

# Planification explicite de trajectoires sur la base d'un modèle

Peter HIPPE, Christian HARKORT

Lehrstuhl für Regelungstechnik

Universität Erlangen-Nürnberg

Cauerstr. 7, D-91058 Erlangen, Allemagne.

*Peter.Hippe@rt.eei.uni-erlangen.de, Christian.Harkort@rt.eei.uni-erlangen.de*

*Résumé*— Entre autres dans le domaine des systèmes plats, il est avantageux de réaliser des trajectoires de référence à l'aide d'une commande obtenue d'une planification et d'utiliser le régulateur seulement pour la suppression des perturbations. Cela nécessite un générateur de trajectoires sur la base d'un modèle du système qui fournit non seulement les commandes nécessaires mais aussi les états correspondants. La planification d'une trajectoire réalisable dépend du système et des conditions initiales et terminales, ce qui ne permet, en général, une solution explicite. En vue d'une transition rapide une commande optimale à temps minimum serait intéressante. Pour des chaînes d'intégrateurs d'une longueur arbitraire la solution optimale est connue explicitement. En utilisant cette solution comme référence, une planification de trajectoires explicite devient possible aussi pour des systèmes linéaires généraux. Cependant, les amplitudes maximales des commandes générées ne sont plus limitées par les amplitudes utilisées pour la chaîne d'intégrateurs, on peut toutefois les influencer.

*Mots-clés*— Planification de trajectoires, contrôle avec deux degrés de liberté, commande optimale.

## I. INTRODUCTION

Le problème de trouver une commande qui réalise une transition en temps fini d'un point de fonctionnement à un autre se pose dans divers applications. Pour le domaine des systèmes non linéaires l'approche des systèmes plats est un instrument éprouvé, qu'on peut aussi appliquer pour la conception de commandes linéaires [3], [4], [7], [8].

Dans le domaine de systèmes linéaires on utilise souvent la méthode à base d'une inversion. Cette méthode nécessite une trajectoire de référence pour la sortie plate ou directement pour la sortie à commander, qui relie les deux points de fonctionnement. En suite on évalue la commande correspondante par une inversion du système. Comme, en général, le système inversé a un comportement de différentiation, la trajectoire de référence doit être suffisamment lisse. Parce que le système inversé n'est pas réalisable en général, on ne peut pas modifier la durée de la transition en ligne.

Ce inconvénient est éliminé lorsqu'on emploie un générateur de commande à base d'un modèle. Ici, dans une boucle fermée à base d'un modèle du système, la commande est générée en ligne pour une commande de référence désirée. Cette approche, cependant, à l'inconvénient que la transition entre l'état initial et l'état final n'est pas terminée en temps fini, parce que le point final est atteint asymptotiquement.

La planification des trajectoires pour une transition d'un point d'opération à un autre, qui est présenté ici pour des systèmes linéaires mono-variables, est réalisable en ligne

et permet des transitions en temps fini. Pour des chaînes d'intégrateurs cette approche fournit des transitions optimales à temps minimum, et pour des systèmes linéaires généraux, la transition est telle que sa durée est minimale sous la restriction qu'une certaine dérivée de la sortie par rapport au temps ne dépasse pas une limite désirée. Cela peut être désirable lorsqu'on veut borner le stress des éléments de construction lors d'une transition.

La présente contribution est structurée comme suit. D'abord les résultats concernant la commande optimale à temps minimum pour les chaînes d'intégrateurs d'une longueur arbitraire sont récapitulés dans la Section II. A partir de l'amplitude désirée du changement de la sortie et l'amplitude maximale de la commande à l'entrée de la chaîne d'intégrateurs, les instants des commutations sont connus explicitement. A la base de ces résultats il est démontré comment la planification des trajectoires devient possible pour des systèmes linéaires généraux. La Section III traite les systèmes sans zéros finis, la Section IV le cas des systèmes avec zéros finis et la Section V discute des cas où on ne peut pas réaliser des transitoires en temps fini. Trois exemples servent à illustrer l'approche proposée.

