

Conditions initiales et initialisation des systèmes différentiels fractionnaires linéaires

Jean-Claude TRIGEASSOU¹, Nezha MAAMRI², Mammar TENOUTIT²

¹IMS-LAPS UMR 5218, Université de Bordeaux 1,
351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

jean-claude.trigeassou@univ-poitiers.fr

²LAI, Université de Poitiers
40 avenue du Recteur Pineau, 86000 Poitiers, France.

nezha.maamri@univ-poitiers.fr

Résumé— La maîtrise des conditions initiales des systèmes fractionnaires reste un problème ouvert, malgré un nombre important de publications sur ce sujet. Nous montrons dans cette communication que la solution de ce problème passe par la définition d'une représentation d'état adaptée. Celle-ci est basée sur la notion fondamentale d'opérateur d'intégration fractionnaire. Après avoir défini la représentation d'état des intégrateurs et celle du système fractionnaire, on montre que le problème des conditions initiales n'est rien d'autre que la généralisation du cas entier, mais dans un cadre de dimension infinie. La solution du problème d'initialisation passe par l'estimation des variables d'état internes. On propose d'accéder à cette estimation grâce à un observateur ; un exemple numérique montre qu'il s'agit d'une solution réaliste.

Mots-clés— **Ordre non entier, Système fractionnaire, Conditions initiales, Modèle d'état, Intégrateur fractionnaire, Observateur.**

I. INTRODUCTION

Les systèmes différentiels à dérivation d'ordre non entier (ou d'ordre fractionnaire) se rencontrent dans de nombreux domaines de la physique [1], de la chimie [4], de la biologie, ...etc., chaque fois que les phénomènes régissant les dynamiques obéissent à une équation de diffusion [2]. Ils ont été aussi introduits artificiellement dans les systèmes de commande sous la forme de correcteurs d'ordre non entier (CRONE [13], PID fractionnaire [15]) afin de bénéficier de propriétés de robustesse ou pour augmenter le nombre de paramètres de réglage. L'analyse des propriétés des équations différentielles fractionnaires (FDE) linéaires et non linéaires est ainsi devenu un enjeu essentiel afin de maîtriser les nouveaux problèmes posés par ces systèmes. Parmi ces problèmes, celui de la maîtrise des conditions initiales des FDE a suscité un grand intérêt depuis de nombreuses années. Cependant, malgré de nombreuses publications sur ce thème, il reste encore largement ouvert.

La question posée est la suivante : est-il possible de résumer le comportement passé d'un système fractionnaire par des conditions initiales (ou une fonction des conditions initiales) comme dans le cas des équations différentielles ordinaires (ODE) ? Parmi toutes les contributions, celle de Caputo [3] a semblé dès le départ la plus prometteuse : il a ainsi modifié la définition de la dérivation fractionnaire d'une fonction pour introduire des conditions initiales composées de la valeur de cette fonction et de ses dérivées successives d'ordre entier à l'instant considéré. Malheureusement, malgré son apparente évidence, cette approche ne fournit pas une solution correcte

dans le cas général. Lorenzo et Hartley [7] ont proposé une fonction des conditions initiales, mais qui ne donne des résultats satisfaisants que dans des cas particuliers [17]. Récemment, Sabatier [17] a montré que ce problème ne pouvait recevoir une solution satisfaisante que grâce à une définition correcte de l'état du système fractionnaire. En s'inspirant de la représentation diffusive [11], il a défini un état continûment distribué qui permet de prendre en compte les conditions initiales. Cette solution donne satisfaction dans le cas général, mais le problème pratique de l'initialisation reste difficile compte tenu du mode de définition de l'état.

Dans un article précédent [20], nous avons proposé une autre définition de l'état du système fractionnaire, basée sur le concept d'intégrateur fractionnaire. Bien que cette définition soit équivalente à celle de Sabatier, elle permet de généraliser les concepts relatifs aux ODE grâce à l'état interne, de dimension infinie, des intégrateurs fractionnaires.

Dans cette communication, nous complétons les travaux précédents en nous intéressant au problème de l'initialisation. En effet, définir des conditions initiales correctes est un aspect essentiel dans la solution du problème posé, mais résoudre celui de l'initialisation, c'est à dire de la détermination pratique de ces conditions initiales afin de résumer le passé du système fractionnaire, est le passage obligé pour une véritable maîtrise de ses conditions initiales. Concrètement, nous montrons qu'une solution basée sur un observateur d'état permet de correctement initialiser le système fractionnaire.

Cette communication débute par un nécessaire rappel de définitions : intégration et dérivation fractionnaires dans la section 2, simulation des FDE dans la section 3 et modélisation de l'intégrateur fractionnaire en section 4. La section 5 est consacrée à la définition de la représentation d'état s'appuyant sur le concept d'intégrateur fractionnaire tandis que le problème des conditions initiales du système fractionnaire est posé dans section 6. Finalement, en section 7, nous proposons une solution concrète au problème de l'initialisation grâce à un observateur et un exemple numérique illustre la pertinence de ce choix.

