

# Estimation paramétrique des systèmes linéaires à paramètres variables dans le temps

Michel GUGLIELMI

Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

UMR 6597

1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 NANTES Cedex 03, France.

*Michel.Guglielmi@irc cyn.ec-nantes.fr*

**Résumé**— Cet article concerne l'estimation des paramètres des systèmes dynamiques linéaires à temps continu dont les paramètres sont des fonctions polynomiales du temps. Pour cette classe de systèmes, on montre que la transformée de Mellin est un outil parfaitement adapté car l'estimation des paramètres se ramène alors à la simple résolution d'un système linéaire dont les termes sont constitués uniquement des transformées des entrées-sorties. Les problèmes numériques sont minimisés grâce à l'introduction de la Transformée de Mellin Réduite qui permet de diviser les grandeurs manipulées, limitant ainsi l'explosion numérique. Ceci est d'autant plus intéressant lorsqu'on est en présence de bruits de mesure. Un premier exemple, en simulation, illustre le comportement de la méthode proposée.

**Mots-clés**— identification, système linéaire variable, estimation paramétrique, transformation de Mellin.

## I. INTRODUCTION

L'estimation paramétrique des systèmes linéaires est un problème ancien sur lesquels une abondante littérature existe depuis de nombreuses années ([1], [2]). Si pour les systèmes linéaires stationnaires, les méthodes sont avérées, il n'en est pas de même pour les systèmes dont les coefficients sont variables dans le temps. Parmi ces systèmes, on distingue les systèmes stationnaires par morceaux dont la problématique est spécifique (datation des sauts paramétrique, amplitude...)([3], [8]) et ceux dont les coefficients sont des fonctions continues du temps. Ces derniers sont largement utilisés dans le domaine de la commande adaptative par exemple ([7]) mais apparaissent aussi dans d'autres contextes ([12] par exemple...). L'estimation paramétrique peut alors être abordée par la modification des algorithmes d'identification développés dans le cadre stationnaire afin de leur conférer une propriété de "suivi" des évolutions paramétriques (marche au hasard des coefficients...). Si un des avantages de cette approche est de ne nécessiter que peu de connaissances *a priori* sur les paramètres, une de ses limites réside dans la convergence des méthodes qui nécessite que la vitesse de variations des coefficients reste faible devant la dynamique propre du système. Une autre démarche consiste, à partir de la connaissance de loi de variation des paramètres, à identifier les coefficients de ces modèles. Dans le cadre de cette approche, on considère, ici, une classe particulière : celle des systèmes dont les coefficients sont des fonctions polynomiales du temps. On trouve de tels systèmes dans le domaine mécanique par exemple ([13]). Dans ce cas, la Transformée de Mellin est un outil particulièrement bien adapté pour l'estimation. En effet, toutes les transformées des grandeurs dérivées suc-

cessives des entrées/sorties se déduisent des seules transformées des entrées/sorties du système ainsi que celles des produits de polynômes par une dérivée quelconque des entrées/sorties. Cette propriété permet de ramener l'estimation des coefficients des polynômes à la simple résolution d'un système linéaire. Lorsque les grandeurs sont entachées de bruits, la solution est obtenue en minimisant un critère des moindres carrés. Ceci peut être vu comme une extension de la méthode des moments ([4], [5]), déjà utilisée sur des systèmes linéaires stationnaires et limitée à des valeurs entières de la transformée de Mellin ([9], [10]).

L'article suivant est décomposé de la façon suivante : le premier paragraphe comprend les définitions de base, en particulier celle de la Transformée de Mellin Tronquée (TMT)  $TMT_f(s) = \int_a^b t^{s-1} f(t) dt$  (liée au fait que l'enregistrement des entrées/sorties est forcément limité) et les résultats concernant les TMT de toutes les dérivées et de tous les produits d'une grandeur par un polynôme en  $t$ . Dans le second paragraphe, l'algorithme d'estimation paramétrique est développé. Il aboutit à la résolution d'un système linéaire où les termes sont fonctions des échantillons des TMT des entrées/sorties. Le problème de la croissance numérique des TMT est abordé et atténué grâce à l'utilisation de la propriété d'invariance de la TMT. L'amélioration du comportement numérique est obtenue par l'introduction de la Transformée de Mellin Tronquée Réduite Tmt. On montre que la variance de la Tmt d'un bruit blanc est une fonction décroissante de  $s$ , ce qui rend l'utilisation de la Tmt très intéressante dans le cas de mesures bruitées. Les performances de l'algorithme proposé sont testées sur un système linéaire du premier ordre, d'abord dans le cas déterministe puis dans le cas stochastique. Les premiers résultats statistiques illustrent le comportement robuste de la méthode vis-à-vis des aléas de mesure.

## II. DÉFINITIONS ET ÉLÉMENTS MATHÉMATIQUES

On associe à toute fonction  $f(t)$  définie sur sur l'intervalle  $[a, b]$ , sa transformée de Mellin tronquée  $TMT(s)$ ,  $s \in \mathcal{C}$ , lorsque l'intégrale existe, est définie par :

$$TMT_f(s) = \int_a^b t^{s-1} f(t) dt \quad (1)$$

Cette définition est une simple restriction de la transformée de Mellin originale ([6]).

