

qui est un cas particulier de (14).

De plus, l'inégalité (29) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \mathbf{I}_{2n_x} & \mathbb{\Pi} \\ \star & \hat{\mathbf{S}}_{ij} \end{bmatrix} > \mathbf{0}_{4n_x} \quad (40)$$

qui mène à

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \mathbf{I}_{2n_x} & \mathbf{I}_{2n_x} \\ \star & \mathbb{S}_{ij} \end{bmatrix} > \mathbf{0}_{4n_x}. \quad (41)$$

En utilisant un complément de Schur, il s'en suit, pour tout $\alpha(0) \in \Omega$ et pour tout $\lambda(0) \in \Lambda$, l'inégalité

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) \leq x_{cl,0}^T \mathbf{P}_{(\alpha(0), \lambda(0))} x_{cl,0} < \beta_1 (\|x_0\|_2^2 + \|\zeta_0\|_2^2). \quad (42)$$

La section suivante propose une application pour illustrer les résultats théoriques de cet article. ■

V. ILLUSTRATION

De nos jours, l'utilisation des réseaux s'est considérablement développée. Comparés aux systèmes conventionnels, les SCR présentent de nombreux avantages tels que la simplicité de la maintenance, son faible coût et de plus, pour certaines applications ils représentent l'unique solution de contrôle comme par exemple la chirurgie à distance. Dans les SCR, tous les éléments (contrôleur, actionneurs, capteurs) sont distribués et connectés au réseau [1, 16]. Cependant, les ressources des réseaux sont limitées et d'autres problèmes doivent être gérés comme la perte d'information ou la transmission d'information avec un retard variant dans le temps. La stabilité de ces systèmes a déjà largement été traitée, comme le montrent plusieurs études [9, 20, 21]. Considérons un SCR représenté sur la Figure 1 et décrit par un système en temps discret où d_k est le retard variant dans le temps entre le contrôleur et l'actionneur qui affecte la commande du système et τ_k , le retard variant dans le temps entre le capteur et le contrôleur qui affecte la sortie. Dans

cette illustration, nous faisons l'hypothèse que les deux retards d_k et τ_k sont des multiples de la période d'échantillonnage. Ces retards sont bornés et à chaque instant $k \in \mathbb{N}$, ils varient dans les ensembles $d_k \in \mathcal{D} = \llbracket d_{\min}; d_{\max} \rrbracket$ et $\tau_k \in \mathcal{T} = \llbracket \tau_{\min}; \tau_{\max} \rrbracket$, où d_{\min} , d_{\max} , τ_{\min} and $\tau_{\max} \in \mathbb{N}$ sont respectivement les retards minimal et maximal entre le contrôleur et l'actionneur et les retards minimal et maximal entre le capteur et le contrôleur tels que $0 \leq d_{\min} \leq d_{\max}$ et $0 \leq \tau_{\min} \leq \tau_{\max}$. La structure est décrite par le système

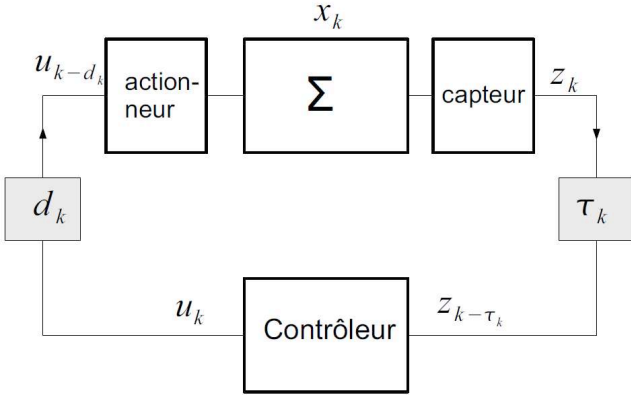


Fig. 1. Structure d'un système contrôlé en réseau

en temps discret suivant

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_{k-d_k}, \quad (43)$$

$$z_k = \tilde{C}\tilde{x}_k, \quad (44)$$

où, à chaque instant $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $u_{k-d_k} \in \mathbb{R}^{r_u}$ et $z_k \in \mathbb{R}^{m_z}$ sont respectivement l'état, la commande retardée appliquée au système et la sortie du système. Tous les retards qui affectent le système sont *a priori* inconnus, mais disponibles en temps réel (mesurés ou estimés).

