

Commande de systèmes linéaires comprenant un actionneur dynamique saturant

J.B. GNING¹, F. GIRI^{1,*}, F.Z. CHAOUTI², E. CHATER¹

¹ GREYC UMR 6072, Université de Caen Basse-Normandie, 14032 Caen Cedex, France.

² ENSET, Rabat, Maroc

* Contact : fouad.giri@unicaen.fr

Résumé— Ce travail porte sur la commande de systèmes comprenant un actionneur susceptible de saturer. Ce dernier est généralement assimilé à un élément statique de type saturation. Dans de nombreuses situations pratiques, ce modèle simplifié peut s'avérer insuffisant ce qui rend nécessaire la prise en compte de la dynamique de l'actionneur. Dans ce papier, nous proposons un modèle d'actionneur qui prend en considération à la fois son caractère dynamique et saturant. Un schéma de commande en cascade sera alors élaboré pour l'ensemble 'actionneur-procédé'. Des conditions suffisantes, portant sur les paramètres de synthèse du schéma de commande, seront établies en utilisant des outils de la stabilité entrée-sortie. Sous ces conditions, les saturations mises en jeu, aussi bien au niveau de l'actionneur que du régulateur, cessent de s'activer après un régime transitoire de durée finie, ce qui rend possible une poursuite parfaite des trajectoires de références compatibles avec la limitation imposée par l'actionneur.

Mots-clés— Actionneur dynamique, saturation, poursuite, stabilité entrée-sortie.

I. INTRODUCTION

La commande de systèmes linéaires en présence d'un actionneur assimilé à un élément statique de type saturation a suscité un grand intérêt au cours des deux dernières décennies. Dans ce cadre, de très nombreux résultats de stabilité (locale, globale ou semi-globale) ont été établis, voir par exemple [1]. Très récemment, l'intérêt s'est également porté sur le cas où l'actionneur ne peut être réduit à une simple saturation. Ainsi, a-t-on utilisé dans [2] un modèle d'actionneur de type LN, constitué d'une dynamique linéaire (L) en série avec un élément saturation (N), conduisant à un système global 'actionneur-procédé' de type LNL. Ce dernier fut alors commandé par un régulateur assurant la stabilité semi-globale en boucle fermée. L'inconvénient du modèle LN réside dans le fait que les variables d'état de l'actionneur sont totalement insensibles au fait que la sortie puisse saturer ou pas. Or, les actionneurs les plus connus (moteurs, vannes de régulation, ensembles 'distributeur-vérin', etc.) sont bien le siège d'une rétroaction faisant que les états et la sortie interagissent (sachant que la sortie peut elle-même être une variable état). Dans le présent travail, nous proposons un modèle d'actionneur qui rend compte de l'interaction état-sortie ce qui, en particulier, rend les variables d'état sensibles à la saturation de l'actionneur quand ceci vient à se produire. L'interaction état-sortie se traduit, dans le modèle proposé, par un bouclage interne autour de l'élément saturation de l'actionneur (Fig. 1). En s'appuyant sur ce modèle nous développons pour le système global, composé de l'actionneur et du procédé, un schéma de commande constitué de deux

boucles montées en cascade. Le schéma de commande sera conçu par une technique qui s'apparente à celle du backstepping et fera l'objet d'une analyse formel utilisant des outils empruntés à la théorie de stabilité entrée-sortie. Ainsi, sera-t-il montré que le régulateur préserve bien la stabilité globale en boucle fermée et garantit une poursuite parfaite, par la sortie du système, de n'importe quelle trajectoire de référence compatible avec la saturation de l'actionneur. On démontre que ce double objectif est effectivement réalisé à condition de placer les pôles en boucle fermée dans un domaine bien défini, ce qui s'avère toujours faisable. La pertinence de l'approche entrée-sortie dans la prise en compte des saturations dans les problèmes de commande a bien été soulignée dans [5]. Le papier est organisé comme suit : le problème de commande posé est formulé en section 2 ; la synthèse du schéma de commande est présenté au paragraphe 3 et fait l'objet d'une analyse théorique en section 4 ; ses performances sont illustrées par simulation en section 5.

