

Synthèse d'observateur pour une classe de systèmes non linéaires avec retard inconnu sur la sortie

Mondher FARZA¹, Amine SBOUI¹, Mohammed M'SAAD¹

¹GREYC, UMR 6072 CNRS

Université de Caen Basse Normandie, Ensicaen
6 Bd Maréchal Juin, 14050 Caen Cedex, FRANCE.
mfarza@greyc.ensicaen.fr

Résumé— Dans ce papier, nous proposons des observateurs de type grand gain pour une classe de systèmes non linéaires dont la sortie est disponible avec un retard constant. Dans un premier temps, le retard est supposé connu et un observateur d'état est proposé pour l'estimation de l'état courant. Puis, le retard est supposé inconnu et un observateur adaptatif est proposé pour l'estimation simultanée du retard et de l'état courant. Les observateurs proposés se présentent sous la forme de plusieurs systèmes en cascade et la dimension de chacun d'entre eux est égale à celle du système non linéaire considéré. Le nombre de ces systèmes d'autant plus grand que l'amplitude du retard considéré est importante. Des résultats de simulation sont présentés pour illustrer les performances des observateurs proposés.

Mots-clés— système avec retard, sortie retardée, observateur à grand gain, observateur adaptatif, excitation persistante.

I. INTRODUCTION

L'étude des systèmes à retard reste un domaine ouvert qui fait l'objet de plusieurs travaux. Ceci est essentiellement dû à ce que ces systèmes constituent une problématique commune à de nombreux domaines en biologie, chimie, physique, communication, etc. La présence d'un retard dans la dynamique d'un système lui confère une dimension infinie, ce qui rend son analyse particulièrement complexe.

En ce qui concerne l'observation des systèmes à retard, thème dont traite cette contribution, la plupart des résultats disponibles traitent des systèmes linéaires [13], [10], [12], [3] et on ne recense que peu de résultats dédiés aux systèmes non linéaires [16], [1], [15], [17], [5]. De plus, la plupart de ces résultats sont basés sur des techniques de type LMI et par conséquent l'existence d'un observateur dépend de la faisabilité de certaines LMI. Or, comme c'est justement souligné [2], les conditions de faisabilité des problèmes de type LMI ne sont généralement pas explicitées et de ce fait la faisabilité devrait être préalablement déterminée de manière numérique.

La plupart des travaux mentionnés précédemment traitent des systèmes à retard avec un retard qui intervient dans la dynamique du système sans affecter la sortie. En effet, très peu de travaux traitent de la synthèse d'observateurs avec des sorties retardées. Parmi ces travaux, nous pouvons citer [8] et [11]. Dans [8], les auteurs proposent un observateur, dont la convergence est exponentielle, pour une classe de systèmes non linéaires mono-sortie uniformément observable, avec des non linéarités globalement lipschitziennes et avec une sortie exhibant un retard constant et connu, τ .

L'observateur proposé consiste en une chaîne de $(m + 1)$ systèmes en cascade dont la dimension de chacun est égale à la dimension du système considéré. L'état du premier système de la cascade permet d'estimer l'état retardé du système avec un retard de τ . L'état du dernier système de la cascade est une estimation de l'état courant du système. Il est à noter que le nombre de systèmes en cascade est d'autant plus grand que la constante de Lipschitz et l'amplitude de retard sont importantes. Dans [11], les auteurs proposent un observateur en cascade ayant la même structure que celui proposé dans [8] pour une classe de systèmes similaire aussi à celle considérée dans [8]. Toutefois, le gain de l'observateur proposé dans [11] résulte de la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

Dans cette contribution, nous proposons un observateur en cascade pour une classe de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables exhibant un retard constant qui peut être connu ou non. La caractéristique principale de l'observateur proposé consiste dans le fait que son gain fait intervenir en particulier un paramètre de synthèse de type matrice. L'introduction de cette matrice qui devra être stable permet d'avoir un nombre relativement réduit de systèmes en cascade formant l'observateur proposé et ce même en présence de retard relativement important.