## II. COMMANDE OPTIMALE D'UNE CHAÎNE D'INTÉGRATEURS

Considérons un système mono-variable, strictement propre, invariant par rapport au temps

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (1)$$

qui consiste de  $n$  intégrateurs, et dont la fonction de transfert a la forme

$$G(s) = \frac{V}{s^n}, \quad V > 0 \quad (2)$$

En vue d'une contrainte

$$-u_w \leq u(t) \leq u_w \quad (3)$$

et en vue du fait que le système se trouve dans un état stationnaire  $y(0) = y_A$  à  $t = 0$  nous cherchons une commande  $u_{st}(t)$  telle que le système atteigne un état stationnaire  $y(T) = y_E$  après une durée  $T$  la plus courte possible. En introduisant

$$y_E - y_A = \sigma y_S, \quad y_S > 0 \quad (4)$$

la quantité  $y_S$  désigne l'amplitude de la modification de la sortie  $y(t)$ , et  $\sigma = \text{sign}(y_E - y_A)$  le signe. Dans la théorie de l'optimisation il est connu que la séquence  $u_{st}(t)$  optimale à

temps minimum a un comportement “bang-bang” et que le nombre de commutations correspond à l’ordre du système (Théorème de Feldbaum [1], [2]).

H.-L. Burmeister fournit une solution explicite du problème de la commande optimale à temps minimum pour des chaînes d’intégrateurs de longueur  $n$  arbitraire [1]. Avec le gain  $V$  et l’amplitude maximale  $u_w$ , en désignant par  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , les instants des commutations avec la durée totale  $t_n = T$ , la séquence optimale  $u_{st}(t)$  est caractérisée par

$$T = t_n = 4 \sqrt[n]{\frac{y_S}{4V u_w}} (n - 1)! \quad (5)$$

et

$$t_k = T \sin^2 \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (6)$$

Dans l’intervalle  $0 < t \leq t_1$  la commande optimale est  $u_{st}(t) = \sigma u_w$ , dans l’intervalle  $t_1 < t \leq t_2$  on a  $u_{st}(t) = -\sigma u_w$ , dans l’intervalle  $t_2 < t \leq t_3$  on a  $u_{st}(t) = \sigma u_w$ , et ainsi de suite, jusqu’à ce que à  $t = t_n = T$  la commande retourne à  $u_{st}(t) = 0$ .

Par conséquent il est facile de trouver la commande optimale qui pour une chaîne d’intégrateurs réalise la transition de la sortie de  $y_A$  à  $y_E$  dans un temps  $T$  le plus court possible. Ce résultat peut également être utilisé pour la planification de trajectoires d’un système général.

### III. PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES SUR LA BASE D’UN MODÈLE POUR UN SYSTÈME GÉNÉRAL

Le système à régler, qui est mono-variable, strictement propre et invariant par rapport au temps, est maintenant défini par

$$y(s) = F(s)u(s) \quad (7)$$

avec la fonction de transfert  $F(s)$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (8)$$

Les polynômes  $N(s)$  et  $D(s)$  sont premiers entre eux et  $D(s)$  est de degré  $n$ . En vue de la poursuite de signaux de référence constants, le système est supposé ne pas avoir de zéros à  $s = 0$ . En plus, il existe une représentation d’état  $(A, b, c^T)$  complètement observable et commandable d’ordre  $n$ .

Dans cette section, nous considérons le cas spécial de systèmes sans zéros finis, qui est caractérisé par  $N(s) = V$ ,  $V > 0$ . On cherche une commande qui transfère la sortie  $y$  d’un point d’opération stationnaire  $y(0) = y_A$  à un point d’opération stationnaire  $y(T) = y_E$  en temps  $T$  fini. Comme décrit en Section II, les relations (5) – (6) permettent de générer un signal de commande approprié parvu que  $D(s)$  a la forme  $D(s) = s^n$ .

Comme cela n’est pas le cas en général, on utilise une génération du signal de commande à base d’un modèle du système (voir Fig. 1). On applique au modèle exact du système (7)

$$\begin{aligned} \dot{x}_M(t) &= A_M x_M(t) + b_M u_M(t) \\ y_M(t) &= c_M^T x_M(t) \end{aligned} \quad (9)$$

i.e.,  $A_M = A, b_M = b, c_M^T = c^T$ , un retour d’état

$$u_M(t) = u_{st}(t) + k_M^T x_M(t) \quad (10)$$

tel que les valeurs propres de la boucle fermée se trouvent toutes à  $s = 0$ . Par conséquent, la fonction de transfert entre l’entrée  $u_{st}$  et la sortie  $y_M$  du modèle commandé est donnée par