II. QUELQUES DEFINITIONS

2.1 Intégration et dérivation fractionnaires

L'intégration fractionnaire est définie par l'intégrale de Riemann-Liouville [9][10][12][14][16].

L'intégrale d'ordre n (ou n est un réel positif) de la fonction $f(t)$ est définie par la relation:

$$I_n(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

où

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (2)$$

est la fonction gamma.

$I_n(f(t))$ s'interprète comme la convolution de la fonction $f(t)$ avec la réponse impulsionnelle:

$$h_n(t) = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad (3)$$

de l'opérateur d'intégration fractionnaire dont la transformée de Laplace a pour expression:

$$I_n(s) = L\{h_n(t)\} = \frac{1}{s^n} \quad (4)$$

La dérivation fractionnaire est l'opération duale de l'intégration.

Considérons l'opérateur d'intégration fractionnaire $I_n(s)$ dont les entrée/sortie sont respectivement $x(t)$ et $y(t)$.

Alors:

$$y(t) = I_n(x(t)) \quad (5)$$

ou

$$Y(s) = (1/s^n)X(s) \quad (6)$$

Réciproquement, $x(t)$ est la dérivée fractionnaire d'ordre n de $y(t)$ définie par:

$$x(t) = D_n(y(t)) \quad (7)$$

ou

$$X(s) = s^n Y(s) \quad (8)$$

Où s^n représente la transformée de Laplace de l'opérateur de dérivation fractionnaire.

2.2 Equation différentielle fractionnaire (FDE)

Considérons la FDE linéaire (9) :

$$D_{m_N}(y(t)) + a_{N-1}D_{m_{N-1}}(y(t)) + \dots + a_1D_{m_1}(y(t)) + a_0y(t) = b_M D_{m_M}(u(t)) + \dots + b_1D_{m_1}(u(t)) + b_0u(t) \quad (9)$$

dont la fonction de transfert a pour expression (10) :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s^{m_1} + \dots + b_Ms^{m_M}}{a_0 + a_1s^{m_1} + \dots + a_{N-1}s^{m_{N-1}} + s^{m_N}} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (10)$$

Les ordres de dérivation fractionnaire:

$$m_1 < m_2 < \dots < m_N \quad (11)$$

sont des nombres positifs réels; ils sont appelés ordres externes ou explicites. Il est aussi nécessaire de définir des

ordres internes ou implicites tels que:

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 \\ &\vdots \\ n_i &= m_i - m_{i-1} \\ &\vdots \\ n_N &= m_N - m_{N-1} \end{aligned} \quad (12)$$

III. SIMULATION SOUS FORME COMPAGNE

W. Thomson [18] a montré la nécessité d'introduire des opérateurs d'intégration pour simuler une équation différentielle, c'est à dire pour réaliser concrètement son intégration. Les premiers opérateurs analogiques ont été réalisés sous forme mécanique, puis électronique [6]. Actuellement, on utilise des logiciels numériques, par exemple grâce à l'algorithme RK4 où l'opérateur l'intégration est implicite: il en résulte que l'on oublie son existence, pourtant fondamentale. Conformément au principe énoncé par W. Thomson, l'intégration d'une FDE nécessite l'utilisation explicite (ou implicite) d'opérateurs d'intégration fractionnaire.

3.1 Simulation d'une FDE

Considérons la FDE (9), et définissons:

$$X(s) = (1/A(s))U(s) \quad (13)$$

et

$$Y(s) = B(s)X(s) \quad (14)$$

qui permettent d'introduire la forme canonique commandable (15) (ou forme compagne) [6]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= D_{n_1}(x_1(t)) \\ &\vdots \\ x_i(t) &= D_{n_{i-1}}(x_{i-1}(t)) \\ &\vdots \\ x_N(t) &= D_{n_{N-1}}(x_{N-1}(t)) \\ D_{n_N}(x_N(t)) &= -a_0x_1(t) \dots - a_{N-1}x_N(t) + u(t) = \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (15)$$

et:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= I_{n_1}(x_2(t)) \\ &\vdots \\ x_{i-1}(t) &= I_{n_{i-1}}(x_i(t)) \\ &\vdots \\ x_{N-1}(t) &= I_{n_{N-1}}(x_N(t)) \\ x_N(t) &= I_{n_N}(\varepsilon(t)) \end{aligned} \quad (16)$$

Le schéma de simulation de la figure 1 est basé sur un modèle d'état qui requiert N opérateurs d'intégration fractionnaire connectés en cascade, dont les fonctions de transfert respectives sont $\{I_{n_N}(s), I_{n_{N-1}}(s), \dots, I_{n_1}(s)\}$.