Cet article est organisé comme suit. Nous présentons au paragraphe suivant la classe des systèmes considérés pour la synthèse d'observateurs. Le troisième paragraphe est dédié à la synthèse de l'observateur. Dans un premier temps, la synthèse est réalisée en supposant connu le retard. La convergence exponentielle de l'observateur sous des hypothèses bien établies est détaillée. Ensuite, le cas du retard inconnu est considéré et un observateur approprié pour l'estimation en ligne du retard et de l'état courant à partir de la sortie retardée est proposée. Des résultats de simulation sont présentés et discutés au cinquième paragraphe avant de conclure.

II. FORMULATION DU PROBLÈME

Considérons la classe de systèmes qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t) &= Cx(t - \tau) = x^1(t - \tau) \end{cases} \quad (1)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$C = (1 \ 0 \ \dots \ 0); x = (x^1; x^2; \dots \ x^n)^T \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

La sortie $y(t) \in \mathbb{R}$ est disponible avec un retard constant mais inconnu τ et u est l'entrée du système. La fonction non linéaire φ admet une structure triangulaire par rapport à x , c'est-à-dire

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, x^1) \\ \varphi_2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi_q(u, x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Nous adoptons les hypothèses suivantes :

(H1) L'état $x(t)$ et l'entrée $u(t)$ sont bornés, i.e. $x(t) \in X$ et $u(t) \in U$ pour $t \geq 0$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^s$ sont des compacts.

(H2) La fonction $\varphi(u, x)$ est Lipschitz par rapport à x uniformément en u où $(u, x) \in U \times X$.

Maintenant, nous attirons l'attention sur le fait que lorsque la sortie ne présente pas de retard, le système (1) est une forme canonique qui caractérise une classe de systèmes multi-entrées/multi-sorties uniformément observables. On pourra se référer à [9], [4] où l'on présente plusieurs systèmes avec des transformations appropriées qui les mettent sous la forme (1). De plus, en l'absence de retard sur la sortie et sous l'hypothèse (H1), on peut concevoir un observateur, dont la convergence est exponentielle, pour l'estimation de la trajectoire du système (1). On pourra se référer à [9] où de tels observateurs, de type grand gain, sont présentés.

Notre objectif consiste à concevoir un observateur pour estimer l'état du système (1) à partir de sa mesure retardée.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, très peu de travaux ont traité ce thème, i.e. conception d'observateur en présence de sortie retardée. Parmi les travaux concernés, nous pouvons citer ceux de [8] et [11] où les systèmes considérés possèdent une seule sortie et se mettent donc sous la forme (1) [6], [7]. De plus, le retard a été supposé connu. Dans ces travaux, les auteurs ont proposé un observateur en cascade pour les systèmes considérés et ont prouvé la convergence exponentielle de l'erreur d'observation sous une condition portant sur le retard et la constante de Lipschitz des non linéarités.

Dans ce qui suit, nous allons présenter la synthèse d'un observateur pour l'estimation de l'état courant du système (1). Pour la clarté de l'exposé, nous proposons de présenter la synthèse de l'observateur en supposant tout d'abord que le retard est connu. Puis, on montrera comment étendre la

synthèse au cas du retard inconnu.

III. SYNTHÈSE DE L'OBSERVATEUR

Avant de présenter le système dynamique correspondant aux équations de l'observateur en cascade, nous allons introduire certaines notations.

• Soit Δ_θ la matrice diagonale (par blocs) définie par :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[1, \frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^{n-1}} \right] \quad (5)$$

où $\theta > 0$, est un réel.

• Soit S est la solution unique de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + SA - C^T C = 0 \quad (6)$$

Il a été établi que la matrice S est symétrique définie positive.

• Comme nous l'avons mentionné précédemment, en l'absence de retard, le système (1) admet un observateur dont la convergence est exponentielle. De ce fait, avec une sortie retardée, on peut estimer l'état retardé $x(t - \tau)$ du système (1) à l'aide de cet observateur. En effet, en posant $x_0(t) = x(t - \tau)$, nous avons :

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) &= Ax_0(t) + \varphi(u(t - \tau), x_0) \\ y(t) &= Cx_0(t) = x_0^1(t) \end{cases} \quad (7)$$

Nous avons affaire à un système uniformément observable où le retard n'affecte pas l'état. L'état de ce système peut être estimé par l'observateur de type grand gain suivant :

$$\dot{\tilde{x}}_0(t) = A\tilde{x}_0(t) + \varphi(u_0(t), \hat{x}_0) - \theta \Delta_\theta^{-1} C^T C \tilde{x}_0(t) \quad (8)$$

où $\tilde{x}_0(t) = \hat{x}_0(t) - x_0(t)$; Δ_θ, S et C sont donnés respectivement par (5), (6) et (3) et $\theta > 0$ est un paramètre de synthèse de l'observateur.