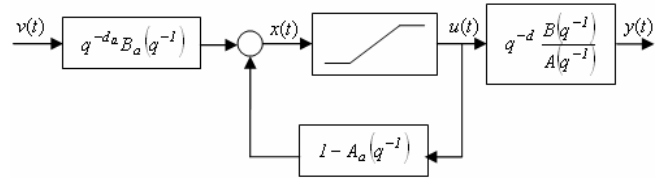


Fig. 1 : Modèle de l'ensemble 'actionneur-procédé'

II. FORMULATION DU PROBLEME DE COMMANDE

On s'intéresse à la commande de systèmes composés d'un procédé linéaire monovariante et d'un actionneur saturant dont la dynamique n'est pas négligeable devant celle du procédé. En temps-discret, le procédé est décrit par le modèle entrée-sortie suivant:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) \quad (1)$$

L'actionneur est quant à lui représenté par les deux équations suivantes:

$$x(t) = (1 - A_a(q^{-1}))u(t) + q^{-d_a}B_a(q^{-1})v(t) \quad (2)$$

$$u(t) = \text{sat}(x(t), u_M) = \text{sign}(x(t))\min(|x(t)|, u_M) \quad (3)$$

avec :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n} \quad (4)$$

$$B(q^{-1}) = 1 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n} \quad (5)$$

$$A_a(q^{-1}) = 1 + \bar{a}_1 q^{-1} + \dots + \bar{a}_m q^{-m} \quad (6)$$

$$B_a(q^{-1}) = \bar{b}_1 q^{-1} + \dots + \bar{b}_m q^{-m} \quad (7)$$

où q^{-1} désigne l'opérateur retard, (n, m, d, d_a) sont des entiers et $(a_i, b_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i)$ sont des réels. Dans (1)-(3), $v(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système. u_M est l'amplitude maximale que peut prendre la sortie $u(t)$ de l'actionneur, du fait du caractère saturant de ce dernier. Le système est supposé à minimum de phase i.e. $z^n B(z^{-1})$ et $z^m \bar{B}_a(z^{-1})$ sont des polynômes d'Hurwitz. En outre, la partie procédé est supposée stable ($A(z^{-1})$ un polynôme d'Hurwitz).

Remarque 1. 1) L'exigence sur la phase rend possible la réalisation de l'objectif de poursuite parfaite de trajectoires de référence quelconques (à condition que celles-ci soient compatibles avec la limitation imposée par l'actionneur et exprimée par (3)). L'hypothèse de stabilité garantit que le procédé (donc l'ensemble du système) reste asymptotiquement stabilisable en dépit de la saturation de l'actionneur ([3]). La dynamique de l'actionneur n'a quant à elle pas besoin d'être stable car elle n'est pas précédé d'une limitation ($v(t)$ non contraint).

2) Le modèle (2)-(3) rend bien compte de la rétroaction qui caractérise la plupart des actionneurs physiques dès lors que leur dynamique n'est pas ignorée. De ce fait, l'état interne $x(t)$ dépend, non seulement de l'entrée $v(t)$, mais aussi de la sortie réelle $u(t)$. Cet effet se traduit par le feedback observé au niveau du schéma bloc de la figure 1. Ce modèle est plus rigoureux que le modèle simplifié représenté par la figure 2, c'est à dire :

$$\begin{aligned} A_a(q^{-1})x(t) &= q^{-d_a} B_a(q^{-1})v(t) \\ u(t) &= \text{sat}(x(t), u_M) \end{aligned} \quad (8)$$

Dans ce dernier modèle, l'état interne $x(t)$ est entièrement déterminée par l'entrée $v(t)$. Le fait que l'actionneur ait pu saturer durant l'intervalle $[0 \ t-1]$ n'a aucun effet sur cet état.

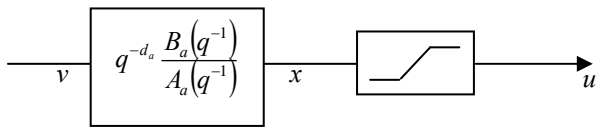


Fig. 2 : Modèle d'actionneur simplifié

III. ELABORATION DU SCHEMA DE COMMANDE

Le schéma de commande est composé de deux boucles de régulation montées en cascade. Il sera élaboré en deux étapes selon une démarche qui s'apparente à celle du backstepping.

A. Synthèse de la boucle externe

Le signal interne $u(t)$ se présente comme une commande virtuelle pour le sous-système (1) (qui représente la partie procédé). Dans cette étape, ce signal sera temporairement considéré comme étant une vraie entrée de commande. Le but étant alors d'élaborer pour ce sous-système un régulateur capable de forcer sa sortie $y(t)$ à suivre parfaitement sa trajectoire de référence $y^r(t)$. Cette dernière est n'importe

quel signal borné compatible avec la saturation de l'actionneur. Spécifiquement, $y^r(t)$ doit être tel que:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} y^r(t) \right| \leq (1 - \varepsilon) u_M \quad (9)$$