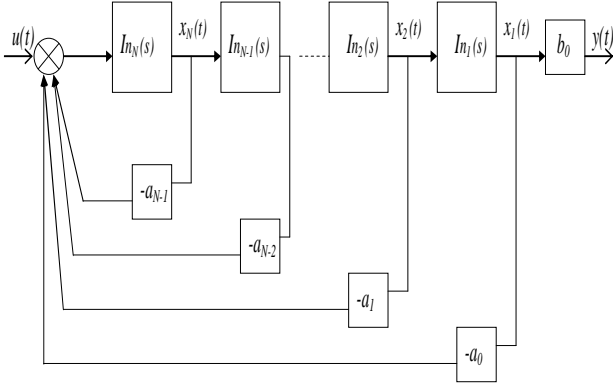


Figure 1: Schéma de simulation analogique d'une FDE

Finalement, on obtient $y(t)$ grâce à la relation (14) correspondant à:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x_{i+1}(t) \quad (17)$$

3.2 Pseudo modèle d'état de la FDE

La simulation de la FDE s'appuie sur un modèle d'état:

$$\underline{D}_n(\underline{X}(t)) = A\underline{X}(t) + \underline{B}u(t) \quad (18)$$

où :

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{D}_n(\underline{X}(t)) = \begin{bmatrix} D_{n_1}(x_1(t)) \\ \vdots \\ D_{n_i}(x_i(t)) \\ \vdots \\ D_{n_N}(x_N(t)) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_N \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

La sortie a pour expression:

$$y(t) = \underline{C}^T \underline{X}(t) \quad (20)$$

avec:

$$\underline{C}^T = [b_0 \quad \dots \quad b_M \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (21)$$

Ces relations définissent le pseudo modèle d'état de la FDE sous la forme canonique commandable [6].

IV. MODELISATION DE L'INTEGRATEUR FRACTIONNAIRE

L'intégrateur fractionnaire $I_n(s)$ est l'élément clé pour la simulation de la FDE. Cependant, la réalisation de $I_n(s)$, aussi bien sous forme analogique que numérique, n'est pas un problème simple comme dans le cas entier. Plusieurs approches sont possibles [5][19][20]; intéressons nous à

l'approche temporelle.

4.1 Principe

La représentation diffusive, utilisée par D. Matignon [5] et G. Montseny [11], fournit la base théorique pour définir $I_n(s)$ et son approximation temporelle.

Considérons un système linéaire:

$$y(t) = h(t) * u(t) \quad (22)$$

où $h(t)$ est sa réponse impulsionnelle. $\mu(\omega)$ est appelée représentation diffusive (ou plutôt fonction de distribution fréquentielle) de la réponse impulsionnelle $h(t)$. $h(t)$ et $\mu(\omega)$ vérifient une pseudo relation du type transformée de Laplace [11]:

$$h(t) = \int_0^{\infty} \mu(\omega) e^{-\omega t} d\omega \quad (23)$$

Un modèle d'état continûment distribué en fréquence est associé à $\mu(\omega)$; il est défini par les relations:

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t, \omega)}{\partial t} = -\omega x(t, \omega) + u(t) \\ y(t) = \int_0^{\infty} \mu(\omega) x(t, \omega) d\omega \end{cases} \quad (24)$$

Dans le cas de l'intégrateur fractionnaire pour $0 < n < 1$,

$$\mu(\omega) = \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \omega^{-n} \quad (25)$$

4.2 Modèle d'état à distribution fréquentielle discrète

Le modèle (24) continûment distribué en fréquence n'est pas directement utilisable. En pratique, on obtient un nouveau modèle par discrétisation fréquentielle de $\mu(\omega)$. Ainsi, on remplace $\mu(\omega)$ par une fonction en marches d'escalier (avec J marches).

Pour une marche élémentaire, la hauteur est $\mu(\omega_k)$ et la largeur $\Delta\omega_k$. Soit c_k le poids de l'élément k :

$$c_k = \mu(\omega_k) \Delta\omega_k \quad (26)$$

Ainsi, le modèle à distribution continue devient un modèle d'état conventionnel de dimension égale à J .

$$\begin{cases} \frac{dx_k(t)}{dt} = -\omega_k x_k(t) + u(t) \quad | \quad k = 1 \dots J \\ y(t) = \sum_{k=1}^J \mu(\omega_k) x_k(t) \Delta\omega_k \\ = \sum_{k=1}^J c_k x_k(t) \end{cases} \quad (27)$$

ou de manière équivalente:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{X}}(t) &= A\underline{X}(t) + \underline{B}u(t) \\ y(t) &= \underline{C}^T \underline{X}(t) \end{aligned} \quad (28)$$

avec:

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_J \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} -\omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\omega_J \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\underline{B}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]; \quad \underline{C}^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_J] \quad (30)$$

Avec cette approche, nous obtenons un modèle d'état à distribution fréquentielle discrète pour $I_n(s)$ avec les contraintes :

$$\omega_1 \rightarrow 0, \ \omega_J \rightarrow \infty \text{ et } J \gg 1 \quad (31)$$

V. REPRESENTATION D'ETAT DE LA FDE

5.1 Introduction

L'association du pseudo modèle d'état de la FDE et du modèle d'état de chaque intégrateur fractionnaire constitue le modèle d'état global de la FDE. On obtient ainsi une équation différentielle ordinaire (ODE) équivalente, mais de dimension infinie.