• Comme dans [8] et [11], on définit les différents états et entrées retardés :

$$x_j(t) = x(t - \tau + \frac{j}{m}\tau) \text{ et } u_j(t) = u(t - \tau + \frac{j}{m}\tau) \quad (9)$$

pour $j = 0, \dots, m$ et $t \geq -\frac{j}{m}\tau$.

Dans ce qui suit, nous allons proposer un observateur lorsque le retard est connu. Puis, le cas du retard inconnu (et constant) sera considéré.

A. Synthèse de l'observateur avec un retard connu

Nous allons présenter quelques préliminaires avant de donner les équations de l'observateur.

A.1 Quelques préliminaires

Le système (1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + (A - \bar{A})x(t) \\ y(t) &= Cx(t - \tau) = x^1(t - \tau) \end{cases} \quad (10)$$

où \bar{A} est une matrice $n \times n$ quelconque que l'on supposera dans toute la suite être Hurwitz. De ce fait, l'état courant $x(t)$ peut s'exprimer à l'aide de l'état retardé $x(t - \tau)$ comme suit :

$$x(t) = e^{\bar{A}\tau} x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\varphi(u(s), x(s)) + (A - \bar{A})x(s)) ds \quad (11)$$

Pour la synthèse de l'observateur, nous allons considérer un ensemble de systèmes en cascade, l'état de chacun de ces systèmes sera noté \hat{x}_j et appartient à \mathbb{R}^n . L'idée derrière la cascade consiste à faire en sorte que le premier système, qui est en tête de la cascade, permette l'estimation de l'état retardé du système (10) à partir de la sortie retardée. Ensuite, le deuxième système permettra de prédire l'état du système (10) sur une fenêtre dont la longueur dépendra de l'amplitude du retard considéré et de la constante de Lipschitz des non linéarités. Au mieux, la longueur de cette fenêtre sera égale à la valeur du retard et l'état du deuxième système sera donc l'estimation de l'état courant du système. Au pire, la longueur de cette fenêtre sera infiniment petite et il faudra alors considérer beaucoup d'autres systèmes en cascade. Dans tous les cas, l'état du premier système peut être vue comme une approximation de la version retardée de l'état du deuxième système avec un retard égal à la longueur de la fenêtre. De ce fait, considérons $(m+1)$ systèmes en cascade, numérotés de 0 à m , de sorte que le premier système de la cascade, c'est-à-dire le système dont l'état est \hat{x}_0 , soit un observateur de l'état retardé $x(t - \tau)$ et que l'estimation de l'état courant $x(t)$ soit fournie par l'état du dernier système de la cascade, en l'occurrence \hat{x}_m . En nous inspirant de la relation (11), nous imposons à deux états successifs \hat{x}_{j-1} et \hat{x}_j d'être liés par la relation suivante :

$$\hat{x}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \hat{x}_{j-1}(t) + e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} \psi_j(s) ds \quad \text{pour } j = 1, \dots, m \quad (12)$$

Avec $\psi_j(t) = \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) + (A - \bar{A})\hat{x}_j(t)$.

A partir de cette relation, l'état du $(j-1)^{\text{ème}}$ système apparaît comme étant la version retardée de l'état du système j avec un retard égal à $\frac{\tau}{m}$ qui présente la longueur de la fenêtre de prédiction de \hat{x}_{j-1} .