Il a été montré [12, 13] que l'approche système commuté est adaptée à l'étude de la stabilité de ce type de système. On utilise alors un vecteur d'état augmenté contenant tous les états retardés du système jusqu'au retard maximal τ_{\max} et toutes les commandes retardées jusqu'au retard maximal d_{\max} , inspiré de [11, 12, 18, 19] :

$$x_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^T & \cdots & \tilde{x}_{k-\tau_{\max}}^T & u_{k-1}^T & \cdots & u_{k-d_{\max}}^T \end{bmatrix}^T \quad (45)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $n_x = n + n \cdot \tau_{\max} + r_u \cdot d_{\max}$. En supposant que $u_k = 0$ et $x_k = 0$ pour $k < 0$, l'état augmenté initial est donné par $x_0 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0^T & 0_{1 \times (n_x - n)} \end{bmatrix}^T$. Le système augmenté peut être mis sous la forme

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \quad (46)$$

où les matrices A_d et B_d sont définies pour $d = 0$ (nécessaire si $d_{\min} = 0$) par l'équation (50) et $\forall d \in \llbracket 1, d_{\max} \rrbracket$, par l'équation (51). Pour cette dernière, la matrice \tilde{B} est dans la $(\tau + d + 1)^{\text{ième}}$ colonne bloc de la matrice A_d .

L'entrée du contrôleur est la sortie z_k affectée d'un retard τ_k , c'est-à-dire $z_{k-\tau_k}$, qui peut être écrit grâce à l'état augmenté x_k comme suit

$$z_{k-\tau_k} = C_{\tau_k} x_k \quad (47)$$

où la matrice de sortie augmentée de taille $m_z \times n_x$ est donnée par $\forall \tau \in \llbracket \tau_{\min}, \tau_{\max} \rrbracket$

$$C_{\tau} = \begin{bmatrix} 0_{m_z \times n \cdot \tau} & \tilde{C} & 0_{m_z \times n \cdot (\tau_{\max} - \tau_k) + r_u \cdot d_{\max}} \end{bmatrix}.$$

La matrice \tilde{C} est dans la $(\tau + 1)^{\text{ième}}$ colonne de C_{τ} . De la même manière que [12], l'idée principale est d'utiliser une fonction de Lyapunov qui dépend des retards variant dans le temps, ce qui correspond à la fonction de Lyapunov-Krasovskii la plus générale. Pour permettre cette approche, le système augmenté est représenté par un système à commutation avec deux paramètres $\alpha(k)$ et $\lambda(k)$ définis précédemment avec $N_{\alpha} = \tau_{\max} - \tau_{\min} + 1$ et $N_{\lambda} = d_{\max} - d_{\min} + 1$.

Les paramètres $\alpha(k)$ et $\lambda(k)$ sont respectivement les fonctions caractéristiques des retards τ_k et d_k pour le système (43). De plus, leurs valeurs sont des multiples de la période d'échantillonnage. Ces fonctions caractéristiques sont définies comme dans [15]. La relation entre $\alpha(k)$ et τ_k et entre $\lambda(k)$ et d_k est une bijection. Pour cette raison, dans la suite, τ_k sera assimilé à $\alpha(k)$ et d_k à $\lambda(k)$. Le système peut s'écrire

$$x_{k+1} = A_{(\lambda(k))} x_k + B_{(\lambda(k))} u_k, \quad (48)$$

$$z_{k-\tau_k} = C_{(\alpha(k))} x_k. \quad (49)$$

On reconnaît alors le système à commutation (1). Comme l'état du système (43) ne dépend pas du retard τ à son entrée, l'état du système à commutation est indépendant du paramètre de commutation α , la même remarque s'applique à la sortie du système à commutation vis-à-vis de son indépendance par rapport au retard d et par conséquent à λ . La présentation des résultats théoriques pour un système à commutation à deux lois de commutation plutôt qu'une seule permet, pour cet exemple, d'appliquer très facilement les deux propositions présentées précédemment.

Les valeurs obtenues de la borne supérieure β_1 augmentent avec τ_{\max} et d_{\max} . En augmentant trop les valeurs des retards maximaux, on peut perdre la stabilisation de ce système et ne plus avoir de borne supérieure finie pour le critère. Cette étude doit être complétée dans les travaux futures par la certification de cette borne supérieure du coût garanti.