$$G(s) = c_M^T (sI - A_M - b_M k_M^T)^{-1} b_M = \frac{V}{s^n} \quad (11)$$

c’est-à-dire elle a la forme (2). En Section II on a discuté la séquence optimale  $u_{st}(t)$ ,  $-u_w \leq u_{st}(t) \leq u_w$ , qui réalise la transition de la sortie d’une chaîne d’intégrateurs de longueur  $n$  de l’état stationnaire initial  $y(0) = y_A$  à l’état stationnaire final  $y(T) = y_E$ . Lorsqu’on applique cette séquence au modèle réglé on obtient une commande (10) qui transfère la sortie  $y$  du système (7) de l’état stationnaire initial  $y(0) = y_A$  à l’état stationnaire final  $y(T) = y_E$ . Il est alors évident que ce transitoire subit la restriction

$$-u_w \leq \frac{1}{V} \frac{d^n}{dt^n} y(t) \leq u_w \quad (12)$$

c’est-à-dire le transitoire du système se termine au temps  $T$  le plus court sous la restriction (12).

À l’autre coté on peut spécifier la durée  $T$  et calculer l’amplitude  $u_w$  du signal  $u_{st}$  correspondant. Réécrire (5) mène à

$$u_w = \frac{y_S(n - 1)!}{4V(T/4)^n} \quad (13)$$

La Fig. 1 montre la boucle fermée avec deux degrés de liberté pour un système linéaire. Le bouclage  $k_M^T x_M$  place les valeurs propres du modèle à  $s = 0$  et le retour d’état  $k^T(x - x_M)$  stabilise le système et réduit l’influence de perturbations. Ce retour d’état peut être remplacé par un régulateur dynamique qui contient, par exemple, une composante intégrale, et il influence la robustesse de la boucle fermée (ceci n’est pas discuté ici).

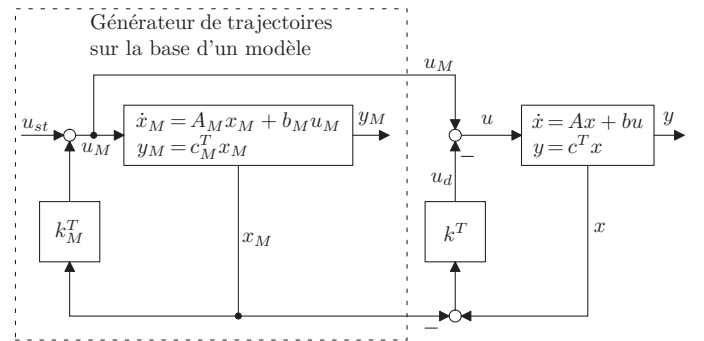


Fig. 1. Boucle fermée avec deux degrés de liberté pour un système linéaire général

Si les états  $x(0)$  et  $x_M(0)$  coïncident, le signal  $u_d$  est égal à zéro pour toute séquence  $u_{st}(t)$ . Donné l’ordre  $n$ , le gain  $V$  (voir (11)) et la différence  $y_S$  avec  $\sigma$  (voir (4)), la séquence  $u_{st}(t)$  qui réalise la transition de la sortie  $y_M$  de  $y_A$  à  $y_E$  en temps fini résulte de (5) et (6). La sortie  $y$

du système suit la trajectoire optimale  $y_M$ . Cependant les amplitudes de  $u_M(t)$  dépassent ceux de  $u_{st}$  et ils dépassent aussi la valeur  $u_M(T_+)$ .

L'ampleur de ce dépassement dépend de la valeur  $u_w$  choisi. Par conséquent on peut toujours trouver une valeur  $u_w$  telle que le dépassement de  $u_M(t)$  par rapport à  $u_M(T_+)$  reste dans les limites désirées.

#### A. Exemple 1

Soit le système représenté par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

et par deux triples  $(A, b, c^T) = (A_M, b_M, c_M^T)$  appropriés. Avec le choix d'un gain  $k_M^T$  approprié les trois valeurs propres du modèle  $(A_M, b_M, c_M^T)$  sont placées à  $s = 0$ , et avec  $k^T$  les valeurs propres du système  $(A, b, c^T)$  sont placées à  $s = -4$ . Pour que la sortie  $y$  du système passe de  $y_A = 0$  à  $y_E = 1$  on utilise la séquence optimale de la Section II pour une chaîne de  $n = 3$  intégrateurs.