A.2 Equations de l'observateur

La dynamique de l'état \hat{x}_0 est donnée par l'observateur (8). Il reste donc à déterminer la dynamique de \hat{x}_j , $j = 1, \dots, m$ à partir de (12). Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \dot{\hat{x}}_{j-1}(t) + \bar{A} \left(\hat{x}_j(t) - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \hat{x}_{j-1}(t) \right) \\ &\quad + e^{\bar{A}t} e^{-\bar{A}t} \psi_j(t) - e^{\bar{A}t} e^{-\bar{A}(t-\frac{\tau}{m})} \psi_j(t - \frac{\tau}{m}) \\ &= A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) \\ &\quad + e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} (\dot{\hat{x}}_{j-1}(t) - \bar{A}\hat{x}_{j-1}(t)) \\ &\quad - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - (A - \bar{A})\hat{x}_{j-1}(t) \\ &\quad - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} (\psi_j(t - \frac{\tau}{m}) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t))) \\ &\quad - (A - \bar{A})\hat{x}_{j-1}(t) \\ &= A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) + e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} (\dot{\hat{x}}_{j-1}(t) \\ &\quad - A\hat{x}_{j-1}(t) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t))) \\ &\quad - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} (\psi_j(t - \frac{\tau}{m}) - \psi_{j-1}(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

Introduisons maintenant les variables suivantes pour $j = 0, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} s_j &= \dot{\hat{x}}_j - A\hat{x}_j(t) - \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) \\ \delta_j &= \psi_j(t) - \psi_{j+1}(t - \frac{\tau}{m}) \end{aligned} \quad (14)$$

D'après l'observateur (19), nous avons

$$s_0 = -\theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{x}_0 - x(t - \tau)) \quad (15)$$

Avec ces notations, l'équation (13) devient

$$s_j = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} s_{j-1} + e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \delta_{j-1} \quad (16)$$

d'où l'on peut déduire :

$$s_j = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}j} s_0 + \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}(j-i)} \delta_i \quad (17)$$

En utilisant les deux expressions de s_j données par (14) et (17) et en remplaçant s_0 par (15), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_j &= A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) \\ &\quad - \theta e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}j} \Delta_\theta^{-1} (\hat{x}_0 - x(t - \tau)) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}(j-i)} (\psi_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}) - \psi_i(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

Nous pouvons maintenant présenter l'ensemble des systèmes en cascade qui forment l'observateur permettant d'estimer l'état $x(t)$ à partir de la mesure de la sortie retardé $Cx(t - \tau)$. Ces équations s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0(t) = A\hat{x}_0(t) + \varphi(u_0(t), \hat{x}_0) - \theta \Delta_\theta^{-1} C^T C \tilde{x}_0 \\ \dot{\hat{x}}_j(t) = A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j) - \theta e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}j} \Delta_\theta^{-1} C^T C \tilde{x}_0 \\ \quad - \sum_{i=0}^{j-1} e^{(j-i)\frac{\tau}{m}\bar{A}} (\psi_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}) - \psi_i(t)) \\ j = 1, \dots, m, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

avec $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, \dots, m$, la matrice \bar{A} est une matrice de synthèse et devra être choisie Hurwitz et enfin le paramètre θ est un scalaire et représente aussi un paramètre de synthèse.

Avant d'énoncer le premier résultat de cette contribution, nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

(H3) La matrice \bar{A} , le retard τ , la constante de Lipschitz L_φ et m satisfont l'inégalité suivante :

$$(L_\varphi + \|\bar{A} - A\|) \frac{\tau}{m} < 1 \quad (20)$$

Théorème 1 : Sous les hypothèses (H1) à (H3), le système (19) est un observateur exponentiel pour le système (10). Plus précisément, nous avons :

$$\exists \mu_m > 0 ; \exists \alpha_m > 0 ; \forall t \geq -\tau : \|\hat{x}_m(t) - x(t)\| \leq \mu_m e^{-\alpha_m t}$$

Preuve : Posons $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$, $j = 0, \dots, m$. Nous allons procéder par récurrence sur l'indice j . Comme l'erreur d'observation sur l'état retardé, i.e. $\tilde{x}_0(t)$, converge exponentiellement vers 0 avec une vitesse de convergence pouvant être choisie arbitrairement grande, il existe $\mu_0, \alpha_0 > 0$ tel que

$$\|\tilde{x}_0\| \leq \mu_0 e^{-\alpha_0 t}, \quad t \geq 0 \quad (21)$$

Supposons maintenant qu'il existe $\mu_{m-1}, \alpha_{m-1} > 0$ tel que

$$\|\tilde{x}_{m-1}\| \leq \mu_{m-1} e^{-\alpha_{m-1}t} \quad (22)$$

et montrons l'existence de réels $\mu_m = \mu > 0$ et $\alpha_m = \alpha$ pour lesquels

$$\|\tilde{x}_m\| \leq \mu e^{-\alpha t} \quad (23)$$

A partir de (11) et (12), on a :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \tilde{x}_{j-1}(t) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} \\ &(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A - \bar{A})\tilde{x}_j(s)) ds \end{aligned} \quad (24)$$

