

Analyse de la stabilité des systèmes à commutation à temps continu en utilisant les systèmes de comparaison

Selma BEN ATTIA¹, Salah SALHI¹, Mekki KSOURI¹, Jacques BERNUSSOU²

¹Laboratoire d'Analyse et de Commande des Systèmes, LACS,
Ecole National d'Ingénieurs de Tunis, ENIT
Le Belvédère, BP 1002, Tunis.
benattiaselma@yahoo.fr, salhis@lycos.fr, mekki.ksouri@enit.rnu.tn

²Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes
LAAS, CNRS
7 avenue du Colonel Roche - 31077 Toulouse Cedex 4, France.
bernusou@laas.fr

Résumé— Dans cet article, une analyse de la stabilité d'un système à commutation à temps continu a été envisagée. L'approche utilisée est basée essentiellement sur les conditions de stabilité issues des normes vectorielles correspondant à une fonction de Lyapunov vectorielle. Nous avons pu caractériser le système à commutation étudié par un modèle global représenté par une matrice caractéristique sous la forme en flèche. Cette formulation a permis en utilisant la notion du système de Comparaison et le critère du Borne-Gentina d'établir une condition suffisante d'analyse de stabilité.

Mots-clés— système à commutation, fonction de Lyapunov vectorielle, système de comparaison, forme en flèche, Matrice, matrice de Metzeler, système positif.

I. INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques hybrides (SDH) sont des systèmes dynamiques faisant intervenir simultanément des phénomènes de type dynamique continue et événementielle. Les systèmes à commutation représentent une classe de systèmes dynamiques hybrides qui fascinent par une simplicité structurelle et par une complexité des phénomènes caractéristiques. Un problème important dans le domaine des systèmes à commutation est la recherche de critères de stabilité. En effet, le problème de stabilité des systèmes à commutation est complexe et intéressant. L'exemple de systèmes asymptotiquement stables qui, par une séquence de commutations, donnent lieu à un comportement instable, est bien connu. Le cas de systèmes instables qui, grâce à une loi de commutation particulière, donnent lieu à un comportement stable est aussi remarquable. L'article de référence dû à Liberzon et Morse [2] énumère quelques problèmes de stabilité pour le cas des systèmes à commutation autonomes :

Problème A Trouver des conditions de stabilité telles que le système est asymptotiquement stable quelle que soit la loi de commutation.

Problème B Identifier les classes de lois de commutation pour lesquelles le système à commutation est asymptotiquement stable.

Problème C Construire une loi de commutation qui rend le système asymptotiquement stable.

Pour les systèmes à commutation, l'évolution de l'état est gouverné tant par les champs de vecteurs que par le signal de commutation. Dans ce sens, les concepts de stabilités, qui portent sur des propriétés qualitatives des solutions, peuvent être définis soit sur l'état continu x , et ceci indépendamment du signal de commutation : on parlera alors de propriété uniforme (sous entendu par rapport au signal de commutation σ), ou bien sur l'état continu x et ce pour un signal de commutation : on parlera de propriété conditionnelle (sous entendu par rapport à une évolution de σ donnée). Plusieurs approches ont été proposées pour garantir la stabilité d'un système linéaire à commutation sous une loi de commutation arbitraire [5][6]. Ces approches sont fondées essentiellement sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique commune. Toutefois, l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune n'est qu'une condition suffisante pour la stabilité. Dans [8], on démontre analytiquement que l'on peut avoir des systèmes commutés qui sont stables et pour lesquels il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune. Ce résultat a déterminé la communauté scientifique à chercher d'autres types de fonctions de Lyapunov. On retrouve dans la littérature plusieurs fonctions de Lyapunov qui peuvent être regroupées, d'une manière générale, sous le nom de fonctions de Lyapunov multiples [4]. Comme autre approche pour tester la stabilité uniforme d'un système linéaire à commutation, on trouve les techniques utilisant l'algèbre de Lie [2][3].

Dans cette article, nous faisons recours au notion de fonction de Lyapunov vectorielle [14] [15][20][21] pour étudier la stabilité du système à commutation.