Avec  $u_w = 1$  (i.e., la dérivée temporelle  $d^n y/dt^n$  est limitée par  $u_w$ ) on obtient  $T = 3.175$ , et la Fig. 2 montre que le signal d'entrée  $u = u_M$  a une amplitude maximale de 4.41.

Il est bien connu que les amplitudes du signal de commande dépendent de la vitesse désirée des transitoires. Une réduction des amplitudes d'entrée résulte lorsqu'on accepte une durée des transitoires rallongée. Si on réduit  $u_w$  à  $u_w = 0.15$  (ce qui mène à  $T = 5.975$ ), l'amplitude maximale de  $u = u_M$  est maintenant de 1.408 seulement (voir la Fig. 3).

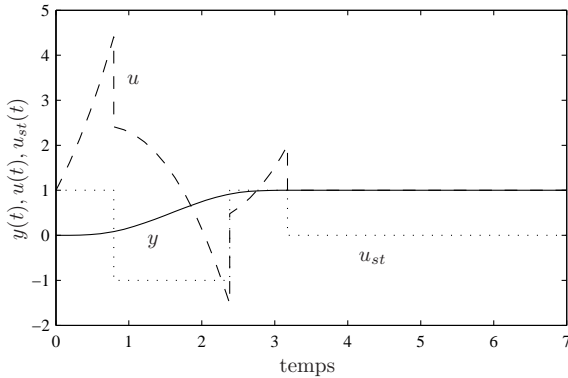


Fig. 2. Transitoires de référence ( $u_w = 1$ )

## IV. TENIR COMPTE DES ZÉROS DU SYSTÈME

Pour l'instant, supposons que le système à régler ait  $n_0$  zéros dans le demi-plan gauche. Alors le numérateur de  $F(s)$  peut être représenté comme

$$N(s) = V \prod_{i=1}^{n_0} (s - s_{0i}) \quad (14)$$

En principe on pourrait exécuter la planification des trajectoires sans tenir compte des zéros de  $F(s)$ . Cependant,

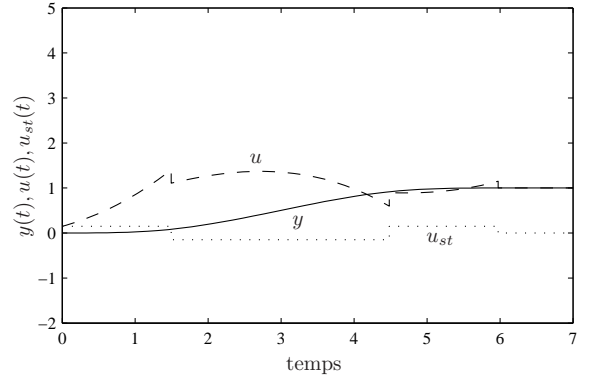


Fig. 3. Transitoires de référence ( $u_w = 0.15$ )

les zéros peuvent déformer les transitoires, voire engendrer des oscillations.

On obtient des phénomènes transitoires qui correspondent aux trajectoires optimales d'une chaîne d'intégrateurs d'une longueur  $n - n_0$  si l'on effectue une *compensation exacte* des zéros, c'est-à-dire si l'on choisit  $k_M^T$  en (10) tel que  $n_0$  valeurs propres de  $A_M + b_M k_M^T$  correspondent aux zéros de  $N(s)$ , c'est-à-dire

$$\det(sI - A_M - b_M k_M^T) = s^{(n-n_0)} \prod_{i=1}^{n_0} (s - s_{0i}) \quad (15)$$

La planification des trajectoires est alors simplifiée et peut être effectué pour le système réduit

$$G_{red}(s) = \frac{V}{s^{(n-n_0)}} \quad (16)$$

et les transitoires du système (7) se terminent en temps fini avec leur dérivée temporelle d'ordre  $n - n_0$  limitée par  $V u_w$ .

Il est évident qu'on ne peut pas "compenser" des zéros d'un système à régler qui se trouvent au demi-plan droit. Des transitoires de la sortie  $y$  en temps fini résultent si on néglige les zéros au demi-plan droit et place les  $n$  pôles par (10) à  $s = 0$ . Ces transitoires ont, naturellement, le comportement d'un système à phase non minimale, mais ils se terminent en temps fini.