où ε est n'importe quel réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. Le fait que le signal de référence $y^r(t)$ soit de nature quelconque rend sa poursuite un objectif seulement atteignable à l'aide d'un régulateur de type modèle de référence. L'élaboration d'un régulateur de ce type exige l'hypothèse de phase minimale émise sur le procédé. L'action de commande $u^*(t)$ générée par ce régulateur sera prise comme étant la trajectoire de référence par le régulateur interne élaborée ultérieurement. A ce stade notons simplement que la présence d'un retard pur (d_a) au niveau de l'actionneur rendra nécessaire la connaissance de $u^*(t + d_a)$ à l'instant t . Compte tenu de ces observations, la synthèse du régulateur externe repose sur l'équation de Bezout suivante:

$$R(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-(d+d_a)}S(q^{-1}) = C(q^{-1})\Lambda(q^{-1}) \quad (10)$$

où $C(q^{-1})$ et $\Lambda(q^{-1})$ sont des polynômes d'Hurwitz de la forme:

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_n q^{-n} \quad (11a)$$

$$\Lambda(q^{-1}) = 1 + \lambda_1 q^{-1} + \lambda_2 q^{-2} + \dots + \lambda_{(d+d_a)+1} q^{-(d+d_a)+1} \quad (11b)$$

Le fait que $A(q^{-1})$ et $q^{-(d+d_a)}$ soient premiers entre eux garantit l'existence et l'unicité d'une solution de la forme :

$$R(q^{-1}) = 1 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{d+1} q^{-(d+d_a-1)} \quad (12)$$

$$S(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{n-1} q^{-n+1} \quad (13)$$

Avec ces notations, l'action de commande $u^*(t)$ (qui représentera plus tard la référence du régulateur interne) est générée par le régulateur externe suivant:

$$\begin{aligned} v^*(t + da) &= \frac{\Lambda(q^{-1}) - R(q^{-1})}{\Lambda(q^{-1})} u^*(t + da) - \frac{S(q^{-1})}{\Lambda(q^{-1})B(q^{-1})} y(t) \\ &\quad + \frac{C(q^{-1})}{B(q^{-1})} y^r(t + d + da) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \text{sat}(v^*(t), (1 - \varepsilon_a) u_M) \\ &= \text{sign}(v^*(t)) \min\{|v^*(t)|, (1 - \varepsilon_a) u_M\} \end{aligned} \quad (15)$$

où $0 < \varepsilon_a < 1$ est quelconque.

Remarque 2. 1) Notons que le premier terme à droite (14) dépendra tout au plus de $u^*(t + da - 1)$ puisque la fonction de transfert $(\Lambda(q^{-1}) - R(q^{-1}))/\Lambda(q^{-1})$ comprend au moins un retard unitaire du fait de (11b) et (12).

2) Le recours à la saturation (15) s'explique par le fait que le signal $u^*(t)$ sera pris ultérieurement comme étant la

trajectoire de référence de la sortie de l'actionneur $u(t)$. Comme ce dernier signal est physiquement contraint par l'actionneur à demeurer dans l'intervalle $[-u_M, u_M]$, il est logique que sa référence soit également contrainte à demeurer dans le même intervalle. En fait, l'équation (15) contraint $u^*(t)$ à rester dans $[-(1-\varepsilon_a)u_M, (1-\varepsilon_a)u_M]$ où ε_a peut être choisi arbitrairement petit. Le fait de réduire (très légèrement) l'intervalle de variation de $u^*(t)$ rendra possible la poursuite parfaite de la référence $y^r(t)$ par $y(t)$ tout en assurant un arrêt de saturation de l'actionneur après un régime transitoire de durée finie (voir Proposition 1).

3) Les équations (14)-(15) montrent aussi que, si $u(t) = u^*(t)$ alors, à chaque fois que la saturation dans (15) n'est pas active (c'est à dire $u^*(t) = v(t)$), le régulateur (14)-(15) se confondra avec le régulateur à modèle de référence standard:

$$B(q^{-1})R(q^{-1})u(t) + S(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})\Lambda(q^{-1})y^r(t+d) \quad (16)$$

Si cela perdure, on aura $C(q^{-1})\Lambda(q^{-1})\tilde{y}(t+d) = 0$ avec $\tilde{y}(t) \stackrel{def}{=} y(t) - y^*(t)$, ce qui signifie que l'erreur de poursuite $\tilde{y}(t)$ s'annulera exponentiellement (du fait que $C(q^{-1})\Lambda(q^{-1})$ est un polynôme d'Hurwitz).

