

Stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires affines

Walid Ben Mabrouk¹, Chakib Ben Njima¹, Hassani Messaoud¹

¹ Ecole nationale d'ingénieurs de Monastir, Rue Ibn El Jazzar, Monastir 5019, Tunisie
{walid.mabrouk; chakib.bennjima; hassani.messaoud}@enim.rnu.tn

Germain Garcia^{2,3}

² CNRS ; LAAS ; 7 avenue du colonel Roche, F-31077 Toulouse, France

³ Université de Toulouse ; UPS ; INSA ; INP ; ISAE ; LAAS

7 avenue du colonel Roche, F-31077 Toulouse, France

garcia@laas.fr

Résumé— Dans cet article, on considère le problème de la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires affines. L'idée est de proposer une loi de commande par retour d'état permettant de contraindre la norme de l'état du système entre deux bornes pendant un intervalle de temps fini. La méthode est simple, et peut être vue comme une extension de la méthode de Sontag [18] proposée pour la stabilisation des systèmes non linéaires. Deux exemples illustrent la théorie proposée et mettent en évidence sa simplicité.

Mots-clés— Stabilisation en temps fini, Systèmes affines.

I. INTRODUCTION

La théorie de Lyapunov et les techniques de stabilisation asymptotique ont été bien exploitées pour résoudre les problèmes de synthèse des lois de commande aussi bien pour les systèmes linéaires que pour les systèmes non linéaires. Toutefois, dans certaines applications, la stabilité asymptotique n'est ni suffisante, ni primordiale. En effet, certains systèmes ne possèdent pas de points d'équilibre et par conséquent ils ne sont pas asymptotiquement stabilisables. Il convient donc, d'analyser la bornitude de l'état, plutôt que de le stabiliser asymptotiquement. De plus, certains systèmes sont connus pour fonctionner pendant un intervalle de temps fini tout en nécessitant un état contraint en norme, donc on ne peut plus utiliser le concept de la stabilité au sens de

Lyapunov. Il est à noter aussi que certains systèmes sont stables au sens de Lyapunov mais à cause de leur réponse, qui peut être acceptable, peuvent être considérés pratiquement stables. Il est clair donc qu'on a besoin d'une notion de stabilité plus appropriée pour couvrir ces diverses situations. C'est pourquoi, le concept de stabilité en temps fini (STF) [1], [2], [3], [19], [20] et un concept plus général appelé stabilité pratique (SP) [10], [12], [13], [14], [15], [17] ont été introduits. Ces concepts supposent qu'une fois la commande stabilisante en temps fini déterminée que l'on peut garantir que l'état reste borné pendant un intervalle de temps fini ou infini. La stabilité pratique a plusieurs formulations dans la littérature. En 1955, Chetaev [5] a suscité le besoin d'une nouvelle notion de stabilité. Il a introduit le concept de (S_I, S_A, T) -stabilité garantissant que lorsque l'état initial appartient à l'ensemble S_I , l'état instantané appartient à S_A durant tout l'intervalle de temps T . Ce concept est également nommé stabilité en temps fini [20] ou stabilité en temps court [6]. Ensuite, le terme stabilité pratique a été introduit en 1961, par LaSalle et Lefschetz [13] pour les systèmes qui fonctionnent sur un intervalle de temps infini avec des contraintes sur l'état. Weiss et Infante [20] ont été les premiers à proposer des conditions suffisantes garantissant la stabilité en temps fini lorsque les ensembles (S_I, S_A) sont des hyper sphères. Notons que les concepts de stabilité pratique et de stabilité en temps

fini sont définis par rapport à des ensembles de l'espace d'état et non pas par rapport à un point tel que le point d'équilibre comme dans la théorie de Lyapunov. Ensuite, Weiss [19] à donné des conditions nécessaires de stabilité pratique. Michel [14] à dégagé à partir de propriétés données par Weiss des conditions suffisantes par rapport à des ensembles variant dans le temps. Dans [15], Michel a étudié la stabilité pratique des systèmes discontinus. Gruyitch [9], [10] a ensuite introduit la notion de stabilité pratique avec temps d'établissement. Des travaux récents en relation avec cette notion utilisant les normes vectorielles ont été proposés dans [11], [17]. Dans [7] et [17] le terme stabilité pratique est défini par rapport à un intervalle de temps fini comme dans le cas de la stabilité en temps fini. Toutes les références citées précédemment concernent les systèmes non linéaires. Des travaux récents ont traité le cas des systèmes linéaires [1], [2], [3], [4], [8]. Motivés par le fait qu'ils n'existent pas a priori de travaux sur la stabilisation en temps fini pour les systèmes non linéaires affines et du fait que tous les travaux récents traitent le cas des systèmes linéaires [1], [2], [3], on considère dans cet article le problème de la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires affines.