#### A. Exemple 2

Considérons un système à déphasage non minimal représenté par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{-16(s-1)}{(s+2)^2(s+4)}$$

Il est évident que la contre-réaction des transitoires limite la vitesse à obtenir, soit par un retour d'état soit par une planification des trajectoires. Pour démontrer les résultats avec la planification proposée considérons qu'on veut obtenir une transition de  $y_A = 0$  à  $y_E = 1$  telle que les transitoires restent au-dessus de  $y = -0.27$ . Lorsqu'on place les trois pôles par (10) à  $s = 0$  et on utilise  $u_w = 0.05$  (qui mène à  $T = 3.42$ ) on obtient le transitoire montré en Fig. 4 (ligne solide).

Si, en outre, on utilise un contrôle retour d'état  $u(t) = -k^T x(t) + Lr(t)$ , où  $r(t) = 1(t)$  est le signal de référence, et choisit  $k^T$  tel que  $\det(sI - A + bk^T) = (s + 1)(s + 2.6)^2$  on obtient le transitoire également montré en Fig. 4 (ligne en tirets), qui reste aussi au-dessus de  $y = -0.27$ .

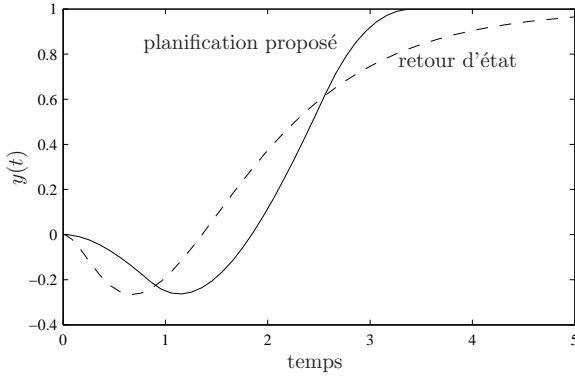


Fig. 4. Transitoires de référence ( $y_A = 0, y_E = 1$ )

## V. LIMITES DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

### A. Des zéros "mal amortis"

Si les zéros compensés correspondent aux pôles oscillants la planification des trajectoires pour le système réduit (16) peut mener à des signaux de commande oscillants, ce qu'on essaye d'éviter dans la plupart des cas. Aussi une planification de trajectoires sans tenir compte de ces zéros ne mène pas à des résultats satisfaisants, parce que ces zéros peuvent causer des transitoires oscillants.

On peut obtenir un signal de commande et des transitoires bien amortis lorsqu'on ne fait pas de *compensation exacte* d'une paire de zéros  $s^2 + 2D\omega_0s + \omega_0^2$ ,  $1 > D > 0$ , mais seulement une *compensation asymptotique*, c'est-à-dire si on remplace en (15) ce polynôme par le polynôme  $s^2 + 2\omega_0s + \omega_0^2$ , qui a des zéros réels.

En nommant la partie de  $N(s)$  qui contient les zéros "oscillants" par  $N^{osc}(s)$  et le polynôme correspondant qui assure la compensation asymptotique par  $N^{asy}(s)$  la planification des trajectoires utilise toujours le système (16), mais les transitoires de la sortie  $y$  sont caractérisées par

$$y(s) = \frac{N^{osc}(s)}{N^{asy}(s)} G_{red}(s) u_{st}(s) \quad (17)$$

maintenant. Cela montre que l'état final  $y_E$  n'est plus atteint en temps  $T$  fini mais seulement asymptotiquement, en fonction des zéros de  $N^{asy}(s)$ .

### B. Exemple 3

Considérons un système élastique (angle azimut d'un télescope) représenté par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{2.3016154(s^2 + 0.18s + 81.0081)(s^2 + 0.3s + 225.0225)(s^2 + 0.42s + 441.0441)}{s(s^2 + 0.22s + 121.0121)(s^2 + 0.34s + 289.0289)(s^2 + 0.46s + 529.0529)}$$

Lorsqu'on utilise un retour d'état de gain  $k_M^T$  qui place six pôles du modèle ( $A_M, b_M, c_M^T$ ) sous les zéros et le septième à  $s = 0$  (*compensation exacte*), on obtient un transitoire qui correspond au transitoire optimal d'un intégrateur simple.