B. Synthèse de la boucle interne

Il s'agit maintenant d'élaborer un second régulateur qui va forcer la sortie de l'actionneur $u(t)$ à suivre sa référence $u^*(t)$. Etant donné que la nature de ce dernier signal est quelconque, on fait de nouveau recours à un régulateur de type modèle de référence. A cet effet, on considère l'équation de Bezout:

$$R_a(q^{-1})A_a(q^{-1}) + q^{-d_a}S_a(q^{-1}) = C_a(q^{-1}) \quad (17)$$

où $C_a(q^{-1})$ est un polynôme d'Hurwitz quelconque de la forme:

$$C_a(q^{-1}) = 1 + \bar{c}_1 q^{-1} + \dots + \bar{c}_{m+da-1} q^{-m-da+1} \quad (18)$$

L'équation (17) a une solution unique de la forme

$$R_a(q^{-1}) = 1 + \bar{r}_1 q^{-1} + \dots + \bar{r}_{da-1} q^{-da+1} \quad (19)$$

$$S_a(q^{-1}) = \bar{s}_0 + \bar{s}_1 q^{-1} + \dots + \bar{s}_{m-1} q^{-m+1} \quad (20)$$

puisque $A_a(q^{-1})$ et q^{-d_a} sont premiers entre eux.

Avec ces notations, le régulateur interne est défini par:

$$R_a(q^{-1})B_a(q^{-1})v(t) + S_a(q^{-1})u(t) = C_a(q^{-1})u^*(t+d_a) \quad (21)$$

Le schéma de commande global élaboré, défini par les lois de commande (14), (15) et (21), est illustré par le schéma bloc de la figure 3. Cette dernière montre qu'aucun signal, à l'exception des sorties de l'actionneur et du procédé, n'est exigé pour la mise en œuvre de ce schéma de commande.

Les performances du schéma de commande élaboré précédemment, et notamment sa capacité de poursuite de trajectoires de références, seront maintenant analysées. A cet effet, il sera fait usage des notations suivantes:

. $\|x\|_\infty = \sup_t |x(t)|$, norme L_∞ du signal x ;

. $S[\alpha \beta]$ (avec $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$), secteur du plan délimité par les droites, passant par l'origine, de pentes respectives α et β (voir par exemple [4]).

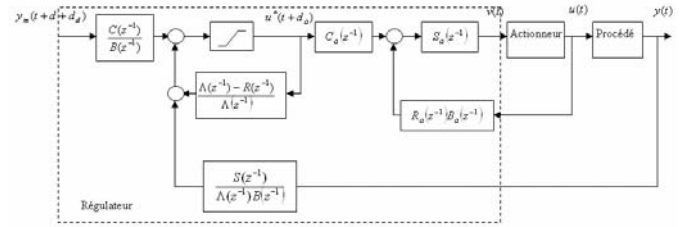


Fig.3. Schéma de commande global défini par (14), (15), (21)

Proposition 1. Considérons le système constitué de l'actionneur dynamique saturé (2)-(3) en boucle fermée avec le régulateur défini par (21) où le polynôme $C_a(q^{-1})$ est choisi tel que :

$$\gamma_a < 1 \text{ et } \frac{1+\gamma_a}{1-\gamma_a} < 1 + \varepsilon_a \quad (22)$$

où ε_a est comme en équation (15) et γ_a est le gain L_∞ de la

fonction de transfert $\frac{R_a(q^{-1}) - C_a(q^{-1})}{R_a(q^{-1}) + C_a(q^{-1})}$. Alors, on a :

1) Il existe un entier $0 < T < \infty$ tel que, pour tout $t \geq T$:

$$|x(t)| < u_M \text{ et } u(t) = x(t)$$

2) Il s'ensuit que : $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{u}(t)| = 0$ avec $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$ ■

Preuve. En opérant les deux membres de l'équation (17) sur $u(t+d_a)$, on obtient :

$$\begin{aligned} R_a(q^{-1})A_a(q^{-1})u(t+d_a) + S_a(q^{-1})u(t) \\ = C_a(q^{-1})u(t+d_a) \end{aligned} \quad (23)$$

Par ailleurs, l'équation (2) se réécrit comme suit :

$$A_a(q^{-1})u(t) = B_a(q^{-1})v(t-d_a) + \Delta u(t) \quad (24)$$

avec

$$\Delta u(t) = u(t) - x(t) \quad (25)$$

En remplaçant $A_a(q^{-1})u(t)$ dans (23) par le second membre de (24), il vient que:

$$R_a(q^{-1})B_a(q^{-1})v(t) + S_a(q^{-1})u(t)$$

$$= C_a(q^{-1})u(t+d_a) - R_a(q^{-1})\Delta u(t+d_a) \quad (26)$$

En comparant (26) avec (21), on obtient:

$$C_a(q^{-1})u^*(t+d_a) = C_a(q^{-1})u(t+d_a) - R_a(q^{-1})\Delta u(t+d_a) \quad (27)$$