D'où, compte tenu du fait que φ est globalement lipschitzienne, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| \|\tilde{x}_{j-1}(t)\| + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e^{\bar{A}(t-s)}\| \\ &(\|\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s))\| + \|A - \bar{A}\| \|\tilde{x}_j(s)\|) ds \\ &\leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| \|\tilde{x}_{j-1}(t)\| \\ &+ (L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e^{\bar{A}(t-s)}\| \|\tilde{x}_j(s)\| ds \end{aligned} \quad (25)$$

où L_φ est la constante de Lipschitz de φ .

Or, comme \bar{A} est Hurwitz, nous avons les deux inégalités suivantes :

$$\|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|e^{\bar{A}(t-s)}\| \leq 1 \quad \forall s \in [t - \tau, t]$$

L'inégalité (25) devient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \|\tilde{x}_{j-1}(t)\| \\ &+ (L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_j(s)\| ds \end{aligned} \quad (26)$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, l'inégalité (26) s'écrit pour $j = m$ comme suit :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_m(t)\| &\leq \mu_{m-1} e^{-\alpha_{m-1}t} \\ &+ (L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_m(s)\| ds \end{aligned} \quad (27)$$

Pour conclure, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme : [8] Soit $\varphi(t) \geq 0$, $t \in [\delta, +\infty[$, avec $\delta > 0$ une fonction qui est telle que

$$\int_{-\delta}^0 \varphi(s) ds < +\infty \quad \text{et} \quad \varphi(s) \leq \mu^* e^{-\alpha^* s} + \gamma \int_{t-\delta}^t \varphi(s) ds \quad (28)$$

où μ^*, α^* et γ sont des réels strictement positifs. Si $\gamma\delta < 1$, alors il existe un réel $0 < \alpha \leq \alpha^*$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq \mu e^{-\alpha t} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{e^{\alpha\tau}}{1-c} \left(\mu^* + \gamma \int_{-\delta}^0 \varphi(s) ds \right), \\ \text{et} \quad c &= \frac{\gamma}{\alpha} (e^{\alpha\delta} - 1) < 1 \end{aligned} \quad (29)$$

En effet, compte tenu de l'inégalité (27), nous sommes dans les conditions de l'application du lemme qui assure l'existence du réel $\alpha = \alpha_m$ ainsi que de celle de $\mu_m = \mu$ qui de plus s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{e^{\alpha\frac{\tau}{m}}}{1-c} \left(\mu_{m-1} + (L_\varphi + \|\bar{A} - A\|) \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|e_j(s)\| ds \right) \\ \text{et} \quad c &= \frac{L_\varphi + \|\bar{A} - A\|}{\alpha} (e^{\alpha\frac{\tau}{m}} - 1) \end{aligned} \quad (30)$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

B. Synthèse de l'observateur avec un retard inconnu

Lorsque le retard est inconnu, le système (7) peut être vu comme étant un système qui est paramétré de manière non linéaire en le paramètre inconnu τ . Nous pouvons dans ce cas utiliser l'observateur proposé dans [5] pour estimer conjointement l'état retardé et le retard inconnu. L'équation de l'observateur se présente comme suit [5] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0 &= A\hat{x}_0 + \tilde{\varphi}(u(t-\hat{\tau}), \hat{x}_0) \\ &\quad - \theta \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + p(t)) \Upsilon(t) \Upsilon^T(t) C^T C \tilde{x}_0 \\ \dot{\hat{\tau}}(t) &= -\theta p(t) \Upsilon^T(t) C^T C \tilde{x}_0 \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta (A - S^{-1} C^T C) \Upsilon(t) \\ &\quad - \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(t-\hat{\tau}), \hat{x}_0) \dot{u}(t-\hat{\tau}) \quad ; \quad \Upsilon(0) = 0 \\ \dot{p}(t) &= -\theta p^2(t) \Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t) + \theta p(t) \quad ; \quad p(0) > 0 \end{cases} \quad (31)$$

où Δ_θ, S et C sont donnés respectivement par (5), (6) et (2) et $\theta > 0$ est un paramètre de synthèse de l'observateur.