La ligne solide dans la Fig. 5 montre le transitoire qui résulte lorsqu'on choisit  $u_w = 0.2$  et  $y_s = 1$ . A  $T = 1.738$  l'angle azimut a atteint l'état final  $y_E = 1$ . Mais le signal de commande (en tirets) continue à osciller, ce qui n'est pas désirable dans une réalisation concrète.

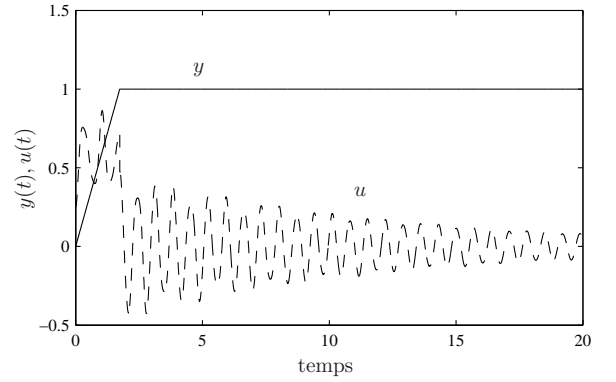


Fig. 5. Transitoires de référence ( $u_w = 0.25, y_A = 0, y_E = 1$ ), compensation exacte

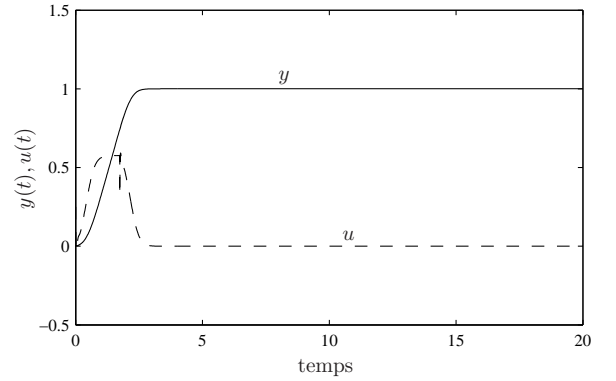


Fig. 6. Transitoires de référence ( $u_w = 0.25, y_A = 0, y_E = 1$ ), compensation asymptotique

Si on applique l'approche par *compensation asymptotique*, on obtient le résultat donné sur la Fig. 6. L'état final  $y_E = 1$  n'est plus atteint en un temps fini, mais la commande (en tirets) n'oscille plus.

### C. Contraintes à l'entrée du système

Malheureusement l'approche proposée ne permet pas une planification des trajectoires pour les systèmes généraux tel que les amplitudes des signaux  $u_M$  respectent une restriction  $|u_M| \leq u_0$  a priori. Alors, en présence de limitations d'entrées  $u_s = \text{sat}_{u_0}(u)$  défini par

$$\text{sat}_{u_0}(u) = \begin{cases} u_0 & \text{si } u > u_0 \\ u & \text{si } -u_0 \leq u \leq u_0, \quad u_0 > 0 \\ -u_0 & \text{si } u < -u_0 \end{cases} \quad (18)$$

on ne peut pas garantir explicitement que les signaux d'entrées respectent ces limites.

Une solution qui garantit des transitoires en temps fini consiste à essayer de trouver une valeur  $u_w$  qui, donné les

changements maximaux du signal de référence, ne produit pas des signaux  $|u| > u_0$  (voir Exemple 1).

Si  $u$  dépasse les limites existantes, la durée des transitoires  $y$  n'est plus finie. En plus des phénomènes de windup peuvent se produire.

En général le régulateur stabilisant contient des éléments dynamiques. Supposons qu'il est décrit par

$$u(s) = -G_C(s)y(s) \quad (19)$$

et qu'il est d'ordre  $n_C$  avec une fonction de transfert propre

$$G_C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \quad (20)$$

Donné le système (7) et le régulateur (19), le polynôme caractéristique de la boucle fermée est

$$P_C(s) = N_C(s)N(s) + D_C(s)D(s) \quad (21)$$

Ce polynôme est Hurwitz et il a  $n + n_C$  zéros. Lorsqu'on groupe  $n$  de ces zéros dans le polynôme  $\tilde{D}(s)$  et les  $n_C$  zéros restants dans le polynôme  $\Delta(s)$  on obtient

$$P_C(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s) \quad (22)$$

Dans le cas d'un régulateur d'état avec observateur  $\Delta(s)$  est le polynôme caractéristique de l'observateur (éventuellement avec observateur de perturbation) et  $\tilde{D}(s)$  contient les valeurs propres déterminées par le retour d'état.