En ajoutant $C_a(q^{-1})x(t+d_a) - C_a(q^{-1})x(t+d_a)$ au second membre de (27), en utilisant (25) et en réorganisant les différents termes, il découle que :

$$x(t+d_a) = \frac{R_a(q^{-1}) - C_a(q^{-1})}{C_a(q^{-1})} \Delta u(t+d_a) + u^*(t+d_a) - \delta(t) \quad (28)$$

où $\delta(t)$ est un terme, dépendant des conditions initiales, s'annulant exponentiellement vite. L'équation (28) donne lieu au feedback de la figure 4 où Ψ désigne l'opérateur :

$$\Psi : x \rightarrow x - \text{sat}(x, u_M) \quad (29)$$

Il peut être immédiatement vérifié (par exemple en représentant graphiquement Ψ) que $\Psi \in S[0, 1]$. Alors, en appliquant le théorème de transformation de boucle ([4]), il vient que le feedback de la figure 4 est L_∞ -stable si la condition (22) est vérifiée. Dans ce cas, on a aussi ([4]):

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \frac{1+\gamma_a}{1-\gamma_a} \|u^* + \delta\|_\infty \leq \frac{1+\gamma_a}{1-\gamma_a} (1-\varepsilon_a) u_M + \frac{1+\gamma_a}{1-\gamma_a} \|\delta\|_\infty \\ &\leq (1-\varepsilon_a^2) u_M + (1+\varepsilon_a) \|\delta\|_\infty \quad (30) \end{aligned}$$

Notons que la seconde inégalité découle de (15) et la troisième de (22). Compte tenu de la causalité du système (ce qui signifie que l'instant 0 n'est pas figé), il vient de (30) que, quel que soit $\tau > 0$:

$$\max_{\tau \leq t < \infty} |x(t)| \leq (1-\varepsilon_a^2) u_M + (1+\varepsilon_a) \max_{\tau \leq t < \infty} |\delta(t)| \quad (31)$$

Comme $\delta(t)$ s'annule exponentiellement, le second terme à droite de (31) converge exponentiellement vers zéro quand $\tau \rightarrow \infty$. Il en découle que $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq (1-\varepsilon_a^2) u_M < u_M$. Il en résulte l'existence d'un $0 < T < \infty$ tel que, pour tout $t > T$: $|x(t)| < u_M$ et, compte-tenu de (3), $u(t) = x(t)$. Ceci démontre la partie 1 de la proposition.

La seconde partie de la proposition 1, découle de la partie 1 qui garantit que $\Delta u(t) = u(t) - x(t) = 0$ (pour tout $t > T$) ce qui, compte-tenu de (27), implique, pour tout $t > T$:

$$C_a(q^{-1})u^*(t+d_a) = C_a(q^{-1})u(t+d_a)$$

Ceci établit la partie 2 de la proposition, étant donné que $C_a(q^{-1})$ est un polynôme d'Hurwitz ■

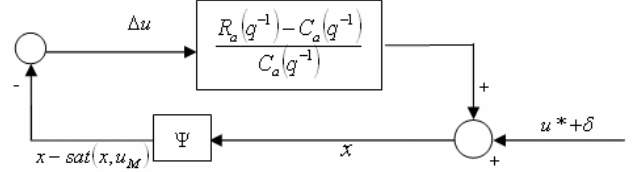


Fig. 4: Système à rétroaction défini par (28)-(29)

Remarque 3. La proposition 1 montre que l'actionneur cesse de taper sur ses fins de course après un régime transitoire de durée finie ce qui permet à la sortie $u(t)$ de suivre parfaitement sa trajectoire de référence $u^*(t)$. Ce résultat est conditionné par (22) et le fait que la référence $u^*(t)$ est contrainte (par le régulateur externe) à demeurer dans les limites autorisées par l'actionneur et exprimées par (3).