Cet article est organisé comme suit: on introduit dans la section II quelques préliminaires. Les définitions de stabilité et stabilisation en temps fini sont alors introduites. Dans la section III, on présente le résultat principal qui permet le calcul d'une commande par retour d'état qui stabilise le système dans le contexte de la stabilité en temps fini. Un exemple illustre l'approche proposée. Une conclusion termine l'article.

Notation. Les notations sont standards. La norme euclidienne est noté par $\|\cdot\|$. On note par $\lambda_{\max}(A)$ la valeur propre maximale de la matrice A et par A^T la matrice transposée de A .

II. STABILITÉ EN TEMPS FINI

A. Préliminaires

Considérons le système suivant:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

En se référant à [7], [8] et [17] on donne la définition suivante:

Définition 1 : Le Système (1) est stable en temps fini par rapport à (S_I, S_A, T) si et seulement si:

$$x(t_0) \in S_I \Rightarrow x(t) \in S_A, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad (2)$$

où S_I est l'ensemble des conditions initiales et S_A est l'ensemble des état admissibles. On peut choisir par exemple ces ensembles comme suit :

$$S_I = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq c_1, \quad c_1 > 0\} \quad (3)$$

$$S_A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq c_2, \quad c_1 < c_2\} \quad (4)$$

Dans ce cas la STF implique la satisfaction de la relation (2) avec des contraintes sur l'état initial $x(t_0)$ et l'état actuel $x(t)$, définies respectivement par les relations (3) et (4).

La stabilité en temps fini signifie que la trajectoire de l'état émanant d'une condition initiale (située dans une boule de rayon c_1) reste dans une région (situé dans une boule de rayon c_2) durant un intervalle de temps T .

Remarque 1 : Il est important de signaler que la notion de stabilité en temps fini introduite dans cet article est différente de celle citée dans certains travaux [16], où elle signifie la convergence rapide.

B. Formulation du problème

Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (5)$$

On s'intéresse à la détermination d'une commande continue par retour d'état qui assure la stabilité en temps fini du système en boucle fermée dans le sens de la définition 1.

Remarque 2 : La continuité de la commande est une préférence lorsqu'il s'agit de la stabilisation des systèmes du fait qu'elle garantit l'existence des solutions pour le système différentiel.

On a le résultat important suivant qui sera utilisé dans les prochains paragraphes.

Lemme 1 : Soit V une fonction candidate de Lyapunov $V(x) = x^T x$ et on suppose qu'il existe un scalaire positif α tel que :

$$\dot{V}(x) \leq \alpha V(x) \quad (6)$$

Alors le système (5) est stable en temps fini par rapport à (c_1, c_2, T) si on vérifie l'inégalité suivante:

$$T < \frac{1}{\alpha} \log \frac{c_2}{c_1} \quad (7)$$

Preuve 1 : En intégrant (6) de 0 à T , $T > 0$, on obtient

$$V(x) \leq V(x_0) e^{\alpha T}$$

Si $x_0^T x_0 \leq c_1$, le système (5) est stable en temps fini par rapport à (c_1, c_2, T) si

$$x^T x \leq c_2 \quad \forall t \in [0, T] \quad (8)$$

D'après la définition de $V(x)$, on peut écrire

$$x^T x \leq e^{\alpha T} x_0^T x_0 \leq e^{\alpha T} c_1 < c_2$$

et la relation (7) est ainsi vérifiée.

Considérons maintenant le système affine suivant

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x) u_i \quad (9)$$

où $x = [x_1 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $u = [u_1 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ est la commande. $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \forall i = 0, 1, \dots, m$, sont des fonctions lisses sur \mathbb{R}^n et $f_0(0) = 0$.