La convergence exponentielle des erreurs d'observation et d'adaptation paramétrique est garantie dès lors que la condition "classique" d'excitation persistante suivante est satisfaite :

((H3)') L'entrée $u(t)$ est telle que pour toute condition initiale $\hat{x}_0 \in X$, la trajectoire du système dynamique (31) est telle que la matrice $C\Upsilon(t)$ est à excitation persistante, c'est-à-dire

$$\exists \delta_1, \delta_2 > 0; \exists T > 0; \forall t \geq 0 :$$

$$\delta_1 I_m \leq \int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau) C^T C \Upsilon(\tau) d\tau \leq \delta_2 I_m$$

Bien sûr, nous supposons que la paramétrisation en τ est injective sur l'ensemble d'appartenance de τ pour que le retard soit identifiable. On notera que le vecteur $\Upsilon(t)$ intervenant dans l'observateur (31) et sur lequel porte la condition d'excitation persistante n'est en fait qu'une version filtrée (par la matrice stable $\theta (A - S^{-1} C^T C)$) du vecteur $\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(t-\hat{\tau}), \hat{x}_0) \dot{u}(t-\hat{\tau})$. Il est à noter que compte tenu de l'hypothèse (H1), le vecteur $\Upsilon(t)$ est borné. De même, sous l'hypothèse (H3'), la fonction réelle $p(t)$ reste strictement positive dès lors que $p(0)$ est choisie > 0 .

Dans ce qui suit, nous allons présenter un observateur adapté en cascade qui permet l'estimation du retard et de l'état actuel $x(t)$ en fonction de la sortie retardée $x(t-\tau)$. Pour ce faire, nous définissons, en plus des états et entrées retardés introduits en (9), les variables suivantes :

$$z_j(t) = x(t - (1 - \frac{j}{m})\hat{\tau}(t)) \quad \text{et} \quad \hat{u}_j(t) = u(t - (1 - \frac{j}{m})\hat{\tau}(t)) \quad (32)$$

IV. EXEMPLE

pour $j = 0, \dots, m$ et $t \geq -\frac{j}{m}\tau$ et $\hat{\tau}$ est l'estimation de τ fourni par l'observateur (31). Rappelons que $\tilde{\tau}(t) = \hat{\tau}(t) - \tau$ converge exponentiellement vers 0. Nous allons montrer que $z_j(t)$ converge exponentiellement vers $x_j(t)$. En effet, appliquons le théorème de la valeur moyenne à chacune des composantes de z_j :

$$\begin{aligned} z_j(t) &= x(t - (1 - \frac{j}{m})\tau) \\ &\quad - (1 - \frac{j}{m})\dot{x}\left(t - (1 - \frac{j}{m})(\hat{\tau}(t) + t_j(\hat{\tau}(t) - \tau))\right) (\hat{\tau}(t) - \tau) \\ &\quad \text{où } t_j \in]0, 1[. \end{aligned} \quad (33)$$

Comme l'état $x(t)$ est borné, nous pouvons déduire à partir de l'équation du système (10), qu'il en est de même pour sa dérivée par rapport au temps. Compte tenu de ce fait et du fait que $\tilde{\tau}(t) = \hat{\tau}(t) - \tau$ converge exponentiellement vers 0, on déduit que $z_j(t)$ converge exponentiellement vers $x_j(t)$.