Théorème 1. Soit le système comprenant le procédé linéaire (1) et l'actionneur dynamique saturé (2)-(3). Considérons le schéma de commande en cascade comprenant :

- (i) le régulateur interne défini par (21) où $C_a(z^{-1})$ vérifie la condition (22) et $\varepsilon_a \leq \varepsilon^2$ (ε étant comme dans (9)) ;
- (ii) le régulateur externe (14)-(15) où $C(z^{-1})$ est tel que :

$$\gamma_b < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1+\gamma_b}{1-\gamma_b} < 1 + \varepsilon \quad (32)$$

où γ_b désigne le gain L_∞ de la fonction de transfert $(A(q^{-1}) - C(q^{-1})) / (A(q^{-1}) + C(q^{-1}))$. Alors, il existe un entier $T \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $t \geq T$:

$$1) \quad |v^*(t)| < u_M \quad \text{et, par conséquent,} \quad u^*(t) = v^*(t)$$

$$2) \quad \text{Il s'ensuit que} \quad C(q^{-1})\tilde{y}(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{y}(t) = y(t) - y^r(t).$$

$$\text{Par conséquent,} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0 \quad \square$$

Preuve. Opérant $A(q^{-1})B(q^{-1})A(q^{-1})$ sur les deux membres de (14) entraîne:

$$\begin{aligned} A(q^{-1})B(q^{-1})A(q^{-1})v^*(t) &= A(q^{-1})B(q^{-1})A(q^{-1})u(t) \\ &\quad - A(q^{-1})B(q^{-1})R(q^{-1})u(t) - S(q^{-1})A(q^{-1})y(t-da) \\ &\quad + A(q^{-1})C(q^{-1})A(q^{-1})y^r(t+d) \quad (33) \end{aligned}$$

Utilisant l'égalité $A(q^{-1})y(t-da) = q^{-da-d}B(q^{-1})u(t)$ et l'équation (10), on obtient de (33):

$$\begin{aligned}
& A(q^{-1})B(q^{-1})A(q^{-1})v^*(t) \\
&= A(q^{-1})B(q^{-1})A(q^{-1})u(t) - B(q^{-1})C(q^{-1})A(q^{-1})u(t) \\
&\quad + A(q^{-1})C(q^{-1})A(q^{-1})y^r(t+d) \quad (34)
\end{aligned}$$

Opérant par $(B(q^{-1})C(q^{-1})A(q^{-1}))^{-1}$ sur les deux membres de (34) et réorganisant les termes, il vient:

$$v^*(t) = -\frac{A(q^{-1}) - C(q^{-1})}{C(q^{-1})}(v^*(t) - u(t)) + \frac{A(q^{-1})}{B(q^{-1})}y^r(t+d) \quad (35)$$

Par ailleurs, l'équation (15) se réécrit comme suit:

$$u(t) = \text{sat}(v^*(t), (1 - \varepsilon_a)u_M) + \tilde{u}(t) \quad (36)$$

Les équations (35)-(36) donnent lieu au schéma en boucle fermée de la figure 6 où Ψ désigne l'opérateur :

$$\Phi : v^* \rightarrow v^* - \text{sat}(v^*, (1 - \varepsilon_a)u_M) \quad (37)$$

et

$$u^r(t) = \frac{A(q^{-1})}{B(q^{-1})}y^r(t) \quad (38)$$

Il peut être immédiatement vérifié (par exemple en représentant graphiquement Φ) que $\Phi \in S[0, 1]$. En appliquant le théorème de transformation de boucle au feedback de la figure 6 (exactement comme cela fut fait dans la preuve de la Proposition 1 pour le feedback de la figure 5), l'on démontre que le nouveau feedback est également stable sous la condition (32). Il s'ensuit alors que:

$$\begin{aligned}
\|v^*\|_\infty &\leq \frac{1 + \gamma_b}{1 - \gamma_b} \|u^r\|_\infty + \frac{\gamma_b}{1 - \gamma_b} \|\tilde{u}\|_\infty \\
&\leq (1 - \varepsilon^2)u_M + \frac{\gamma_b}{1 - \gamma_b} \|\tilde{u}\|_\infty \quad (39)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (9) et (32). Comme $\tilde{u}(t)$ converge exponentiellement vers zéro (Proposition 1, partie 2), il découle de (39) que $\limsup_{t \rightarrow \infty} |v^*(t)| \leq (1 - \varepsilon^2)u_M < (1 - \varepsilon_a)u_M$.

Le reste de la preuve suit de près le raisonnement développé dans la preuve de la proposition 1 (à partir de (30)) ■

Remark 4. 1) La condition (32) signifie que $C(z^{-1})$ ne doit pas être trop différent de $A(z^{-1})$. En fait, cette condition définit un voisinage des pôles du procédé dans lequel il faut placer les pôles du système en boucle fermée induits par $C(z^{-1})$. Moyennant ce placement de pôle, le régulateur cesse de saturer après un régime transitoire de durée finie, donnant lieu à un comportement global linéaire.