Notons par

$$a(x) = f_0(x)^T x \quad (10a)$$

$$B(x) = [b_1(x), \dots, b_m(x)] \quad (10b)$$

$$b_i(x) = f_i(x)^T x, i = 1, \dots, m \quad (10c)$$

Définition 2 : Le système (9) est stabilisable en temps fini par rapport à (c_1, c_2, T) s'il existe une commande par retour d'état continue $u(x) = [u_1(x), \dots, u_m(x)]^T$ tel que le système en boucle fermée s'écrivant comme suit :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x) u_i(x) \quad (11)$$

est stable en temps fini par rapport à (c_1, c_2, T) .

On est maintenant en position de définir le problème qu'on veut résoudre.

Problème 1 : Stabilisation en temps fini

Soient $0 < c_1 < c_2$ et $T > 0$, Trouver une loi de commande par retour d'état $u(x)$ qui stabilise le système (9) en temps fini par rapport à (c_1, c_2, T) .

III. RESULTAT PRINCIPAL

Le résultat principal de cet article peut maintenant être énoncé.

Théorème 1 : Soient $0 < c_1 < c_2$ et $T > 0$. S'il existe un scalaire positif α , qui satisfait :

$$c(x) = \frac{\alpha}{2} x^T x - a(x) \geq 0 \quad (12)$$

Pour tout x tel que $b(x) = 0$ et $T < \frac{1}{\alpha} \log \frac{c_2}{c_1}$, alors le système (9) est stabilisable en temps fini par rapport à (c_1, c_2, T) et la commande stabilisante est définie par :

$$u_i(x) = \begin{cases} -b_i(x) \frac{-c(x) + |c(x)| \sqrt{1 + \frac{b(x)^2}{1 + |c(x)|}}}{b(x)} & \text{si } b(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } b(x) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

où

$$b(x) = \|B(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m b_i^2(x) \quad (14)$$

Preuve 2 : On commence par prouver que la loi de commande décrite par la relation (13) est continue sur \mathbb{R}^n , puis, qu'en utilisant cette commande, le système (9) est stable en temps fini par rapport à (c_1, c_2, T) .

Ainsi, pour $i = 1, \dots, m$, d'après (13)

$$\lim_{b(x) \rightarrow 0} u_i(x) = \lim_{b(x) \rightarrow 0} -b_i(x) \frac{-c(x) + |c(x)| \sqrt{1 + \frac{b(x)^2}{1 + |c(x)|}}}{b(x)}$$

par ailleurs pour $b(x) \rightarrow 0$ on a

$$\sqrt{1 + \frac{b(x)^2}{1 + |c(x)|}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{b^2(x)}{1 + |c(x)|}$$

En tenant compte de l'inégalité (12) on a $|c(x)| = c(x)$

Et par suite

$$\lim_{b(x) \rightarrow 0} u_i(x) = \lim_{b(x) \rightarrow 0} -b_i(x) \frac{1}{2} \frac{c(x)}{1 + c(x)} b(x) = 0$$

$u(x)$ est continue à l'origine. La continuité sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est immédiate. D'où, $u(x)$ est continue partout.

Pour prouver que la loi de commande (13) assure la stabilisation en temps fini du système (11) il faut satisfaire l'inégalité (7) et la fonction $V(x) = x^T x$ satisfait :

$$\dot{V}(x) \leq \alpha V(x) \quad (15)$$

En utilisant la relation (11) on a

$$\dot{V}(x) = 2 \dot{x}^T x = 2f_0^T(x) x + 2 \sum_{i=1}^m f_i^T(x) x u_i(x) \quad (16)$$

Si $b(x) = 0$, en utilisant les relations (10a) et (13) on obtient $\dot{V}(x) = 2a(x)$ et d'après la condition (12), on satisfait la relation (15).