Le concept de norme vectorielle fut introduit par Robert [14] dans un domaine relatif à l'étude de la convergence des récurrences linéaires en analyse numérique. Ces travaux ont ensuite été développés par Maître , Robert , Deutch et Grujic [16][18] pour l'étude des récurrences linéaires de grande dimension. L'utilisation des normes vectorielles lors de l'étude des systèmes continus linéaires et non linéaires a permis de mettre en évidence diverses propriétés des systèmes pseudo-majorants [18] [20]. En outre, cet outil a

été appliqué pour résoudre les problèmes d'analyse à savoir l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires en utilisant essentiellement les propriétés des matrices à éléments non négatifs [24]. Nous proposons ainsi une condition suffisante de stabilité asymptotique des systèmes non linéaires et des systèmes linéaires à temps variant (LTV). Dans ce travail, l'étude est basée sur un choix particulier d'une fonction de Lyapunov vectorielle. Le recours aux notions des normes vectorielles a contribué à la simplification de la mise en oeuvre des techniques de majoration, ceci découle essentiellement des propriétés d'homogénéité et d'indépendance par rapport au temps des normes [9]. La définition d'une nouvelle fonction de Lyapunov non stationnaire bien que la norme vectorielle ne dépend pas explicitement du temps constitue l'intérêt de cette approche. Il en résulte l'énoncé d'un critère de stabilité asymptotique des systèmes dont les coefficients de leurs matrices d'état sont mal connus ou ils peuvent dépendre de l'état, du temps et/ou de tout autre paramètre ou perturbation extérieure. Nous proposons aussi une modélisation des systèmes linéaires à commutation à temps continu basée sur la représentation sous forme en flèche des matrices caractéristiques du système. L'adoption de cette représentation explicitant les spécificités dynamiques et structurelles associée à l'exploitation du critère de Borne et Gentina [10] a permis de formuler des conditions suffisantes d'analyse de la stabilité du système à commutation à temps continu sous des commutations arbitraires.

II. RÉSULTAT PRINCIPAL : ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES À COMMUTATION À TEMPS CONTINU

L'étendue des résultats d'analyse des systèmes complexes dépend étroitement de la représentation adoptée pour le processus, ainsi que de la méthode d'étude retenue. En effet, il a été montré dans [11] que le choix de la représentation intervient, d'une manière essentielle, sur l'étendue des résultats des études lorsque le système est complexe et qu'il est souvent souhaitable de mettre la matrice caractéristique sous une forme canonique explicitant les spécificités dynamiques et structurelles de celui-ci. Par ailleurs, la détermination d'une part du domaine de stabilité de en plus en plus large, basée sur les systèmes de comparaison, a montré que l'étude de la stabilité conduit à des résultats correspondant à des conditions suffisantes plus ou moins contraignantes selon la description adoptée [11] et plus particulièrement dans le cas de la représentation des systèmes utilisant la forme en flèche [23]. Nous envisageons dans ce qui suit d'exploiter ces résultats afin d'élaborer une formulation de vérification des conditions de stabilité des systèmes à commutation à temps continu sous des commutations arbitraires. Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude de la stabilité d'un système à commutation sur une N famille des sous-systèmes linéaires décrits par les équations d'état suivantes :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(t) A_i^c x(t) \quad (1)$$

Avec :

$\xi_i(t)$ est la fonction indicateur suivante :

$$\xi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{quand le } i^{\text{eme}} \text{ mode } A_i \text{ est activé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de commutation $\xi_i(t)$ est une fonction exogène qui dépend seulement du temps et non plus de l'état du système.

$$A_i^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^i & -a_1^i & & -a_k^i & & -a_{n-1}^i \end{bmatrix}$$

Les termes a_k^i correspondent aux coefficients du polynôme caractéristique $P_{A_i^c}(\lambda)$ de A_i^c défini par :

$$P_{A_i^c}(\lambda) = a_0^i + a_1^i \lambda + \dots + a_k^i \lambda^k + \dots + a_{n-1}^i \lambda^{n-1} + \lambda^n \quad (2)$$

Remarque : Les systèmes à commutations considérés tout au long de ce papier sont une famille spécifique. Ils sont décrits par des modes dont leurs matrices caractéristiques sont sous la forme Compagnon.

La détermination d'un domaine de stabilité plus large pour les systèmes complexes, basée sur l'utilisation de la méthode de Lyapunov associée aux techniques d'agrégation utilisant les normes vectorielles, dépend essentiellement du choix de la description du système étudié qui peut-être conditionnée par les considérations mathématiques ou bien physiques.