2) Le polynôme $A(z^{-1})$ n'est assujéti à aucune condition à l'exception du fait qu'il soit d'Hurwitz. Une fois les saturations mises en jeu cesseront de s'activer (ce qui est garanti par la Proposition 1 et le Théorème 1), les zéros de ce polynôme feront l'objet d'une simplification pôle-zéro au niveau de la fonction de transfert en boucle fermée. En fait, les zéros de ce polynôme s'apparentent-ils aux pôles de l'observateur dans un contexte de commande à retour d'état.

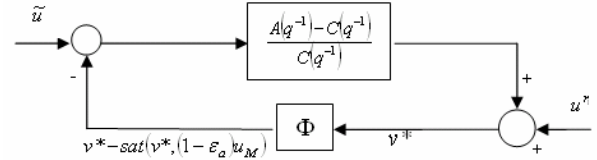


Fig. 5: Feedback défini par (35)-(38)

V. SIMULATIONS

Le système commandé, défini par (1)-(3), est caractérisé par :

$$A(z^{-1}) = 1 - 0.75z^{-1} + 0.9z^{-2} - 0.3375z^{-3}$$

$$z^{-d}B(z^{-1}) = z^{-4}(5 + 0.2z^{-1} + 0.01z^{-2})$$

$$A_a(z^{-1}) = 1 - 0.333z^{-1}, \quad z^{-d_a}B_a(z^{-1}) = z^{-2}(0.666 + 0.654z^{-1})$$

et $u_M = 0.315$. Les régulateurs, externe (14)-(15) et interne ((21)), sont dans un premier temps caractérisés par les polynômes d'Hurwitz:

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1}) = A(\lambda q^{-1}) \quad \text{et} \quad C_a(q^{-1}) = A_a(\lambda q^{-1})$$

avec $\lambda = 0.5$. Ces choix sont motivés, d'une part, par le fait de satisfaire les conditions (22) et (32) et, d'autre part, par le désir de faire en sorte que les boucles interne et externes soient plus rapides que le système en boucle ouverte. Les performances du schéma de commande en cascade ainsi défini, en réponse à une trajectoire de référence périodique et compatible avec la limitation imposée par l'actionneur, sont illustrées par la figure 6. Il est constaté que les deux erreurs de poursuites $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$ et $\tilde{y}(t) = y(t) - y^r(t)$ convergent bien, et assez rapidement, vers zéro après chaque changement de la référence y^r . Ceci prouve implicitement que les saturations mises en jeu dans le système de commande cessent de s'activer après un régime transitoire qui dure un temps fini après chaque changement de la référence.

Dans un second temps, le polynôme d'Hurwitz $C(q^{-1})$ est choisi de sorte à ne pas respecter la condition (22). Spécifiquement, on a pris:

$$\begin{aligned}
C(q^{-1}) &= 1 - 1.65q^{-1} + 2.8586q^{-2} - 2.6953q^{-3} \\
&\quad + 1.9271q^{-4} - 0.9784q^{-5} + 0.2018q^{-6}
\end{aligned}$$

Tous les autres paramètres sont gardés inchangés. La figure 7 montre que les performances du schéma de commande se

dégradent de façon significative malgré le fait que la référence y^r demeure compatible avec la limitation de l'actionneur.

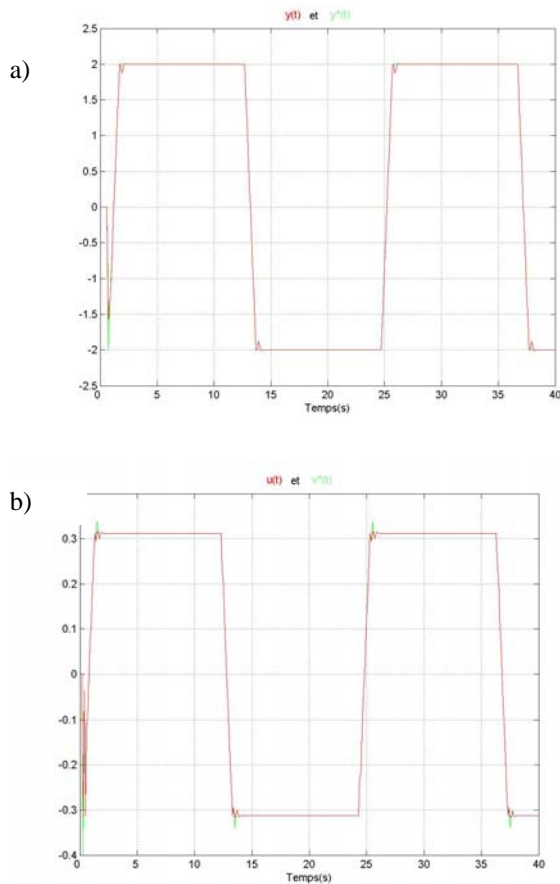


Fig. 6. Performances du schéma de commande (14)-(15) et (21) dans le cas où les conditions (22) et (23) sont satisfaites. a) Sortie du système $y(t)$ (trait plein) et sa référence y^r (trait discontinu) ; b) sortie de l'actionneur $u(t)$ (trait plein) et sa référence $u^*(t)$ (trait discontinu).