5.2 Modèle d'état de la FDE

Le modèle d'état est construit à partir du pseudo modèle d'état de la FDE (18); il comprend l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$, et le pseudo vecteur d'état $\underline{X}(t)$ (19) de dimension N , où N est le nombre de dérivées fractionnaires (c'est à dire le nombre d'intégrateurs fractionnaires).

Rappelons que:

$$\begin{aligned} D_n(\underline{X}(t)) &= A\underline{X}(t) + \underline{B}u(t) \\ y(t) &= \underline{C}^T \underline{X}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

A , \underline{B} et \underline{C} ont été exprimés dans la forme compagne, mais il est possible d'utiliser d'autres formes canoniques [6].

Les composantes $x_i(t)$ du pseudo vecteur d'état sont comme on l'a vu précédemment les sorties des N intégrateurs fractionnaires $I_{n_i}(s)$, leurs entrées $v_i(t)$ dépendant de la forme choisie pour le pseudo modèle d'état. Par ailleurs, dans cette communication, nous supposons (uniquement pour des raisons de simplicité) que $0 < n_i < 1 \ \forall i$.

Conformément aux définitions de la section 4, on a deux formes possibles pour les intégrateurs fractionnaires.

5.3 Etat à distribution fréquentielle continue

Soit $z_i(\omega, t)$ l'état de $I_{n_i}(s)$, vérifiant le modèle:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z_i(\omega, t) = -\omega z_i(\omega, t) + v_i(t) \\ x_i(t) = \int_0^\infty \mu_i(\omega) z_i(\omega, t) d\omega \end{cases} \quad (33)$$

avec

$$\mu_i(\omega) = \frac{\sin(n_i\pi)}{\pi} \omega^{-n_i} \quad (34)$$

$\mu_i(\omega)$ est la fonction de distribution fréquentielle de la variable d'état $z_i(\omega, t)$ correspondant à l'ordre fractionnaire n_i .

Rappelons que cette représentation des intégrateurs fractionnaires, donc du modèle global de la FDE, ne fait appel à aucune approximation : on obtient donc une formulation exacte, équivalente à la FDE.

5.4 Etat à distribution fréquentielle discrète

Soit $\underline{Z}_i(t)$ le vecteur d'état ($\dim \underline{Z}_i(t) = J$); $\underline{Z}_i(t)$ vérifie le modèle:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Z}}_i(t) &= A_i \underline{Z}_i(t) + \underline{B}_i v_i(t) \\ x_i(t) &= \underline{C}_i^T \underline{Z}_i(t) \end{aligned} \quad (35)$$

où A_i , \underline{B}_i et \underline{C}_i (29)(30) correspondent à l'ordre fractionnaire n_i .

Dans l'hypothèse où le pseudo modèle d'état correspond à la forme compagne, l'entrée $v_i(t)$ vérifie les relations suivantes:

$$\begin{aligned} v_i(t) &= x_{i+1}(t) \quad (i = 1 \dots N-1) \\ v_i(t) &= u(t) - \sum_{i=0}^{N-1} a_i x_{i+1}(t) \quad (i = N) \end{aligned} \quad (36)$$

5.5 Commentaires

Les pseudo variables $x_i(t)$ sont les sorties des intégrateurs fractionnaires $I_{n_i}(s)$. Dans le cas fréquentiel discret, $x_i(t)$ correspond à $x_i(t) = \underline{C}_i^T \underline{Z}_i(t)$.

Cela signifie que $x_i(t)$ est la somme pondérée des composantes $z_{i,j}(t)$ ($i = 0, \dots, J$) du vecteur d'état $\underline{Z}_i(t)$ de l'intégrateur considéré.

Les variables $z_{i,j}(t)$ sont de vraies variables d'état correspondant aux sorties de systèmes du premier ordre: elles sont donc capables de mémoriser une condition initiale.

A l'inverse, comme la variable $x_i(t)$ est la somme pondérée de ces variables d'état, elle n'est pas une vraie variable d'état car elle n'est pas intrinsèquement capable de mémoriser une condition initiale. Remarquons aussi qu'il existe une infinité de combinaisons linéaires possibles permettant de reconstituer

$x_i(t)$ à partir des $z_{i,j}(t)$. La sortie de l'intégrateur fractionnaire est donc une image de son état qui lui même n'est rigoureusement défini que par ses variables internes: voilà donc la raison fondamentale qui explique l'échec des approches de prise en compte des conditions initiales pour les systèmes fractionnaires.