Les matrices sous forme Compagnon or Frobenius lorsque leurs polynômes caractéristiques sont connus, les matrices sous forme diagonale ou de Jordan lorsque leurs modes sont facilement calculés, sont les formes canoniques matricielles les plus principaux.

Le système à commutation considéré, décrit par des matrices d'état sous la forme Compagnon est transformé en un système caractérisé par des matrices d'état sous la forme en flèche. Cette forme particulière permet l'application du critère de Borne-Gentina au système majorant obtenu pour analyser la stabilité du système à commutation initial.

D'où, pour le système à commutation décrit en (1), il vient l'énoncé du théorème suivant :

Théorème 1 : Le système à commutation (1) est asymptotiquement stable s'il existe des scalaires λ_k ($k = 1, \dots, n - 1$) distincts strictement négatifs vérifiant :

$$\max_{i=1 \dots N} (\gamma_{ni}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\max(|\gamma_{ki}|) |\beta_k|}{\lambda_k} < 0 \quad (3)$$

Avec :

$$\begin{cases} \gamma_{ni}(\cdot) = -a_{n-1}^i - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \\ \forall k = 1, \dots, n - 1, \begin{cases} \beta_k = \left[\prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_j) \right]^{-1} \\ \gamma_{ki}(\cdot) = -P_{A_i^c}(\lambda_k) \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

Dans ce qui suit, on énoncera des lemmes et on introduira des notions qui nous seront utiles par la suite pour le développement de l'épreuve du résultat.

III. PRÉLIMINAIRES ET DÉFINITIONS

A. Lemme de Kotelyanski

Soit un système linéaire défini dans l'espace d'état par :

$$\dot{x} = Ax \quad (5)$$

avec, $A = \{a_{ij}\}$, une matrice de dimension $n \times n$. L'application des conditions de Hurwitz sur les paramètres du polynôme caractéristique de A , détermine le domaine de stabilité asymptotique dans l'espace des paramètres $\{a_{ij}\}$. Par ailleurs, les travaux de Kotelyanski ont mis en évidence un lemme particulier, adapté à l'étude de stabilité lorsque la matrice A possède des éléments hors diagonaux non négatifs.

Lemme 1 : les valeurs propres de la matrice A , d'éléments hors diagonaux non négatifs, sont tous à partie réelle inférieure à un nombre réel μ , si et seulement si, tous les mineurs principaux de la matrice M , définie dans (6), sont positifs :

$$M = \mu I_n - A \quad (6)$$

I_n étant la matrice identité d'ordre n .

B. Normes vectorielles

Considérons l'espace d'état vectoriel R^n ainsi que les sous espaces R^{n_i} , $i=1,2,\dots,r$

tels que $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$,

$$X \in R^n \Rightarrow X = \begin{bmatrix} X_1 \in R^{n_1} \\ X_2 \in R^{n_2} \\ \dots \\ X_r \in R^{n_r} \end{bmatrix}$$

On définit la norme vectorielle $p(\cdot)$ sur R^n par :

$$p(X) = \begin{bmatrix} p_1(X_1) \\ p_2(X_2) \\ \dots \\ p_r(X_r) \end{bmatrix} \in R^r$$

Où les $p_i(X)$ vérifient les propriétés suivantes :

- (i) $p_i(X) \geq 0 \forall X \in R^n$
- (ii) $p_i(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$
- (iii) $p_i(X + Y) < p_i(X) + p_i(Y) \forall X \text{ et } Y \in R^n$
- (iv) $p_i(\lambda X) = |\lambda| p_i(X) \forall X \in R^n, \forall \lambda \in R$

C. Système majorant

Soit un système dynamique continu décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X}(t) = A(X, t)X(t), \quad X \in R^n \quad (7)$$

Et soit une norme vectorielle $p(X) \in R^r$

La matrice $M(t, X)$ ($r \times r$) définit relativement à la norme vectorielle $p(x)$ un système majorant du système (7) si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée composante à composante :

$$\frac{dp(X)}{dt} \leq M(t, X)p(X), \forall X \in R^n, \forall t \in R \quad (8)$$

D. Lemme de comparaison

Lemme 2 : (**Lemme de comparaison**) Soit une norme vectorielle de taille r et une matrice $M(t, X)$ ($r \times r$) associée au système (7) telle que d'une part les éléments non diagonaux de $M(t, X)$ soient non négatifs et que d'autre part l'inégalité (8) soit vérifiée alors le système défini par :

$$\frac{dZ}{dt} = M(t, X)Z, \quad Z \in R, \forall X \in R^n \quad (9)$$

tel que : $Z(t_0) \geq p(X(t_0))$ est un système de comparaison du système (7) et l'inégalité suivante est vérifiée : $p(X(t)) \leq Z(t) \forall X \in R^n, \forall t \in R$.