Proposition 1 : La TMT des dérivées successives de  $f(t)$  s'expriment à partir de celle de  $f(t)$ .

La dérivée première,  $TMT_{f^{(1)}}(s)$  est définie par :

$$TMT_{f^{(1)}}(s) = \int_a^b t^{s-1} f^{(1)}(t) dt$$

En intégrant par parties, on a :

$$TMT_{f^{(1)}}(s) = t^{s-1} f(t)|_a^b - (s-1) \int_a^b t^{s-2} f(t) dt$$

$$TMT_{f^{(1)}}(s) = t^{s-1} f(t)|_a^b - (s-1) TMT_{f^{(0)}}(s-1)$$

où  $f|_a^b$  représente  $f(b) - f(a)$ .

Ce résultat est valable entre les  $TMT$  des dérivées  $f^{(n)}$  et  $f^{(n-1)} \forall n$ .

$$TMT_{f^{(n)}}(s) = t^{s-1} f^{(n-1)}(t)|_a^b - (s-1) TMT_{f^{(n-1)}}(s-1)$$

Par récurrence, on obtient alors que :

$\forall n$ , la  $TMT$  de  $f^{(n)}$  s'exprime en fonction uniquement de  $TMT_f$  décalée en  $s$  et des dérivées successives de  $f$  calculées aux bornes  $a$  et  $b$  (cf : Annexe A).

$$TMT_{f^{(n)}}(s) = (-1)^n \prod_{j=1}^{j=n-1} (s-j) TMT_{f^{(0)}}(s-n) + C_n(s, f(a), f(b), \dots, f^{n-1}(a), f^{n-1}(b)) \quad (2)$$

avec :

$$C_n(s, f(a), f(b), \dots, f^{n-1}(a), f^{n-1}(b)) = \dots \left[ \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k t^{s-k-1} f^{(n-k-1)}(t) \prod_{j=1}^{j=k} (s-j) + t^{s-1} f^{(n-1)}(f)|_a^b \right] \quad (3)$$

Proposition 2 : Pour tout polynôme  $p(t)$ , la  $TMT$  du produit  $p(t)f(t)$  s'exprime à partir de celle de  $f(t)$ .

Soit  $p(t)$  le polynôme de degré  $P$  défini par  $p(t) = \sum_{j=0}^{j=P} \alpha_j t^j$ , on a :

$$TMT_{pf}(s) = \int_a^b t^{s-1} p(t) f(t) dt$$

$$TMT_{pf}(s) = \int_a^b t^{s-1} \sum_{j=0}^{j=P} \alpha_j t^j f(t) dt$$

$$TMT_{pf}(s) = \sum_{j=0}^{j=P} \alpha_j \int_a^b t^{s-1+j} f(t) dt$$

Soit finalement :

$$TMT_{pf}(s) = \sum_{j=0}^{j=P} \alpha_j TMT_f(s+j) \quad (4)$$

### III. ESTIMATION PARAMÉTRIQUE : PRINCIPE

Soit le système dynamique  $\Sigma$  linéaire, non stationnaire, dont les paramètres sont des fonctions polynomiales du temps :

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = u(t) \quad (5)$$

où :  $n$  est l'ordre du système et  $a_i(t) = \sum_{j=0}^{j=P_i} \alpha_{i,j} t^j$

On suppose connus l'ordre  $n$  ainsi que les degrés des polynômes  $a_i(t) \forall i \in [1, n]$ .

REMARQUE : Le second membre de (5) est limité à  $u(t)$  mais tous les résultats obtenus sont généralisables aux systèmes où le second membre serait de la forme :  $b_0(t) \frac{d^{(n)}u}{dt^n} + b_1(t) \frac{d^{(n-1)}u}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(t) \frac{du}{dt} + b_n(t)u$ . Les résultats obtenus pour la sortie  $y(t)$  sont applicables à l'entrée  $u(t)$

Soit  $N_p = \sum_{i=1}^{i=n} (P_i + 1)$  le nombre total de paramètres.

On considère l'évolution du système sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . On suppose connu l'état du système  $[\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} \dots \frac{dy}{dt} y]$  à l'instant initial  $t = 0$  et final  $t = T$ .

En prenant la  $TMT$  sur  $[0, T]$  des deux membres, on obtient :

$$\int_0^T t^{s-1} \left[ \frac{d^{(n)}y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y \right] dt = \int_0^T t^{s-1} u(t) dt$$

Soit :

$$TMT_{y^{(n)}}(s) + TMT_{a_1 y^{(n-1)}}(s) \dots TMT_{a_{n-1} y^{(1)}}(s) + TMT_{a_n y} = TMT_u(s) \quad (6)$$

En utilisant (2) et (4), tous les termes de gauche de l'équation (6) s'expriment en fonction de la seule  $TMT_y$ .