En conclusion, le vrai vecteur d'état de la FDE est composé de l'ensemble des états des différents intégrateurs fractionnaires : ainsi, le vecteur d'état résultant est de dimension infinie, même lorsqu'il n'y a qu'une seule dérivation fractionnaire (ou intégration fractionnaire).

La FDE est donc équivalente à une ODE de dimension infinie. Cela n'est pas dû à une approximation de la FDE par un modèle d'ordre entier, mais à la propriété fondamentale de l'intégrateur fractionnaire qui est intrinsèquement de nature entière avec une dimension infinie.

VI. LE PROBLEME DES CONDITIONS INITIALES

6.1 Introduction

Les auteurs qui ont abordé le problème des conditions initiales ont implicitement utilisé la valeur de la sortie de chaque intégrateur fractionnaire à l'instant initial. Or, nous avons montré précédemment que ces valeurs initiales résultent de la combinaison linéaire des variables d'état internes de ces intégrateurs : on ne peut donc reconstituer le véritable état interne du système fractionnaire à partir de ces valeurs initiales, quelle que soit la formulation utilisée, en particulier celle de Caputo [3].

La vraie solution du problème des conditions initiales passe donc par la prise en compte de l'état interne des intégrateurs fractionnaires. Pour cela, on utilise l'équivalence du système fractionnaire avec l'ODE de dimension infinie, établie section V. En effet, comme l'ODE équivalente est un système différentiel d'ordre entier conventionnel, il est facile de formuler, pour chaque intégrateur $I_{n_i}(s)$, sa sortie $x_i(t)$ sur $t \in [t_0; +\infty[$ grâce à la connaissance des états initiaux, $\underline{Z}_i(t_0)$ ou $z_i(\omega, t_0)$:

6.2 Etat à distribution fréquentielle continue

La solution du système (33) est:

$$z_i(\omega, t) = z_i(\omega, t_0) e^{-\omega(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\omega(t-\tau)} v_i(\tau) d\tau \quad (37)$$

où $z_i(\omega, t_0)$ représente la $i^{\text{ème}}$ fonction d'initialisation

$$I_{n_i}(s) \text{ à } t = t_0 \text{ et } x_i(t) = \int_0^{+\infty} \mu_i(\omega) z_i(\omega, t) d\omega.$$

6.3 Etat à distribution fréquentielle discrète

La solution du système (35) est:

$$\underline{Z}_i(t) = e^{A_i(t-t_0)} \underline{Z}_i(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_i(t-\tau)} \underline{B}_i v_i(\tau) d\tau \quad (38)$$

où $\underline{Z}_i(t_0)$ représente le $i^{\text{ème}}$ vecteur d'initialisation de $I_{n_i}(s)$ à $t = t_0$ et $x_i(t) = \underline{C}_i^T \underline{Z}_i(t)$.

Finalement, grâce à la définition des entrées $v_i(t)$ dans la formulation compagne:

$$\begin{cases} v_i(t) = x_{i+1}(t) & (i=1, \dots, N-1) \\ v_N(t) = u(t) - \sum_{i=0}^{N-1} a_i x_{i+1}(t) \end{cases} \quad (39)$$

il est possible de calculer la sortie de chaque intégrateur ($i=1, \dots, N$) et par conséquent la sortie $y(t)$ de la FDE grâce à la relation (28):

$$y(t) = \underline{C}^T \underline{X}(t) \quad (40)$$

6.4 Conclusion

La sortie $y(t)$ est obtenue grâce à la connaissance de l'entrée $u(\tau)$ (sur $\tau \in [0; t_0]$) et de tous les états initiaux des intégrateurs fractionnaires:

$$\{z_1(\omega, t_0) \cdots z_i(\omega, t_0) \cdots z_N(\omega, t_0)\} \quad (41)$$

ou

$$\{\underline{Z}_1(t_0) \cdots \underline{Z}_i(t_0) \cdots \underline{Z}_N(t_0)\} \quad (42)$$

Ainsi, le problème des conditions initiales d'une FDE se ramène à celui d'une ODE conventionnelle, néanmoins avec une différence considérable, à savoir que chaque état initial (qu'il soit une fonction ou un vecteur) est théoriquement de dimension infinie.

Il est important de remarquer que ce problème n'est pas connecté avec la définition de la dérivation fractionnaire (Riemann Liouville ou Caputo), mais essentiellement avec la définition d'un vrai modèle d'état pour le système fractionnaire.

Remarque : on notera que les équations (35) et (36) sont très simples à utiliser, en particulier pour la simulation d'une FDE, car les matrices A_i sont diagonales, c'est à dire que les états internes sont découplés.

VII. LE PROBLEME DE L'INITIALISATION

7.1 Introduction

Bien que la définition d'une ODE équivalente au système fractionnaire fournisse une solution conventionnelle au problème des conditions initiales, le problème de l'initialisation reste difficile à traiter, en raison de l'étendue spectrale des modes des intégrateurs fractionnaires, depuis $\omega_1 \rightarrow 0$ jusqu'à $\omega_J \rightarrow \infty$. Par voie de conséquence on doit traiter un large éventail de conditions initiales, correspondant à chacun des modes.