D'où si le système (9) en Z est asymptotiquement stable, il en est de même pour le système (7) en X .

E. Critère pratique de stabilité : critère de Borne Gentina

L'étude de la stabilité pour un système non linéaire peut être ramenée parfois à celle d'un système linéaire pour laquelle la conjecture du linéaire est vérifiée. Dans ce sens, plusieurs travaux [8][9] ont été élaborés par l'exploitation de fonctions de Lyapunov spécifiques et en particulier les normes vectorielles, et en ramenant l'analyse d'un système initial à celle d'un système de comparaison.

Le critère pratique de stabilité de Borne-Gentina, généralisant le lemme de Kotelyanski aux systèmes non linéaires [10], définit de larges classes de systèmes pour lesquelles une étude en linéaire est possible.

Soit le système décrit par l'équation (7) et soit $M(A)$ la matrice des coefficients a_{ij}^* tels que :

$$\begin{cases} a_{ii}^* = a_{ii}(\cdot) \forall i = 1, \dots, n \\ a_{ij}^* = |a_{ij}| \forall i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j \end{cases}$$

$$(A(t, X) = [a_{ij}](n \times n); M(A) = [a_{ij}^*](n \times n))$$

Si les termes non constants de la matrice $M(A)$ sont regroupés dans la dernière ligne ou la dernière colonne de cette matrice alors la stabilité asymptotique globale du système (7) est assurée par la vérification des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & a_{11}^* < 0, \\ & \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{vmatrix} > 0, \dots \\ & (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & \dots & a_{2n}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & \dots & \dots & a_{3n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & \dots & a_{nn}^* \end{vmatrix} > 0, \end{aligned}$$

$\forall t \in R, \forall X \in R^n$

Remarque :

Le critère de stabilité de Borne-Gentina ramène l'analyse de la stabilité du système initial à celle du système de comparaison caractérisé par une nouvelle matrice d'état M ayant les éléments hors diagonaux positifs (i.e $-M$ est une M -matrice [13])

Preuve du théorème 1

Preuve 1 : En appliquant le changement de base sur le système (1) par la matrice de passage suivante P_f :

$$P_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{n-1}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

λ_i des variables arbitraires étant choisies telles que :

$$\forall i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$$

On obtient alors le système équivalent décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i M_i z(t) \quad (10)$$

Avec :

M_i est une matrice de la forme en flèche :

$$M_i = P_f^{-1} A_i^c P_f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \lambda_k & & \vdots & \beta_k \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_{1i} & \dots & \gamma_{ki} & \dots & \gamma_{n-1i} & \gamma_{ni} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} \gamma_{ni}(\cdot) = -a_{n-1}^i - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \\ \forall k = 1, \dots, n-1, \begin{cases} \beta_k = \left[\prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_j) \right]^{-1} \\ \gamma_{ki}(\cdot) = -P_{A_i^c}(\lambda_k) \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

Le choix d'une norme vectorielle $p(w)$ telle que $p(w) = [|w_1|, \dots, |w_n|]$ permet en se basant sur les techniques d'agrégation de définir un système de comparaison de la forme :

$$\dot{Z} = M_c^f Z \quad (12)$$

La matrice de comparaison du système à commutation étudié possède aussi la forme en flèche et elle est définie comme suit :

$$M_c^f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & |\beta_1| \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \lambda_k & & \vdots & |\beta_k| \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & |\beta_{n-1}| \\ \max(|\gamma_{1i}|) & \dots & \max(|\gamma_{ki}|) & \dots & \max(|\gamma_{n-1i}|) & \max(\gamma_{ni}) \end{bmatrix}$$

L'analyse de la stabilité du système à commutation initial revient à l'analyse de la stabilité du système à comparaison obtenu en utilisant la transformation en flèche. On peut remarquer que cette description permettra par la suite le choix d'une manière arbitraire, des dynamiques du système étudié en boucle fermée. L'étude de la stabilité du modèle global dans la nouvelle base, de matrice caractéristique ayant la forme en flèche peut être alors menée à partir du lemme de kotelyanski et l'utilisation du critère de Borne-Gentina.