#### Estimation des paramètres

Soit  $\theta^T = [\alpha_{1,0} \dots \alpha_{1,P_1} \dots \alpha_{n,0} \dots \alpha_{n,P_n}]$  l'ensemble des  $N_p$  paramètres à estimer.

L'équation (6) peut s'écrire  $\forall s$  :

$$\phi(s) \theta = b(s) \quad (7)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \phi(s)^T &= [TMT_{y^{(n-1)}}(s) \dots TMT_y(s) \dots TMT_y(s + P_n)]^T \\ b(s) &= TMT_u(s) - TMT_{y^{(n)}}(s) \end{aligned}$$

Tous les termes de  $\phi(s)$  se ramènent donc uniquement à des fonctions de la  $TMT$  de  $y(t)$  décalée. Les décalages sont négatifs de 1 à  $n-1$  et positifs quand on multiplie par un polynôme (le décalage étant égal à l'ordre de chaque monôme). Il en est de même pour  $b(s)$  qui ne dépend aussi que de la  $TMT$  de  $y$  décalée de  $n$  et de la  $TMT$  de  $u$ . Donc :

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \phi(P_1, \dots, P_n, TMT_y(s), \dots, TMT_y(s - (n-1))) \\ b(s) &= b(s, TMT_y(s-n), TMT_u(s)) \end{aligned} \quad (8)$$

Pour une séquence de  $S$  valeurs réelles,  $s_k, s_k \in [S_1, S_2]$ , tels que les  $TMT_y$  et  $TMT_u$  existent, on a, en posant :

$$\Phi(S_1, \dots, S_2) = \begin{vmatrix} \phi(S_1, P_1, \dots, P_n, TMT_y(S_1), \dots, TMT_y(S_1 - (n-1))) \\ \dots \\ \phi(S_2, P_1, \dots, P_n, TMT_y(S_2), \dots, TMT_y(S_2 - (n-1))) \end{vmatrix} \quad (9)$$

et

$$B(S_1, \dots, S_2) = \begin{vmatrix} TMT_u(S_1) - TMT_{y^{(n)}}(S_1) \\ \dots \\ TMT_u(S_2) - TMT_{y^{(n)}}(S_2) \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\Phi(S_1, \dots, S_2) \theta = B(S_1, \dots, S_2) \quad (11)$$

En choisissant  $S$  égal au nombre  $N_p$  de coefficients recherchés, l'estimation de  $\theta$  est obtenue par la résolution du système linéaire régulier (11) :

$$\theta_e = [\Phi(S_1, \dots, S_2)^T \Phi(S_1, \dots, S_2)]^{-1} \Phi(S_1, \dots, S_2)^T B(S_1, \dots, S_2) \quad (12)$$

L'algorithme d'identification se résume par :

Etape 1 : Choisir la durée  $T$ , et un ensemble  $N_s$  de points  $s_k$ ,  $s_k \in [S_1, S_2]$

Etape 2 : Calcul des TMT de  $y$  et de  $u$  pour l'ensemble des valeurs  $s_k$ .

Etape 3 : Elaboration des éléments de régression  $\Phi(S_1, \dots, S_2)$  (9) et  $B(S_1, \dots, S_2)$  (10).

Etape 5 : Résoudre (11)

Le nombre de points  $N_s$  nécessaire est supérieur au nombre de paramètres  $N_p$ . Compte-tenu des décalages, il est égal à :

$$N_s = N_p + n + \max_1(P_i - i) \quad i \in [1, n] \quad (13)$$

#### IV. EXEMPLE

L'algorithme obtenu est utilisable pour tout système linéaire d'ordre  $n$ . A titre d'exemple, les résultats de la méthode proposée sont présentés pour le système du premier ordre suivant :

$$\frac{dy}{dt} + (\alpha_1 + \alpha_2 t)y = u(t) \quad (14)$$

de paramètres :  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = -0.001$ .

Ce système, initialement au repos, est soumis à une entrée  $u(t)$  pendant 80 s et relaxé jusqu'à son retour au repos. La période d'échantillonnage  $\delta$  des entrées/sorties est de 0.01 s (figure 1).

$$\theta^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T.$$

Le calcul numérique de la TMT est simplement, si  $N$  est le nombre de points, calculée par la formule des trapèzes :

$$TMT_y(s) = 0.5\delta \sum_{i=1}^{i=N-1} (y(t_{i+1})t_{i+1}^{s-1} + y(t_i)t_i^s).$$

Les TMT de  $y(t)$  et de  $u(t)$  sont calculées pour  $N_s = 4$ ,  $s_k = 1, 2, 3, 4$ .

Les paramètres estimés obtenus sont :  $\alpha_1 = 1.0007, \alpha_2 = -0.001$ .

#### V. AMÉLIORATION DU COMPORTEMENT NUMÉRIQUE

Un des problèmes de la transformée de Mellin concerne son évaluation numérique. Très rapidement, sa valeur devient très grande quand  $s$  croît. Par exemple, pour le système précédent, on atteint déjà des valeurs de l'ordre de  $10^6$  pour  $s = 4$  (figure 2).