Concrètement, la distribution fréquentielle continue doit être discrétisée, ce qui pose au moins deux problèmes:

- nécessité d'un nombre limité de modes : en pratique, la distribution géométrique proposée par A. Oustaloup [14] [19] fournit une solution optimale avec $J+1$ modes.
- choix des pulsations basse ω_1 et haute ω_J en respectant la condition $\omega_J \gg \omega_1$. Par ailleurs, on utilise une pulsation $\omega_0 = 0$ pour éviter une erreur statique en simulation [19][20].

Concernant l'estimation de $\underline{Z}(t_0)$:

$$\underline{Z}^T(t_0) = \{\underline{Z}_1(t_0) \cdots \underline{Z}_i(t_0) \cdots \underline{Z}_N(t_0)\} \quad (43)$$

une méthode directe consiste à estimer $\underline{Z}(t_0)$ à partir de couples de valeurs $\{u(t), y(t)\}$ pour $t \leq t_0$. Pour cela, il est nécessaire d'opérer une discrétisation temporelle et en premier lieu de choisir une période d'échantillonnage T_e . Soit

$$T_J = \frac{2\pi}{\omega_J} \text{ la période du mode le plus rapide. Pour que ce}$$

mode soit effectivement pris en compte, il faut respecter la condition $T_e \leq T_J$. Comme par ailleurs l'étendue spectrale $[\omega_1, \omega_J]$ doit couvrir plusieurs décades (l'expérience montre que 4 à 5 décades constituent un minimum indispensable) [19], on en déduit que $T_e \ll T_1$ (où

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}). \text{ Cette condition se traduit par un très mauvais}$$

conditionnement du modèle discrétisé et une solution numériquement instable pour le calcul de $\underline{Z}(t_0)$ à partir des couples de valeurs $\{u(kT_e), y(kT_e)\}$ pour $k \leq \frac{t_0}{T_e}$.

Même en recourant à un lissage du type moindres carrés, cette approche directe semble inadaptée. Il est donc nécessaire de recourir à une méthode indirecte ; nous proposons l'utilisation d'un observateur.

7.2 Estimation de $\underline{Z}(t_0)$ à l'aide d'un observateur

$\underline{Z}(t_0)$ a pour objectif de résumer le comportement dynamique du système de sortie $y(t)$ soumis à une excitation $u(t)$ pour $t \leq t_0$.

Supposons que l'on dispose des enregistrements de $u(t)$ et $y(t)$ sur un intervalle de temps $[t_d, t_0]$ avec $t_0 - t_d$ le plus large possible. Alors, un observateur, s'il existe, doit être capable de reconstituer $\underline{Z}(t)$ SUR $[t_d, t_0]$ (et donc $\underline{Z}(t_0)$) connaissant $u(t)$ et $y(t)$ sur cet intervalle.

Le problème de l'observation d'un système fractionnaire n'a pas encore été vraiment résolu, tant sur un plan théorique que pratique. Aussi, nous allons nous limiter au cas d'un système à une seule dérivation fractionnaire :

$$\frac{b_0}{a_0 + s^n} \text{ avec } 0 < n < 1 \quad (44)$$

qui ne nécessite donc qu'une seule intégration fractionnaire.

La discrétisation fréquentielle conduit au modèle d'état interne $\underline{Z}(t)$ et de pseudo variable d'état $x(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Z}}(t) &= A \underline{Z}(t) + \underline{B} v(t) \\ x(t) &= \underline{C}^T \underline{Z}(t) \\ v(t) &= u(t) - a_0 x(t) \\ y(t) &= b_0 x(t) \end{aligned} \quad (45)$$

c'est à dire le modèle générant $y(t)$ à partir d'une excitation $u(t)$. Connaissant A , \underline{B} , \underline{C} , b_0 et a_0 , on peut exprimer un observateur de Luenberger [6][8] alimenté par les observations $u(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Z}}_{obs}(t) &= A \underline{Z}_{obs}(t) + \underline{B} v_{obs}(t) \\ x_{obs}(t) &= \underline{C}^T \underline{Z}(t) \\ v_{obs}(t) &= u(t) + K(y(t) - y_{obs}(t)) - a_0 x_{obs}(t) \\ y_{obs}(t) &= b_0 x_{obs}(t) \end{aligned} \quad (46)$$

Cet observateur a pour état interne $\underline{Z}_{obs}(t)$ et $x_{obs}(t)$ comme pseudo variable d'état.

Remarquons que cet observateur possède un état initial $\underline{Z}_{obs}(t_d)$. Comme $\underline{Z}(t_d)$ est évidemment inconnu, on initialise l'observateur avec $\underline{Z}_{obs}(t_d) = 0$.