Si $b(x) \neq 0$ on a

$$\dot{V}(x) = 2 \left(a(x) - \sum_{i=1}^m b_i^2 \frac{-c(x) + |c(x)| \sqrt{1 + \frac{b(x)^2}{1 + |c(x)|}}}{b(x)} \right)$$

En associant (10b) et (14) on a

$$\dot{V}(x) = 2a(x) + 2c(x) - 2|c(x)| \sqrt{1 + \frac{b(x)^2}{1 + |c(x)|}}$$

En remplaçant $a(x)$ par son expression obtenue de la relation (12), on a

$$\dot{V}(x) = \alpha x^T x - 2|c(x)| \sqrt{1 + \frac{b(x)^2}{1 + |c(x)|}} \quad (16)$$

Par conséquent $\dot{V}(x) \leq \alpha x^T x = \alpha V(x)$. En utilisant le lemme 1, on conclut que le système (10) est stable en temps fini par rapport à (c_1, c_2, T) si $T < \frac{1}{\alpha} \log \frac{c_2}{c_1}$.

Exemple 1 :

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1^3 + 4x_2^2 x_1 + x_1 + 2x_1 u \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_2 + x_2 u \end{cases} \quad (17)$$

D'après la relation (9) on a

$$f_0(x) = [4x_1^3 + 4x_2^2 x_1 + x_1 \quad x_2^3 + x_2]^T$$

$$f_1(x) = [2x_1 \quad x_2]^T$$

et d'après les relations (10a) et (10c) on a

$$a(x) = 4x_1^4 + 4x_2^2 x_1^2 + x_1^2 + x_2^4 + x_2^2$$

$$= (2x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2 + x_2^2$$

$$b_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 ; b(x) = b_1(x)^2 = (2x_1^2 + x_2^2)^2$$

Il est facile de vérifier que si $b(x) = 0$, alors on a pour tout $\alpha \geq 2$

$$a(x) \leq \frac{\alpha}{2} x^T x \quad (18)$$

En choisissant $\alpha = 2$ et en utilisant le théorème 1, on sait que le système (17) est stabilisable en temps fini par rapport à $(0.1, 0.74, 1)$ par la loi de commande (13). La figure 1 montre $V(x) = x^T x$ en boucle ouverte. Il est clair que le système en boucle ouverte n'est pas stable en temps fini par rapport à $(0.1, 0.74, 1)$. La figure 2 montre que $V(x) = x^T x < 0.74$ pour le système en boucle fermée durant l'intervalle de temps défini par $T = 1$, si on considère des valeurs initiales vérifiant $x^T x \leq 0.1$. On peut voir dans la figure 3 que la commande assigne $\dot{V}(x) < \alpha V(x)$. La figure 4 montre l'évolution de la commande et la Figure 5 l'évolution des composantes de l'état.

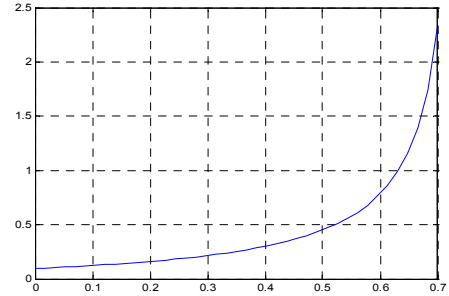


Fig. 1. Evolution de V (boucle ouverte)

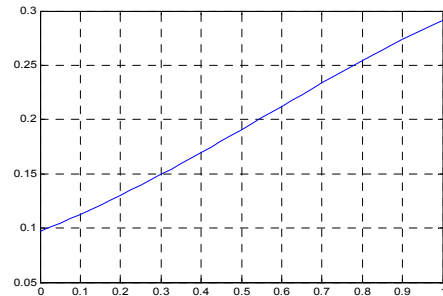


Fig. 2. Evolution de V (boucle fermée)

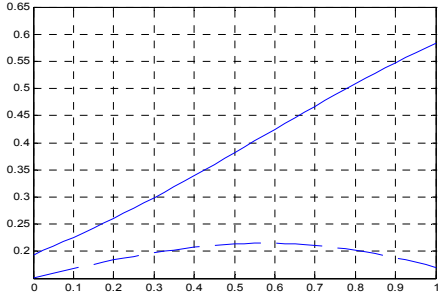


Fig. 3. \dot{V} (interrompu), αV (continu)