On peut limiter les explosions numériques en utilisant la propriété d'invariance en dilatation de la Transformée de

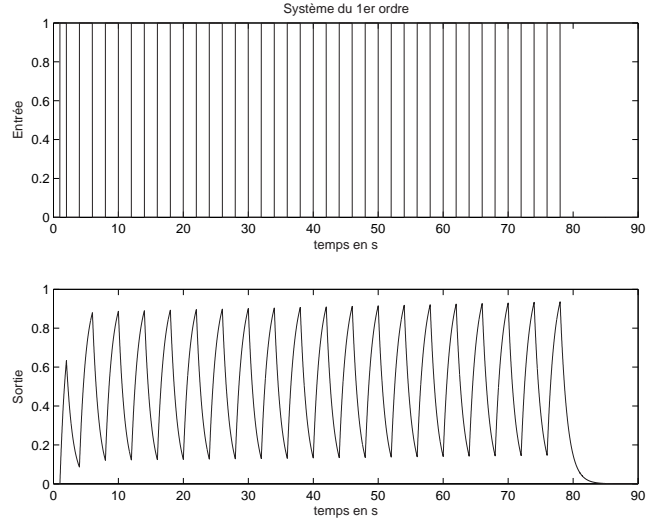


Fig. 1. Entrée-Sortie ( $\delta t = 0.01$  s,  $T = 90$  s)

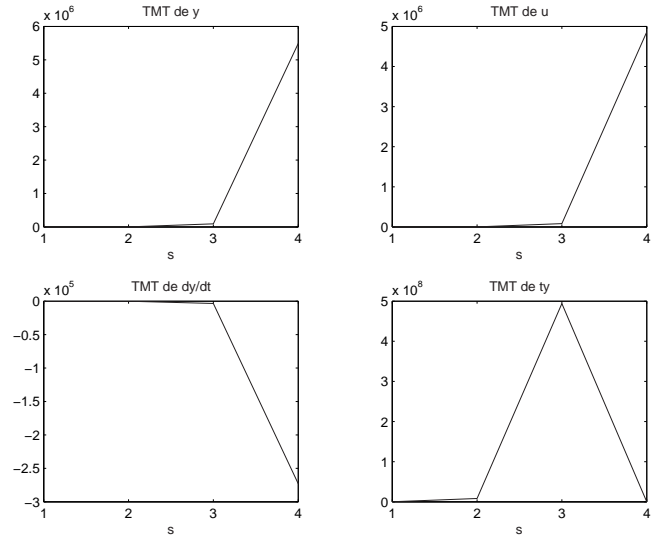


Fig. 2. Transformées de Mellin Tronquées  $\delta t = 0.01$  s,  $T = 90$  s

Mellin qui est conservée pour  $t \in [0, T]$ .

Par changement de variable  $\tau = t/T$  :

$$TMT_y(s) = T^s \int_0^1 \tau^{s-1} y(T\tau) d\tau \quad (15)$$

La Transformée de Mellin tronquée réduite  $Tmt$  est définie par :

$$Tmt_y(s) = TMT_y(s)/T^s \quad (16)$$

L'équation (7) peut être divisée par  $T^s$ . On montre que tous les termes de cette nouvelle équation peuvent s'exprimer en fonction de la  $Tmt_y$ . On a :

$$\frac{1}{T^s} [TMT_{y^{(n)}}(s) + TMT_{a_1 y^{(n-1)}}(s) \dots TMT_{a_{n-1} y^{(1)}}(s) + TMT_{a_n y}] = Tmt_u(s) \quad (17)$$

Toutes les quantités  $\frac{TMT_{a_i y^{(i)}}(s)}{T^s}$  s'expriment en fonction de la seule  $Tmt_y(s)$  (cf : Annexe C (21 et 22)).

Pour le système précédent, dans les mêmes conditions, les valeurs numériques sont divisées par un facteur  $10^6$  (figure

3)

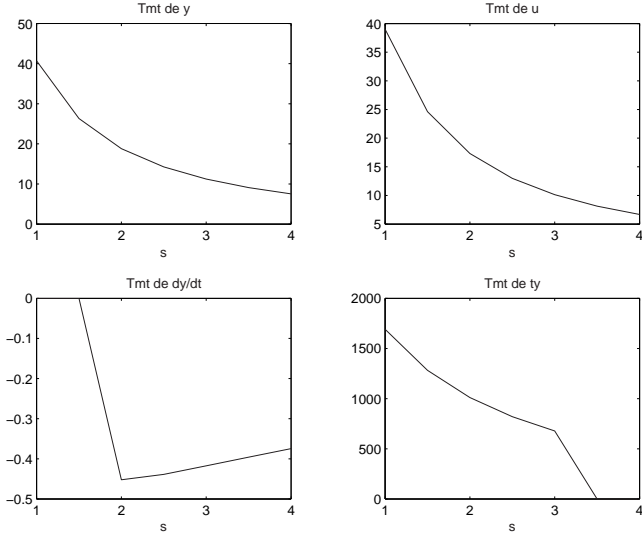


Fig. 3. Transformées de Mellin tronquées réduites  $\delta = 0.01$  s,  $T = 90$  s

## VI. SYSTÈME BRUITÉ

On considère, à présent, le système (5) en supposant que la grandeur mesurable  $y_m$  est entachée d'un bruit.

$$y_m(t) = y(t) + dB(t) \quad (18)$$

où  $B(t)$  est un mouvement brownien ordinaire de diffusion  $q$ .