IV. CONCLUSION

Ce travail a porté sur la commande de systèmes comprenant un actionneur qui ne peut être assimilé uniquement à un élément statique de type saturation. La prise en compte de la dynamique de l'actionneur s'est faite à l'aide du modèle (2)-(3) qui, en outre, rend bien compte de la contre-réaction intrinsèque caractérisant les actionneurs les plus connus (moteurs électriques, vannes de régulation, ensembles distributeur-vérin). Le problème de commande est appréhendé à l'aide d'un schéma de commande composé de deux régulateurs montés en cascade. Une analyse formelle a permis de mettre en évidence des conditions sur le choix des paramètres des régulateurs. Sous ces conditions, toutes les saturations mises en jeu (celle de l'actionneur et celle du régulateur externe) cessent de s'activer après un régime transitoire de durée finie ce qui rend possible la poursuite par la sortie du système de n'importe quel trajectoire de référence compatible avec la limitation imposée par l'actionneur.

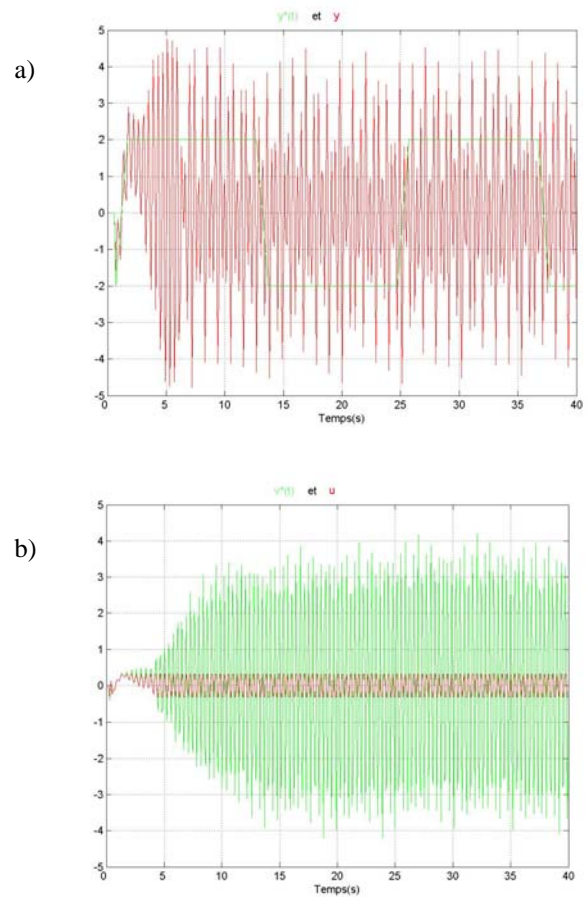


Fig. 7. Dégradation des performances du schéma de commande (14)-(15) et (21) dans le cas où la condition (22) n'est pas satisfaite. a) Sortie du système $y(t)$ et sa référence y^r ; b) sortie de l'actionneur $u(t)$ et sa référence $u^*(t)$

REFERENCES

- [1] Glattfelder A.H. and W. Schaufelberger (2003). Control systems with input and output constraints. Springer.
- [2] Wang X., A. A. Stoorvogel, A. Saberi, H. F. Grip, S. Roy, and P. Sannuti, "Stabilization of a class of sandwich nonlinear systems via state feedback," in Proc. IEEE Conf. Dec. Contr., Shanghai, China, 2009, to appear. Available: http://www.itk.ntnu.no/ansatte/Grip_Havard.Fjar/publications/.
- [3] Sussmann H. J., E.D. Sontag, and Y. Yang, (1994). A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. IEEE-TAC, vol. 39, pp.2411-2425.
- [4] Vidyasagar M., (2002). Nonlinear systems analysis. 2d edition, SIAM, PA, USA. ISBN: 0-89871-526-1.
- [5] P. Hippe (2006). Windup in Control: Its Effects and Their Prevention. Springer, UK.