La vitesse de convergence de l'observateur est réglée par le gain K .

6.2 Exemple d'initialisation

Des simulations numériques ont montré le bien fondé de cette méthodologie, à savoir la convergence de l'observateur, c'est-à-dire :

$$\underline{Z}_{obs}(t_0) \rightarrow \underline{Z}(t_0) \quad (47)$$

et la possibilité d'initialiser le système pour $t > t_0$ grâce à $\underline{Z}_{obs}(t_0)$.

Afin que ce résultat soit encore plus probant, le comportement dynamique du système n'a pas été simulé grâce aux équations (45), mais à l'aide d'une solution analytique. En effet, on sait que pour un système à une seule dérivation, la solution forcée peut être obtenue grâce à l'expression dite de Mittag-Leffler [16].

On a considéré une excitation en créneau telle que :

$$u(t) = E \text{ pour } 0 < t < t_0 \text{ et } u(t) = 0 \text{ pour } t > t_0 \quad (48)$$

La solution forcée $y(t)$ a alors pour expression :

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} E H(t) \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a_0)^k t^{nk}}{\Gamma(nk+1)} \right] - \frac{b_0}{a_0} E H(t-t_0) \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a_0)^k (t-t_0)^{nk}}{\Gamma(nk+1)} \right] \quad (49)$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside.

On a représenté (figure n°2) avec pour $a_0=1$, $b_0=1$, $n=0.5$, $E=1$ et $t_0=2s$, la réponse $y(t)$ à l'excitation en créneau.

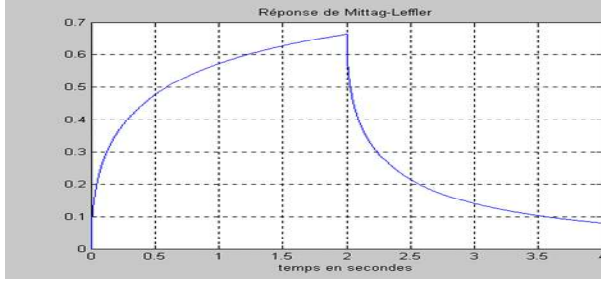


Figure 2 : Réponse du système à une excitation en créneau

Pour $t > t_0$, comme $u(t)=0$, le système est en réponse libre. On a donc choisi d'estimer $\underline{Z}(t_0)$ à partir de la connaissance de $\{u(t), y(t)\}$ sur $[t_d, t_0]$. Concrètement, on a choisi $t_d \neq 0$ afin que le système ne soit pas au repos à l'instant t_d . Les valeurs numériques retenues pour la simulation sont :

$$t_d = 0.1s, K = 50, \omega_1 = 0.002 \text{ rd/s}, \omega_J = 500 \text{ rd/s}, T_e = 0.001s \text{ et } J+1=11.$$

On a représenté figure n°3 l'évolution de $y(t)$ et de $y_{obs}(t)$: après un régime transitoire très bref, $y_{obs}(t) \rightarrow y(t)$.

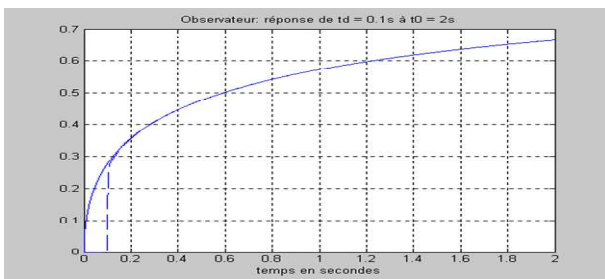


Figure 3 : Réponse de l'observateur

Comme $\underline{Z}(t)$ n'existe pas, la réponse $y(t)$ étant calculée par une expression analytique sans référence avec l'ODE équivalente, il n'est pas possible de juger de la convergence de l'observateur. C'est indirectement l'initialisation du modèle (45) grâce à $\underline{Z}_{obs}(t_0)$ qui nous renseignera sur cette convergence. Rappelons que la convergence de $y_{obs}(t)$ n'implique pas nécessairement celle de $\underline{Z}_{obs}(t)$.

On a ainsi simulé $y_{init}(t)$ pour $t > t_0$, c'est à dire :

$$\underline{Z}_{init}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{Z}_{obs}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \underline{B} v_{init}(\tau) d\tau \quad (50)$$

$$x_{init}(t) = \underline{C}^T \underline{Z}_{init}(t)$$

$$v_{init}(t) = -a_0 x_{init}(t)$$

$$y_{init}(t) = b_0 x_{init}(t)$$

Comme les courbes $y(t)$ et $y_{init}(t)$ apparaissent confondues, on a préféré représenter sur la figure n°4 :