La transformée de Mellin étant linéaire, on a :

$$TMT_{y_m} = TMT_y + TMT_{dB}.$$

La  $TMT_{dB} = \int_0^T t^{s-1} dB(t)$  n'existe au sens de la norme  $L^2$  que pour  $s > 1/2$  [11].

Sa variance est égale à :  $V_{TMT_{dB}} = T^{2s-1} \frac{q}{2s-1}$ .

La  $TMT_{y_m}$  est donc une variable aléatoire d'espérance mathématique  $TMT_y(s)$  et de variance  $T^{2s-1} \frac{q}{2s-1}$ . Quant à la  $Tmt_{y_m}$ , son espérance est égale à  $Tmt_y(s)$  et sa variance à  $\frac{q}{T(2s-1)}$  reste numériquement bornée quand  $T$  croît (et tend même vers 0).

Cette propriété renforce l'intérêt d'utiliser les  $Tmt$ .

Dans ce cadre, tous les termes de l'équation d'estimation (11) sont des variables aléatoires. En effectuant un échantillonnage de  $s_k$  valeurs dans un intervalle  $S_1, S_2$   $S_1 > 1/2$ , l'estimateur est celui qui minimise l'erreur quadratique moyenne par rapport au vecteur des paramètres  $\theta$  ([5]).

$$\min_{\theta} = \|\Phi(s_1, s_2 \dots) \theta - B(s_1, s_2 \dots)\| \quad (19)$$

## VII. EXEMPLE

L'algorithme (19) est appliqué sur le système (14) bruité. On choisit une séquence  $s_k$  sur l'intervalle  $S_1 = 1, S_2 = 5$  échantillonné au pas  $\delta s = 0.1$ .

Le rapport signal sur bruit  $SNR$  est défini par :

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sum e_b^2}{\sum y^2}$$

Pour un  $SNR = 20dB$ , les grandeurs caractéristiques  $Tmt$  (avec les mêmes valeurs de  $T$  et  $s_k$ ) sont représentées sur la figure (5).

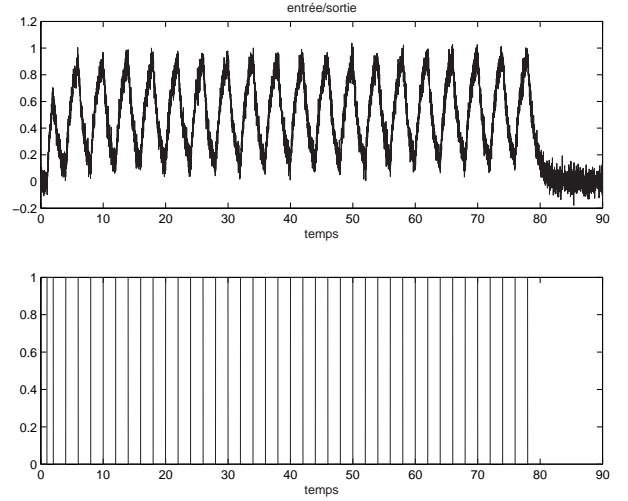


Fig. 4. Entrée-Sortie ( $\delta = 0.01$  s,  $T = 90$  s,  $SNR = 20dB$ )

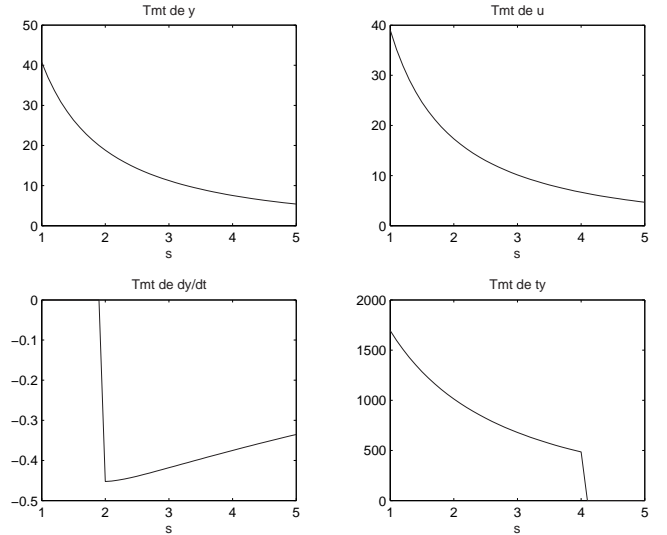


Fig. 5. Transformées de Mellin tronquées réduites  $\delta = 0.01$  s,  $T = 90$  s  $SNR = 20dB$

Les paramètres obtenus sont :  $\alpha_1 = 0.9994$  et  $\alpha_2 = -0.0010$ .