Presque toujours [6] la partition (22) est aussi possible pour des régulateurs généraux (par exemple régulateur PI). Cette partition est, naturellement, pas unique. Le nombre de degrés de liberté permet d'influencer des effets divers [6].

Avec le polynôme  $\tilde{D}(s)$  et une représentation  $(A, b, c^T)$  du système, le retour d'état  $k^T$  résulte de  $\tilde{D}(s) = \det(sI - A + bk^T)$  par une comparaison de coefficients.

Si le signal  $u$  à l'entrée du système dépasse la limite  $u_0$ , des réactions inattendues peuvent se produire. Le danger d'un windup du régulateur (contrôler windup) existe toujours, lorsque les zéros de  $D_C(s)$  se trouvent près de l'axe imaginaire ou dans le demi-plan droit. Même sans éléments dynamiques dans le régulateur, comme par exemple dans le cas d'un régulateur d'état, les limitations peuvent provoquer un mauvais amortissement des phénomènes transitoires, voire même produire des cycles limites : on parle du phénomène de windup du système (plant windup) [6] dans ce cas.

On peut éviter le windup du régulateur par une méthode systématique, la technique de l'observateur (observer technique) [6]. Cette technique fait usage du polynôme

$$N_U(s) = D_C(s) - \Delta(s) \quad (23)$$

et d'un modèle de la saturation (18) comme il est montré en Fig. 7 (élément dynamique supplémentaire négligé à présent).

Cette structure de la boucle fermée est le pendant fréquentiel d'un régulateur d'état avec observateur, où on ajoute un modèle de la saturation au régulateur et utilise le signal restreint  $u_s$  comme signal d'entrée de l'observateur.

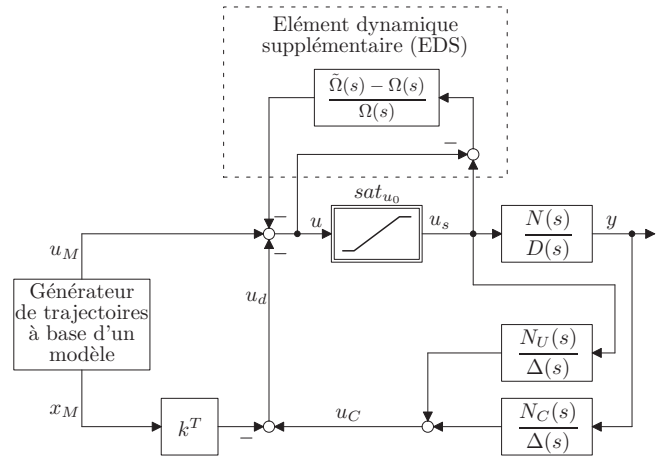


Fig. 7. Boucle fermée avec générateur de trajectoires et mesures pour éviter le windup

Cette technique a deux avantages. D'un côté, la saturation du signal d'entrée  $u$  ne provoque pas d'erreurs d'observation (la cause pour le windup du régulateur) et, d'un autre côté, la saturation actuelle à l'entrée du système ne devient plus active.

En plus, la fonction de transfert en  $u(s) = -G_L(s)u_s(s)$  de la partie linéaire de la boucle fermée, qui indique le danger d'un comportement instable à cause d'une saturation  $u_s = \text{sat}_{u_0}(u)$ , prend la forme simple

$$G_L(s) = \frac{\tilde{D}(s)}{D(s)} - 1 \quad (24)$$

(à nouveau l'élément dynamique supplémentaire négligé). Si  $G_L(s)$  ne satisfait pas un des critères qui garantissent la stabilité de la boucle fermée consistant d'une saturation isolée et d'une partie linéaire stable, il existe le danger du windup du système.