$$erreur(t) = y(t) - y_{init}(t) \quad (51)$$

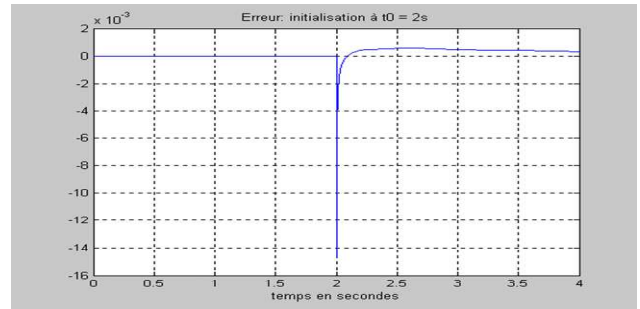


Figure 4 : Erreur d'initialisation

Compte tenu des valeurs numériques, on peut dire que $\underline{Z}_{obs}(t_0)$ a permis de résumer l'évolution passée du système. Cependant, on remarque que deux erreurs résiduelles sont présentes :

- une erreur transitoire pour $t \approx t_0$ due à la troncature des modes les plus rapides.
- une erreur de type régime permanent, pour $t \gg t_0$ due à la troncature des modes les plus lents.

Des essais complémentaires ont montré que ces deux erreurs pouvaient être minimisées en augmentant ω_J (et conjointement en diminuant T_e) et en diminuant ω_1 .

VIII. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons proposé une solution au problème des conditions initiales d'un système fractionnaire à l'aide de l'équivalence de ce système avec une ODE de dimension infinie. Cette équivalence est basée sur la notion d'intégrateur fractionnaire et de sa représentation modale de dimension infinie. Le problème pratique de l'initialisation s'avère lui aussi complexe ; on lui a apporté une solution grâce à un observateur, vérifiée sur un exemple numérique relativement réaliste.

De nouveaux travaux devront compléter ces premiers résultats : analyse de cas plus complexes comportant plusieurs dérivations fractionnaires, mais aussi analyse du concept d'observation de l'état d'un système fractionnaire.

REFERENCES

- [1] J.L. Battaglia, O. Cois, L. Puigsegur, A. Oustaloup « Solving an inverse heat conduction problem using a non integer identified model » International Journal of Heat and Mass Transfer, 44, pp2671-2680, 2001
- [2] A. Benchellal, “Modélisation des interfaces de diffusion à l’aide d’opérateurs d’intégration fractionnaires”. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 2008.
- [3] M. Caputo, “Elasticita e Dissipazione”, Zanichelli, Bologna, 1969
- [4] G. Garcia , J. Bernussou « Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model” Proceedings ESSAIM, Vol 5, 1998
- [5] D. Heleschewitz and D. Matignon, “Diffusive realizations of fractional integro-differential operators: structural analysis under approximation”. Conference IFAC, System, Structure and Control. Vol 2, pp. 243-248, Nantes, France, July 1998.
- [6] T. Kailath, “ Linear Systems”. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1980.
- [7] C.F. Lorenzo and T.T. Hartley, “Initialization in fractional order systems”. Proceedings of the European Control Conference, pp. 1471-1476, Porto, Portugal, 2001.
- [8] D.G. Luenberger, « An introduction to observers”, IEEE Trans. Autom Control, AC-16, pp 596-603, Dec 1971
- [9] D. Matignon, “Représentations en variables d’état de modèles de guides d’ondes avec dérivation fractionnaire”. Thèse de Doctorat. Université de Paris XI, ORSAY, 1994.
- [10] K.S. Miller, B. Ross « An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations » John Wiley and Sons New-York 1993
- [11] G. Montseny, « Diffusive representation of pseudo differential time operators », Proceedings ESSAIM, Vol 5, 1998, pp. 159-175.
- [12] K.B. Oldham, J. Spanier “The fractional calculus“ Academic Press New-York 1974
- [13] A. Oustaloup , “La commande CRONE” Hermès Editeur , Paris, 1991
- [14] A. Oustaloup, “La dérivation non-entière : théorie, synthèse et applications” . Hermès Editeur, Paris, 1995.
- [15] I. Podlubny, L. Dorcak, I. Kostial, “On fractional derivatives, fractional order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ control” Proc. of the Conference on Decision and Control, San Diego, 1997
- [16] I. Podlubny, “Fractional differential equations”. Academic Press, San Diego, 1999.
- [17] J. Sabatier and al, “ On a representation of fractional order systems : interests for the initial condition problem ”. 3rd IFAC workshop, FDA’08, Ankara, Turkey, 5-7 november 2008.
- [18] W. Thomson (Lord Kelvin), “Mechanical integration of the general linear differential equation of any order with variable coefficients”. Proc. Roy. Soc, Vol 24, 1876, pp. 271-275.
- [19] J.C. Trigeassou and al., “Modelling and identification of a non integer order system”. ECC’99 European Control Conference, KARLSRUHE, Germany, 1999.
- [20] J.C. Trigeassou, N. Maamri , “State-space modelling of fractional differential equations and the initial condition problem”, IEEE SSD’09, Djerba, Tunisia, 2009.