*analyse statistique*

Ici, sont présentés les premiers résultats concernant les caractéristiques statistiques de l'estimateur.

Le premier concerne la distribution des estimées. Pour  $SNR = 20\text{db}$  et  $N_e = 1000$  répétitions, la moyenne et l'écart-type des paramètres sont :

$$\bar{\alpha}_1 = 1.0005, \bar{\alpha}_2 = -0.0010$$

$$\sigma_{\alpha_1} = 0.0044, \sigma_{\alpha_2} = 9.0478 \cdot 10^{-5},$$

et la distribution est la suivante :

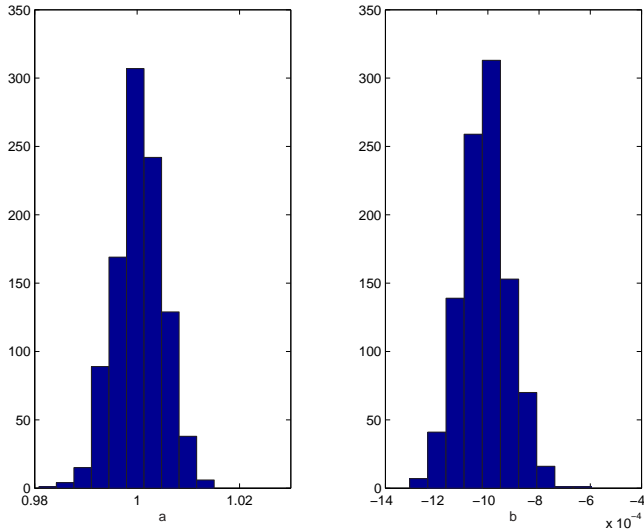


Fig. 6. Distribution des estimées,  $SNR = 20\text{ dB}$ ,  $a = \alpha_1$ ,  $b = \alpha_2$

Le second concerne les résultats obtenus lorsque le rapport  $SNR$  varie.

On calcule l'erreur quadratique moyenne :

$$C_i(SNR) = \frac{1}{N_e} \sum_1^{N_s} (\theta_i - m_i)^2 \quad i \in [1, 2] \quad (20)$$

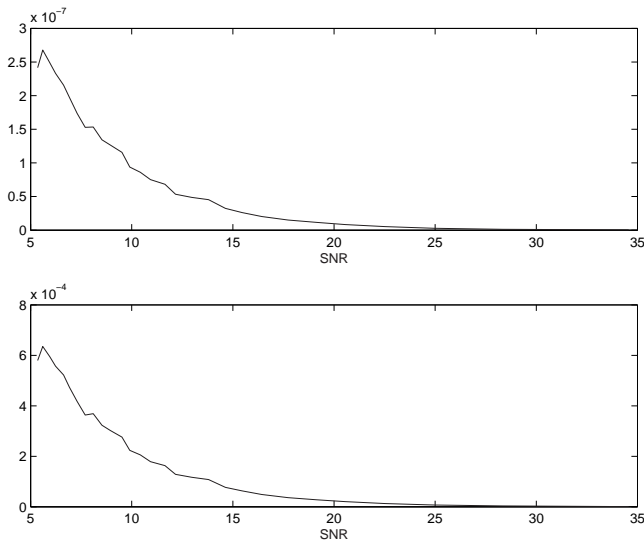


Fig. 7. Erreur quadratique moyenne (1000 essais), en haut  $\alpha_2$ , en bas  $\alpha_1$

## VIII. CONCLUSION

Dans cet article, il a été montré que la transformée de Mellin réduite sur l'intervalle d'observation est parfaitement adaptée à l'identification des systèmes linéaires non stationnaires dont les paramètres sont des fonctions polynômiales du temps. La propriété remarquable utilisée concerne le fait que toutes les transformées des grandeurs nécessaires pour l'estimation des paramètres s'expriment à partir de décalages adéquates des seules transformées des entrées-sorties. L'estimation des paramètres est alors la solution d'un simple système linéaire régulier si les données sont sans bruit et la résolution au sens des moindres carrés d'un ensemble d'équations surabondant. Par l'introduction de la Transformée de Mellin réduite qui utilise la propriété d'invariance de la transformée de Mellin sur  $[0, T]$ , le comportement numérique de la méthode proposée est largement amélioré. Sans changer la solution, chaque équation peut être divisée par  $T^s$  évitant ainsi l'explosion numérique quand  $s$  est grand. Ceci est un aspect original de la méthode proposée qui trouve tout son intérêt quand les grandeurs sont bruitées.

Sur un premier exemple simple mais caractéristique, les performances déterministes et statistiques sont présentées. Les premiers résultats obtenus en simulation montrent une bonne robustesse de l'estimation vis-à-vis des bruits de mesure, ce qui est attendu puisque la base de la méthode est une transformation intégrale.

Les performances théoriques de cet estimateur en présence de bruit restent à étudier et font l'objet de travaux actuels. Par ailleurs, l'utilisation de ces résultats à des systèmes plus complexes est en cours.