L'application du critère de Borne et Gentina au système (12) conduit à la condition de stabilité asymptotique globale suivante, lorsque $\forall k \lambda_k < 0$:

$$(-1)^n \det(M_c^f) > 0$$

Le déterminant de M_c^f étant tel que :

$$\det(M_c^f) = \max_{i=1 \dots N} (\gamma_{ni}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\max(|\gamma_{ki}|) |\beta_k|}{\lambda_k} \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k \quad (13)$$

Sachant qu'on a :

$$\forall n, (-1)^n \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k < 0$$

La satisfaction de la condition (13) réduit à la vérification de la condition de stabilité à celle de l'inégalité suivante :

$$\det(M_c^f) = \max_{i=1 \dots N} (\gamma_{ni}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\max(|\gamma_{ki}|) |\beta_k|}{\lambda_k} < 0 \quad (14)$$

D'où l'énoncé du théorème 1 de la condition de stabilité asymptotique globale du système à commutation à temps continu.

Dans la partie suivante, on s'intéressera à l'analyse de la stabilité d'une classe particulière des systèmes à commutation caractérisés par des matrices d'état ayant les éléments hors diagonaux positifs.

F. Condition suffisante de stabilité pour une classe des systèmes à commutation continu : Les systèmes à commutation positifs

Les systèmes positifs ayant une propriété particulière telle que pour toute entrée non négative et tout état initial non négatif, ils génèrent une trajectoire d'état et une sortie non négatives tout le temps [22]. La positivité des variables souvent apparaît comme étant la conséquence immédiate de la nature du phénomène lui-même. Comme toute variable représentant un type possible de ressource mesurée par une quantité tel que le temps, l'argent, les marchandises, la taille de buffer, les files d'attente des paquets de données circulant dans les réseaux, le flux d'air et d'eau, les populations, la concentration d'une substance...

Les systèmes à commutation positifs sont fréquemment rencontrés dans plusieurs champs d'applications. Exemples de systèmes positifs à commutations sont directement : les systèmes Environnementaux tel que les rivières ayant un flux d'eau qui sont régulés, les réseaux de réservoirs régulés par des vannes ouverts, les systèmes chimiques, les réseaux de communication...

On considère un système à commutation de dimension n décrit par N modes sous la forme (1)

Le changement de base suivant [11] permet la représentation de chaque mode par une matrice caractéristique de la forme en flèche :

$$A_i^f = P_f^{-1} A_i^c P_f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \lambda_k & & \vdots & \beta_k \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_{1i}(\cdot) & \dots & \gamma_{ki}(\cdot) & \dots & \gamma_{n-1i}(\cdot) & \gamma_{ni}(\cdot) \end{bmatrix}$$

L'objectif est alors de chercher des réels λ_k permettant d'avoir des éléments hors diagonaux de chaque matrice A_i^f positifs, i.e transformer le système à commutation de départ

en un système à commutation positif décrit par des matrices de Metzeler.

Il vient alors :

$$\begin{cases} \lambda_k \text{ reels, } k = 1, \dots, n \\ \forall k = 1, \dots, n-1, \begin{cases} \beta_k \geq 0 \\ \gamma_{ki}(\cdot) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Une matrice majorante du système à commutation est donnée alors par :

$$M_c^f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \lambda_k & & \vdots & \beta_k \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \max(\gamma_{1i}) & \dots & \max(\gamma_{ki}) & \dots & \max(\gamma_{n-1i}) & \max(\gamma_{ni}) \end{bmatrix}$$

En se basant sur les caractéristiques de la matrice majorante M_c^f dite matrice de Metzeler ($-M_c^f$ est une M-matrice)[13], on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 2 : Le système à commutation est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(i) \begin{cases} \lambda_k \text{ reels, } k = 1, \dots, n \\ \forall k = 1, \dots, n-1, \begin{cases} \beta_k \geq 0 \\ \gamma_{ki}(\cdot) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