On peut éviter le windup du système à l'aide d'un élément dynamique supplémentaire (EDS) comme montré en Fig. 7. Les polynômes Hurwitz  $\Omega(s)$  et  $\tilde{\Omega}(s)$  ont le même degré, tel que le EDS est strictement propre. Avec le EDS le comportement  $u(s) = -G_{L\Omega}(s)u_s(s)$  de la partie linéaire devient

$$G_{L\Omega}(s) = \frac{\tilde{D}(s)\Omega(s)}{D(s)\tilde{\Omega}(s)} - 1 \quad (25)$$

La construction de l'EDS est particulièrement simple lorsqu'on choisit  $\tilde{\Omega}(s) = \tilde{D}(s)$ , de sorte qu'il faut trouver un polynôme  $\Omega(s)$  tel que la fonction de transfert

$$G_{L\Omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{D(s)} - 1 \quad (26)$$

satisfait, par exemple, le critère du cercle.

A l'aide de la technique de l'observateur et du EDS les problèmes causés par une saturation à l'entrée du système sont complètement évités. Par conséquent le signal  $u$  peut dépasser la limite  $u_0$  sans causer des problèmes. Seulement la durée des phénomènes transitoires n'est plus finie. On obtient des transitoires asymptotiques qui dépendent des zéros du polynôme  $\Omega(s)$ .

En cas d'un système instable, la prévention du windup du système est plus compliqué (voir [5]).

## VI. CONCLUSION

La planification explicite des trajectoires optimales pour des chaînes d'intégrateurs est aussi applicable pour une planification de trajectoires à la base d'un modèle pour des systèmes linéaires généraux. Si la fonction de transfert du système contient  $n_0$  zéros finis dans le demi-plan gauche, on peut les compenser exactement, ce qui mène à une planification de trajectoires pour une chaîne d'intégrateurs de longueur  $n - n_0$  (ordre du système moins nombre de zéros). Elle fournit des transitoires en temps fini, et pour des systèmes à phase minimale les transitoires ont une durée  $T$  la plus courte possible sous la restriction, que la dérivée temporelle de la sortie  $y$  de l'ordre  $n - n_0$  ne dépasse pas l'amplitude  $Vu_w$ .

S'ils existent des zéros dans le demi-plan droit, une compensation n'est plus possible. Dans ce cas on ignore ces zéros. Les transitoires résultants sont déformés par ces zéros, mais ils se terminent en un temps fini.

Si les zéros sont mal amortis (dans des systèmes élastiques, par exemple), une compensation complète de ces zéros a pour effet que les commandes résultantes ont un comportement oscillatoire prononcé. Des commandes bien amorties résultent lorsqu'on applique une compensation asymptotique de ces zéros. Cependant, cela produit des phénomènes transitoires asymptotiques.

Si le système contient un élément de saturation à l'entrée, des transitoires à temps fini résultent seulement si le signal de commande ne dépasse pas les limites existantes. Qui plus est, un dépassement des limites peut causer un windup, ce qui pourtant, peut être évité facilement. Seulement dans le cas d'un système instable la prévention du windup du système est plus compliqué (voir [5]).

Trois exemples illustrent la qualité de la planification de trajectoires présentée.

## VII. REMERCIEMENTS

Nous remercions sincèrement Joachim Rudolph pour l'aide qu'il nous a apportée dans la rédaction en français de cet article.

## RÉFÉRENCES

- [1] Burmeister H.-L. Zeitoptimale Übergangsvorgänge mit beschränkter  $n$ -ter Ableitung. *Zeitschrift Messen, Steuern, Regeln*, vol. 4, n° 10 pp. 407-409, 1961.
- [2] Föllinger O. *Optimierung dynamischer Systeme*. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1985.
- [3] Fliess M., Lévine J., Martin P. et Rouchon P. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 315, pp. 619-624, 1992.
- [4] Hagenmeyer V. et Zeitz M. Flachheitsbasierter Entwurf von linearen und nichtlinearen Vorsteuerungen. *at - Automatisierungstechnik*, vol. 52, pp. 3-12, 2004.
- [5] Hippe P. Windup prevention for unstable systems. *Automatica*, vol. 39, n° 11, pp. 1967-1973, 2003.
- [6] Hippe P. *Windup in control - Its effects and their prevention*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York London, 2006.
- [7] Rouchon P. et Rudolph J. Réacteurs chimiques différentiellement plats : planification et suivi de trajectoires. En Corriou, J.P. (Ed.) : *Commande de procédés chimiques - Réacteurs et colonnes de distillation*, chap. 5, pp. 163-200. Hermès Science Publications, 2001.
- [8] Sira-Ramirez H. et Agrawal S. Differentially flat systems. En F. Lewis (Ed.) : *Control engineering*, Marcel Dekker Inc., 2004