## RÉFÉRENCES

- [1] Ljung L. *System identification : theory for the user*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987
- [2] Ljung L. et Soderström S. *Theory and Practice of Recursive Identification*. The MIT Press Signal Processing, Optimization, and Control Series, Cambridge, 1983
- [3] Basseville M. et Nikiforov I. *Detection of Abrupt Changes - Theory and Application*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1993
- [4] Trigeassou J. C. Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique : Application à l'identification des systèmes linéaires. Thèse d'Etat. Université de Poitiers, 1987.
- [5] Guglielmi M. et al. *Signaux aléatoires : modélisation, estimation, détection*. Information-Commande-Communication, IC2, Hermès, 2004
- [6] Godement R., *Analyse mathématique III : Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann* Springer Verlag 2002
- [7] Lozano R. et Taouatou D., *Identification et commande adaptative*, Information-Commande-Communication, IC2, Hermès, 2001.
- [8] Poinet Ph., Détection de ruptures dans les systèmes linéaires via les systèmes singuliers. Thèse de doctorat de l'Université de Nantes, 1995
- [9] Dreano P. Identification des systèmes à représentation continue par moments partiels. Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1993
- [10] Brienne J.P. et al. Identification des systèmes linéaires par la transformée de Mellin, Première Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA, Lille, France, 5-8 Juillet 2000
- [11] Maybeck P.S. *Stochastic Models, Estimation and Control Vol. 1*. Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1982
- [12] Hopkins J. et Romeo F. A wavelet-based approach for the identification of linear time-varying dynamical systems, Journal of Sound and vibrations, doi :10.1006/jsvi.1999.2752, 2000

[13] Spiridonakos M.D., Poulimenos A.G. et Fassois S.D. Output-only identification and dynamic analysis of time-varying mechanical structures under random excitation : A comparative assessment of parametric methods. Journal of Sound and vibrations, doi :10.1016/j.jsv.2009.10.005, 2009

## IX. ANNEXES

### A. Annexe A

On a :

$$TMT_{f^{(n)}}(s) = t^{s-1} f^{(n-1)}(t)|_a^b - (s-1)TMT_{f^{(n-1)}}(s-1)$$

Soit :

$$TMT_{f^{(n)}}(s) = t^{s-1} f^{(n-1)}(t)|_a^b - (s-1)TMT_{f^{(n-1)}}(s-1)$$

$$TMT_{f^{(n-1)}}(s-1) = t^{s-2} f^{(n-2)}(t)|_a^b - \dots$$

....

$$TMT_{f^{(n-k)}}(s-k) = t^{s-k-1} f^{(n-k-1)}(t)|_a^b - \dots$$

...

$$TMT_{f^{(2)}}(s-(n-2)) = t^{s-(n-1)} f^{(1)}(t)|_a^b - \dots$$

$$(s-(n-1))TMT_{f^{(1)}}(s-(n-1))$$

$$TMT_{f^{(1)}}(s-(n-1)) = t^{s-n} f^{(0)}(t)|_a^b - \dots$$

$$(s-n)TMT_{f^{(0)}}(s-n)$$

En multipliant l'équation  $k$ , ( $\forall k \in [1, n-1]$ ) par  $(-1)^{k-1}(s-1)\dots(s-(k-1))$  et en sommant, on obtient :

$$TMT_{f^{(n)}}(s) = (-1)^n (s-1)\dots(s-(n-1))TMT_{f^{(0)}}(s-n) \dots$$

$$+ [\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t^{s-k-1} f^{(n-k-1)}(t) \prod_{j=1}^{j=k} (s-j) + \dots$$

$$t^{s-1} f^{(n-1)}(f)]|_a^b$$

En posant :

$$C_n(s, f(a), f(b), \dots, f^{n-1}(a), f^{n-1}(b)) = \dots$$

$$[\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t^{s-k-1} f^{(n-k-1)}(t) \prod_{j=1}^{j=k} (s-j) + \dots$$

$$t^{s-1} f^{(n-1)}(f)]|_a^b$$

on obtient :

$$TMT_{f^{(n)}}(s) = (-1)^n \prod_{j=1}^{j=n-1} (s-j) TMT_{f^{(0)}}(s-n) + \dots$$

$$C_n(s, f, f^{(1)}, \dots, f^{n-1}, a, b) \quad \blacksquare C.Q.F.D.$$

### B. Annexe B

On a :

$$\int_a^b t^{s-1} \left[ \frac{d^{(n)}y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y \right] dt = \int_a^b t^{s-1} u dt$$

La  $TMT$  étant une transformation linéaire, on obtient :

$$\int_a^b t^{s-1} \frac{d^{(n)}y}{dt^n} dt + \int_a^b t^{s-1} a_1(t) \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} dt + \dots$$

$$\int_a^b t^{s-1} a_{n-1} \frac{dy}{dt} dt + \int_a^b t^{s-1} a_n y dt = \int_a^b t^{s-1} u(t) dt$$