(ii) Il existe une matrice positive diagonale D tel que (16)

$$M_c^{fT} D + D M_c^f < 0$$

G. Condition nécessaire et suffisante de stabilité pour une classe de second ordre des systèmes à commutation continu

On considère un système à commutation de dimension deux décrit par deux modes ($n=2, N=2$)

$$\sum_i : \dot{x}(t) = A_i^c x(t), i = 1, 2$$

Avec :

$$A_1^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{01} & -a_{11} \end{bmatrix} \text{ et } A_2^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{02} & -a_{12} \end{bmatrix}$$

$$P_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient alors deux matrices A_1^f et A_2^f sous la forme en flèche tel que :

$$A_1^f = P_f^{-1} A_1^c P_f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ -(a_{01} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_1^2) & -(a_{11} + \lambda_1) \end{bmatrix}$$

$$A_2^f = P_f^{-1} A_2^c P_f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ -(a_{02} + \lambda_1 a_{12} + \lambda_1^2) & -(a_{12} + \lambda_1) \end{bmatrix}$$

Théorème 3 : S'il existe λ_1 un scalaire strictement négatif telle que :

$$\begin{cases} -(a_{01} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_1^2) \geq 0 \\ -(a_{02} + \lambda_1 a_{12} + \lambda_1^2) \geq 0 \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système à commutation en se basant sur la proposition [12]

est :

$$\begin{cases} A_1^{fT} P + P A_1^f < 0 \\ A_2^{fT} P + P A_2^f < 0 \end{cases}$$

P est la matrice de Lyapunov symétrique définie positive.

IV. EXEMPLE ILLUSTRATIF

Pour illustrer l'application des conditions de vérification de la stabilité énoncées dans cet article, on considère le système à commutation d'ordre deux décrit par les deux modes suivants :

$$A_1^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -10 \end{bmatrix}, A_2^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -5 \end{bmatrix}$$

Le choix suivant du paramètre arbitraire $\lambda_1 = -4$ implique que la condition de stabilité asymptotique du système à commutation donné par le théorème (3) est vérifiée. Les matrices A_1^f et A_2^f étant définies par :

$$A_1^f = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 17 & -6 \end{bmatrix}, A_2^f = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3.9 & -1 \end{bmatrix}$$

et la matrice de Lyapunov :

$$P = \begin{bmatrix} 1.2519 & -0.1747 \\ -0.1747 & 0.1924 \end{bmatrix}$$

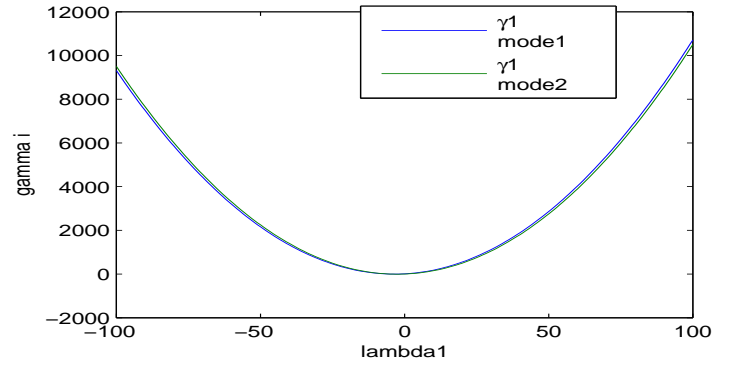


Fig. 1. Hypothèses de la condition de stabilité

L'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres en temps continu s'avère très difficile. La nature discontinue des champs de vecteurs pose des problèmes pour la dérivation de la fonction de Lyapunov. Les résultats d'analyse de stabilité existants pour les systèmes à commutation linéaires à temps continus sont un peu restrictifs et reposent essentiellement sur l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune (CQLF) et le synthèse d'un contrôleur unique pour tous les modes et avec des lois de commutations arbitraires. Les approches basées sur les fonctions de Lyapunov multiples exige une restriction temporelle on parle alors du notion de temps de séjour[25] ou bien spatiale on parle alors de répartition spatiales des variables d'état et généralement ces approches sont inexploitable pour la synthèse d'une commande. La formulation proposée permet la conception d'un contrôleur par retour d'état commuté tout en utilisant les variables λ_k pour fixer les valeurs des gains stabilisant le système à commutation en boucle fermée sous des commutations arbitraires.

V. CONCLUSION

Une nouvelle approche d'analyse de la stabilité des systèmes à commutation à temps continu basée sur les systèmes de comparaison a été développé. L'idée principal de cette approche réside dans le choix d'une représentation particulière du système étudié. L'utilisation de formes canoniques en flèche des matrices caractéristiques permettra par la suite d'élaborer de lois de commande performantes.