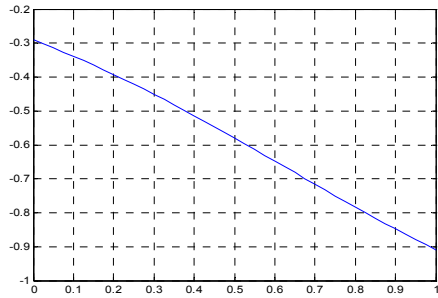


Fig. 4. Evolution de la commande

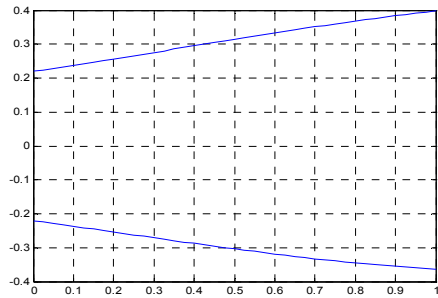


Fig. 5. Evolution de l'état

Exemple 2 :

Considérons maintenant le système avec entrées multiples suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1^2 x_3 + x_1 + 4x_1^3 + 2x_1 u_1 + 2x_2 u_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_2 - x_2 u_1 \\ \dot{x}_3 = -4x_1^3 + x_3 \end{cases} \quad (19)$$

D'après la relation (9) on a

$$f_0(x) = [4x_1^2 x_3 + x_1 \quad x_2^3 + x_2 \quad -4x_1^3 + x_3]^T$$

$$f_1(x) = [2x_1 \quad -x_2 \quad 0]^T, \quad f_2(x) = [2x_2 \quad 0 \quad 0]^T.$$

et d'après les relations (10a) et (10c) on a

$$a(x) = 4x_1^3 x_3 + 4x_1^4 + x_1^2 + x_2^4 + x_2^2 - 4x_1^3 x_3 + x_3^2$$

$$= (2x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$b_1(x) = 2x_1^2 - x_2^2, \quad b_2(x) = 2x_1 x_2.$$

En utilisant la relation (14) on obtient l'expression de $b(x)$, soit : $b(x) = b_1(x)^2 + b_2(x)^2 = (2x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2 x_2^2$

Il est facile de vérifier que si $b(x) = 0$, alors on a pour tout $\alpha \geq 2$

$$a(x) \leq \frac{\alpha}{2} x^T x \quad (20)$$

En choisissant $\alpha = 2$ et en utilisant le théorème 1, on sait que le système (19) est stabilisable en temps fini par rapport à $(0.15, 1.1, 1)$ par la loi de commande (13). La figure 6 montre $V(x) = x^T x$ en boucle ouverte. Il est clair que le système en boucle ouverte n'est pas stable en temps fini par rapport à $(0.15, 1.1, 1)$. La figure 7 montre que $V(x) = x^T x < 1.1$ pour le système en boucle fermée durant l'intervalle de temps défini par $T = 1$, si on considère des valeurs initiales vérifiant $x^T x \leq 0.15$. On peut voir dans la figure 8 l'évolution de la commande et dans la figure 9 l'évolution des composantes de l'état.

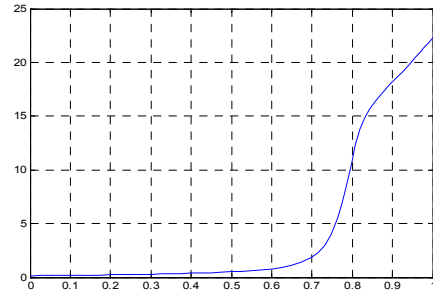


Fig. 6. Evolution de V (boucle ouverte)

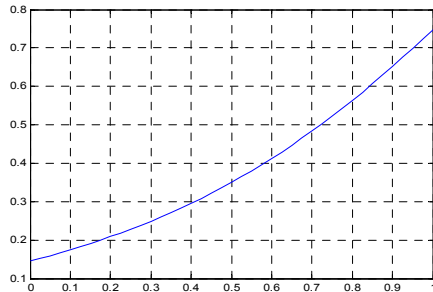


Fig. 7. Evolution de V (boucle fermée)