En utilisant le fait que les coefficients sont des polynômes, on arrive à :

$$\int_a^b t^{s-1} \frac{d^{(n)}y}{dt^n} dt + \sum_{j=0}^{j=P_1} \alpha_{1,j} \int_a^b t^{s-1+j} \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} dt + \dots$$

$$\sum_{j=0}^{j=P_{n-1}} \alpha_{n-1,j} \int_a^b t^{s-1+j} \frac{dy}{dt} dt + \sum_{j=0}^{j=P_n} \alpha_{n,j} \int_a^b t^{s-1+j} a_n y dt = \dots$$

$$\int_a^b t^{s-1} u(t) dt$$

Soit en tenant compte de (4) :

$$TMT_{y^{(n)}}(s) + \sum_{j=0}^{j=P_1} \alpha_{1,j} TMT_{y^{(n-1)}}(s+j) + \dots$$

$$\sum_{j=0}^{j=P_{n-1}} \alpha_{n-1,j} TMT_{y^{(1)}} + \sum_{j=0}^{j=P_n} \alpha_{n,j} TMT_{y^{(s+j)}} = TMT_u(s)$$

Or tous les termes  $TMT_{y^{(k)}}(s+l) \forall k \in [1, n] \forall et l \in [1, P_i]$  s'expriment en fonction de la seule  $TMT$  de  $y(t)$  décalée en  $s$ . (2)

Finalement :

$$TMT_u(s) = (-1)^n \prod_{j=1}^{j=n-1} (s-j) TMT_{f^{(0)}}(s-n) + \dots$$

$$C_n(s, f(a, b), f^{(1)}(a, b), \dots, f^{n-1}(a, b)) + \dots$$

$$\sum_{j=0}^{j=P_1} \alpha_{1,j} (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{j=n-2} (s-j) TMT_{f^{(0)}}(s-(n-1)) + \dots$$

$$+ C_{n-1}(s, f(a, b), f^{(1)}(a, b), \dots, f^{n-2}(a, b)) + \dots$$

$$\sum_{j=0}^{j=P_{n-1}} \alpha_{n-1,j} TMT_{y^{(1)}} + \sum_{j=0}^{j=P_n} \alpha_{n,j} TMT_{y^{(s+j)}}$$

où :  $f^{(i)}(a, b) \forall i \in [0, n-1]$  désigne les valeurs de  $f^{(i)}$  aux points  $a$  et  $b$ .

### C. Annexe C

Si  $Tmt_y(s) = \frac{TMT_y(s)}{T^s}$ , on a  $\forall k \in [1, n]$  :

$$TMT_{y^{(k)}}(s) = (-1)^k \prod_{j=1}^{j=k} (s-j) TMT_y(s-k) + \dots$$

$$C_k(s, y, y^{(1)}, \dots, y^{k-1}, 0, T)$$

$$\frac{TMT_{y^{(k)}}(s)}{T^s} = (-1)^k \prod_{j=1}^{j=k} (s-j) \frac{TMT_{y^{(s-k)}}}{T^s} + \dots$$

$$\frac{C_k(s, y, y^{(1)}, \dots, y^{k-1}, 0, T)}{T^s}$$

Or :

$$TMT_y(s-k) = T^{s-k} Tmt(s-k)$$

$$\frac{TMT_{y^{(s-k)}}}{T^s} = T^k Tmt(s-k) \quad \blacksquare C.Q.F.D. \quad (21)$$

En outre  $\forall P$  :

$$TMT_{py}(s) = \sum_{j=0}^{j=P} \alpha_j TMT_y(s+j)$$

$$\frac{TMT_{py}(s)}{T^s} = \sum_{j=0}^{j=P} \alpha_j \frac{TMT_{y^{(s+j)}}}{T^s} \quad (22)$$

$$\frac{TMT_{py}(s)}{T^s} = \sum_{j=0}^{j=P} \alpha_j T^j Tmt_y(s+j) \quad \blacksquare C.Q.F.D.$$

### D. Annexe D

On a  $\forall n > 0$  :

$$TMT_{y^{(n)}}(s, t + \Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} u^{s-1} y^{(n)}(u) du =$$

$$\int_0^t u^{s-1} y^{(n)}(u) du + \int_t^{t+\Delta t} u^{s-1} y^{(n)}(u) du$$

$$TMT_{y^{(n)}}(s, t + \Delta t) = TMT_{y^{(n)}}(s, t) + \int_t^{t+\Delta t} u^{s-1} y^{(n)}(u) du$$

Et :

$$Tmt_{y^{(n)}}(s, t + \Delta t) =$$

$$\frac{1}{1+\frac{\Delta t}{t}} Tmt_{y^{(n)}}(s, t) + \frac{1}{1+\frac{\Delta t}{t}} \int_t^{t+\Delta t} u^{s-1} y^{(n)}(u) du$$

$$\int_t^{t+\Delta t} u^{s-1} y^{(n)}(u) du =$$

$$-(s-1) \int_t^{t+\Delta t} u^{s-1} y^{(n-1)}(u) du + (t+\Delta t)^s y(t+\Delta t) - y^{(n)}(t)$$