RÉFÉRENCES

- [1] D.Liberzon and A.S.Morse, *Basic problems in stability and design of switched systems*, IEEE Control Systems Magazine. vol 19, no.5, pp.59- 70, 1999.
- [2] D.Liberzon, J.P.Hespanha and A.S.Morse, *stability of switched system : a Lie-algebraic condition*, Systems and Control Letters vol.37 pp.117-122,1999.
- [3] A.S.Morse, *Supervisory control of families of linear set - point controllers*, part1 : Exact matching, IEEE Trans, Automat, Contr, vol.41, pp. 1413-1431,1996.
- [4] M.S.Branicky, *Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems*, IEEE Trans.Automat Control, vol.43, pp .475-482, 1998.
- [5] S.H.Lee, T.H Kim and J-T Lim, *A new stability analysis of switched systems*, Automatica vol.36, pp.917-922, 2000.
- [6] Hui Ye, Anthony N.Michel and Ling Hou, *Stability theory for hybrid dynamical systems*. Proceeding of 34th Conference on decision and control IEEE, pp.2679-3497, 1995.
- [7] R.DeCarlo, M.Branicky, S.Pettersson, and B.Lennartson. *Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems*. Proceedings of IEEE special Issue on Hybrid Systems, 2000.
- [8] Vidyasagar, *Non linear Systems Analysis* . Upper Saddle River, NJ :Prentice-Hall, 1993.
- [9] P.Borne, M.Dambrine, W.perruquetti and J.P.Richard, *Vector Lyapunov functions : Non linear, time-varying, ordinary and functional differential equations*, Advances in stability theory, stability and control :theory, methods and applications.Taylors and Francis, London,49-73,2003.
- [10] M.kouri, P.Borne, *Systèmes non linéaires*, Collection technologie, 1999.
- [11] Mohamed Benrejeb, Anis Sakly, Kamel Ben Othman, P.Borne, *Choice of conjunctive operator of TSK fuzzy systems*, Mathematics and Computers in Simulation, 76,410-421,2008.
- [12] Mehmet Akar, Ayanendu Paul, Michael G.Safonov, Urbashi Mitra, *conditions on the Stability of a Class of Second-Order Switched Systems*, IEEE Transactions On Automatic Control ,51 NO2,338-340,2006.
- [13] A.Berman, R.J.Plemmons, *Nonnegative Matrices in the mathematical Sciences*, Academic Press ,New York,1979.
- [14] F.Robert, *Normes vectorielles de vecteurs et de matrices*, R.F.T.I chiffres, Vol.17, n° 4. pp.261-299,1964.
- [15] P.Borne, *Non linear system stability, vector norm approach*, system and control Encyclopedia, t.5, pp.3402-3406 Pergamon Press, 1987.
- [16] J.C.Gentina, P.Borne, F.Laurent, *Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension*, RAIRO, J.3, pp.69-77,1972.
- [17] L.T.Grujic, *Non Lyapunov stability analysis of large-scale systems on time varying sets,* Int. J. Control, Vol. 21, n°3, pp. 401-415, 1975.
- [18] L.T. Grujic, *On absolute stability and the Aizerman conjecture*, Automatica, Vol. 17, pp. 335-349, 1981.
- [19] L.T. Grujic, *General stability of large-scale systems,* IFAC on Large Scale Systems Theory and Applications, pp. 16-20, Udine, 1976.
- [20] L.T. Grujic, J.C. Gentina, P. Borne, *General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms*, Int. J. of Control, Vol. 24, n°4, pp. 529-550, 1976.
- [21] L.T. Grujic, J.C. Gentina, P. Borne, C. Burgat, J. Bernoussou, *Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Fonctions de Lyapunov vectorielles*, RAIRO Aut./Sys. Anal. and Cont., Vol. 12, n°4, pp. 319-348, 1978.
- [22] L.Gruvits, R.Shorten and O.Mason, *On the stability of switched positive linear systems*, IEEE Transactions on Automatic, 2007.
- [23] P.Borne, M.Benrejeb, *On the Representation and the Stability Study of Large Scale Systems*, Int.J.of Computers, Communications and Control, Vol 3, pp.55-66,2008.
- [24] A.Zappavigna, P.Colaneri, J.C. Geromel, R.Middleton, *Stabilization of Continuous-Time Switched Linear Positive Systems*, American Control Conference, 2010.
- [25] J.C.Geromel, P.Colaneri, *Stabilization of Continuous-Time Switched Systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2006.