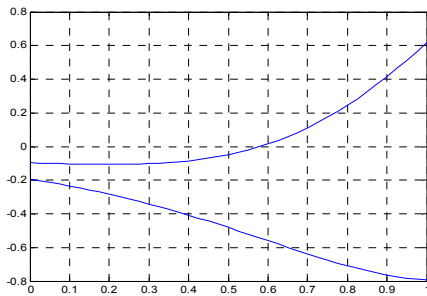


Fig. 8. Evolution de la commande

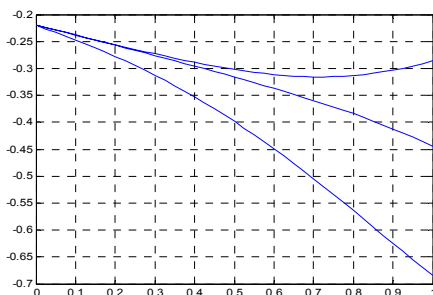


Fig. 9. Evolution de l'état

IV. CONCLUSION

Le problème de la stabilisation en temps fini des systèmes affines est résolu en donnant une formule explicite d'une loi de commande par retour d'état. Se basant sur la construction d'une loi de commande universelle donnée par Sontag [18], et en vérifiant certaines conditions simples, notre loi de commande assure pour un système non linéaire affine la bornitude de la norme de son état durant l'intervalle de temps fixé. L'application de cette technique sur un exemple pratique est l'un des objectifs des travaux à venir.

REFERENCES

- [1] Amato F., Ariola M., Cosentino C. Finite-time stabilization via dynamic output feedback, *Automatica* 42. 337-342, 2006.
- [2] Amato F., Ariola M., Cosentino C., Abdallah C. T. et Dorato P. Necessary and sufficient condition for finite-time stability of linear systems. *Proc of the American Control Conference*, p. 4452-4456, Denver, Colorado, 2003.
- [3] Amato F., Ariola M., et Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances. *Automatica* 37(9):1459-1463, 2001.
- [4] Ben Mabrouk W., Messaoud H., Garcia G. Practical stability and stabilization of linear systems, Proc of the 17th IEEE Mediteranean Conference on control and automation, 2009, Thessaloniki, Greece.
- [5] Chetaev N. G. Stability of motion (in russian), GITTL, Moscow, 1955 (English Translation: Oxford: Pergamon Press, 1961)
- [6] Dorato P. Short-time stability in linear time-varying systems. In Proc. IRE International convention record part 4, pages 83-87, 1961.
- [7] Garashchenko F. G. Study of practical stability problems by numerical methods and optimization of beam dynamics. *Pricl. Matem. Mekhan*, 51, N.6, p.559-564, 1987.
- [8] Garcia G., Tarbouriech S., Bernussou J. Finite time stabilization of linear time-varying continuous systems, *IEEE Trans. On Automatic control*, vol 54, N.2, pp 364-369, 2009.
- [9] Gruyitch L. T. Synthesis of an automatic control system of a rigid body movement through a fluid. M. S. thesis, University of Belgrade, 1970.
- [10] Gruyitch L. T. On practical stability. *International journal of control*, 17, 881-887, 1973.
- [11] Gruyitch L. T., Richard J-P., Borne P. et Gentina J-C. *Stability Domains*, Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [12] Lakshmikantham V., Leela S., Martynuk A. A. *Practical Stability of Nonlinear Systems*, World Scientific, Singapore, 1990.
- [13] LaSalle J. P. et Lefschetz S. Stability by Lyapunov's direct method, academic press, New York, 1961.
- [14] Michel A. N. On the bounds of the trajectories of differential systems. *International journal of control*, 10, 593-600, 1969.
- [15] Michel A. N. Practical stability and finite time stability of discontinuous systems. *IEEE transactions on circuit theory*, 19, 123-129, 1972.
- [16] Moulay E., Perruquetti W. Lyapunov-based approach for finite time stability and stabilization, Proc of the 44th IEEE Conference on decision and control, and the european control conference 2005, Seville, Spain.
- [17] Perruquetti W., Richard J-P., Gruyitch L. T. et Borne P. On practical stability with the settling time via vector norms, *INT. J. Control*, 1995, vol. 62, N1, 173-189.
- [18] Sontag E. A universal construction of Arstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems control Lett.*, 13:117-123, 1989.
- [19] Weiss L. Converse theorems for Finite time stability. *SIAM journal on applied mathematics*, 16 (1968), pp. 1319-1324.
- [20] Weiss L. et Infante E. F. 1967, Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 12, p. 54-59.