VI. CONCLUSION

Dans cet article, pour les systèmes à commutation en temps discret régulé par un contrôleur par retour de sortie dynamique, nous nous sommes intéressés à l'analyse de la dégradation de performances due à des lois de commutation. La première proposition fournit un problème d'optimisation convexe qui permet de déterminer une borne supérieure de la dégradation maximale des performances et d'analyser la stabilité du système considéré. La seconde proposition conduit à la conception d'un contrôleur par retour de sortie dynamique qui stabilise le système et permet d'obtenir une borne supérieure de la dégradation maximale. Une application de ces résultats au cas des SCR est également proposée.

RÉFÉRENCES

- [1] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems*. Prentice Hall, 1997.

$$A_0 = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} A & 0_{n \times n \cdot \tau_{\max}} \\ \hline I_{n \cdot \tau_{\max}} & 0_{n \cdot \tau_{\max} \times n} \end{array} & \begin{array}{c} 0_{n \cdot (\tau_{\max} + 1) \times r_u \cdot d_{\max}} \\ \hline 0_{r_u \times r_u \cdot d_{\max}} \\ \hline I_{r_u \cdot (d_{\max} - 1)} & 0_{r_u \cdot (d_{\max} - 1) \times r_u} \end{array} \end{array} \right]; \quad B_0 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n \cdot \tau_{\max} \times r_u} \\ I_{r_u} \\ 0_{r_u \cdot (d_{\max} - 1) \times r_u} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$A_d = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} \tilde{A} & 0_{n \times n \cdot \tau_{\max}} \\ \hline I_{n \cdot \tau_{\max}} & 0_{n \cdot \tau_{\max} \times n} \end{array} & \begin{array}{cc} 0_{n \times r_u \cdot (d-1)} & \tilde{B} & 0_{n \times r_u \cdot (d_{\max} - d)} \\ \hline 0_{n \cdot \tau_{\max} \times r_u \cdot d_{\max}} & \hline 0_{r_u \times r_u \cdot d_{\max}} \\ \hline I_{r_u \cdot (d_{\max} - 1)} & 0_{r_u \cdot (d_{\max} - 1) \times r_u} \end{array} \end{array} \right]; \quad B_d = \begin{bmatrix} 0_{n \cdot (\tau_{\max} + 1) \times r_u} \\ I_{r_u} \\ 0_{r_u \cdot (d_{\max} - 1) \times r_u} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

- [2] R. A. Borges, R. C. L. F. Oliveira, C. T. Abdallah, and P. L. D. Peres. H_∞ filtering of networked control system with time-varying sampling rates. In *American Control Conference*. Saint-Louis, USA, 2009.
- [3] R. Bourdais, L. Hetel, J. Daafouz, and W. Perruquetti. Stabilité et stabilisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 41(7-8) :819–853, 2007.
- [4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [5] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 43 :475–582, 1998.
- [6] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43 :355–359, August 2001.
- [7] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : A switched Lyapunov function approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47 :1883–1887, 2002.
- [8] J. C. Geromel, P. Colaneri, and P. Bolzern. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 53 :720–733, 2008.
- [9] J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu. A survey of recent results in networked control systems. *IEEE Special Issue on Technology of Networked Control Systems*, 95(1) :138–162, January 2007.
- [10] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Stabilization of arbitrary switched linear systems with unknown time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10) :1668–1674, 2006.
- [11] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Analysis and control of LTI and switched systems in digital loops via an event-based modeling. *International Journal of Control*, 81(7) :1125–1138, July 2008.
- [12] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functional approach for discrete delay systems and the stability conditions for switched systems. *Journal on Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 2(3) :697–705, August 2008.
- [13] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Systems and Control : Foundations and Applications. Birkhäuser, 2003.
- [14] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19 :59/70, 2003.
- [15] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. On analysis of performance for digitally controlled and time-varying delayed systems. In *European Control Conference (ECC'09)*, Budapest, Hungary, 2009.
- [16] J. P. Richard and T. Divoux. *Systèmes commandés en réseau*. Hermès-Lavoisier, Paris, 2007.
- [17] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on automatic control*, 42(7) :896–911, 1997.
- [18] M. Tai and K. Uchida. Gain schedule output feedback of discrete-time networked control systems. In *16th IEEE International Conference on Control Applications*. Singapore, 2007.
- [19] A. Tzes, G. Nikolakopoulos, and I. Koutroulis. Development and experimental verification of a mobile client-centric networked controlled system. *European Journal of Control*, 11(3) :229–241, 2005.
- [20] G. Walsh, H. Ye, and L. Bushnell. Stability analysis of network control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(3) :438–446, 2002.
- [21] W. Zhang, M. S. Branicky, and S. M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, February 2001.