En procédant de la même manière qu'avec un retard connu, les équations de l'observateur avec retard inconnu se présentent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_0 = A\hat{z}_0 + \bar{\varphi}(u(t - \hat{\tau}), \hat{z}_0) \\ \quad - \theta \Delta_{\theta}^{-1} (S^{-1} + p(t)\Upsilon(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \hat{z}_0 \\ \dot{\hat{\tau}}(t) = -\theta p(t)\Upsilon^T(t) C^T C \hat{z}_0 \\ \dot{\Upsilon}(t) = \theta (A - S^{-1} C^T C) \Upsilon(t) \\ \quad - \Delta_{\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(t - \hat{\tau}), \hat{z}_0) \dot{u}(t - \hat{\tau}) \text{ avec } \Upsilon(0) = 0 \\ \dot{p}(t) = -\theta p^2(t)\Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t) + \theta p(t) \quad ; \quad p(0) > 0 \\ \dot{\hat{z}}_j = A\hat{z}_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t)) \\ \quad - \theta e^{\bar{A} \frac{j\hat{\tau}}{m}} \Delta_{\theta}^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \hat{x}_0 \\ \quad - \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A} \frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} (\psi_{j+1}(t - \frac{\hat{\tau}(t)}{m}) - \psi_j(t)) \\ \quad \frac{\theta}{m} \Delta_{\theta}^{-1} P(t)\Upsilon^T(t) C^T C \hat{z}_0 \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A} \frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} \gamma_i \\ \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \right.$$

Avant d'énoncer le second résultat de cette contribution, nous avons besoin de remplacer l'hypothèse 2 par l'hypothèse suivante :

((H2)') La matrice \bar{A} , l'estimé du retard $\hat{\tau}(t)$, la constante de Lipschitz L_{φ} et m satisfont l'inégalité suivante :

$$(L_{\varphi} + \|\bar{A} - A\|) \frac{\tau^*}{m} < 1 \text{ avec } \tau^* = \sup_{t \geq 0} \hat{\tau}(t) \quad (34)$$

Nous énonçons maintenant le résultat suivant :

Théorème 2 : *Sous les hypothèses (H1), ((H2)') et ((H3)'), le système (34) permet d'estimer simultanément la trajectoire de $z_m(t)$ et la valeur τ . De plus, l'erreur d'estimation décroît de manière exponentielle. Plus précisément, nous avons : $\exists \mu_m > 0$; $\exists \alpha_m > 0$; $\forall t \geq -\tau$:*

$$\|\hat{z}_m(t) - z_m(t)\| \leq \mu_m e^{-\alpha_m t} \text{ et } \|\hat{\tau}(t) - \tau\| \leq \mu_m e^{-\alpha_m t}$$

Nous remarquons que l'hypothèse (H2)' est assez restrictive. En effet, bien que cette hypothèse rejoint l'hypothèse (H2) dès que l'estimé $\hat{\tau}(t)$ aurait convergé vers τ , elle risque d'être violée pendant le transitoire et une valeur de m relativement très élevée devient nécessaire pour que la condition soit vérifiée. Ceci sera illustrée à travers un exemple en simulation.

Nous allons considérer le même exemple que dans [8] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + x_1(t)x_2(t) + x_1(t)u(t) \\ y &= x_1(t - \tau) \end{cases} \quad (35)$$

Dans toutes les simulation, nous avons pris $\bar{A} = A - I_2$ où I_2 est la matrice identité 2×2 .

Plusieurs simulations ont été effectuées avec des observateurs formés de 2, 3 et 4 systèmes en cascade. Pour chacun de ces observateurs, nous avons déterminé la valeur maximale du retard, τ_{max} , pour laquelle l'estimation fournie par l'observateur est convenable. Nous reproduisons dans le tableau suivant les résultats obtenus :

m	2	3	4
τ_{max} (retard connu)	2.0	3.8	5.4
τ_{max} (retard inconnu)	1.9	2.8	3.7

TABLE I

DIFFÉRENTES VALEURS DE m DONNANT DES ESTIMATIONS SATISFAISANTES POUR $\tau \leq \tau_{max}$

Dans ce qui suit, nous allons présenter deux ensembles de résultats correspondant à l'estimation de l'état respectivement avec un retard connu et inconnu. Dans le cas du retard inconnu, une estimation de sa valeur est délivrée par l'observateur.

1. Résultats d'estimation avec retard connu

Nous avons représenté sur la figure 1 les états x_1 et x_2 avec leurs prédictions lorsque $\tau = 1.7$ pour deux valeurs de m qui sont respectivement égales à 2 et à 4. Dans les deux cas, les valeurs prédites par l'observateur convergent vers les vraies valeurs avec, comme l'on devrait s'y attendre, une convergence plus rapide pour $m = 4$.

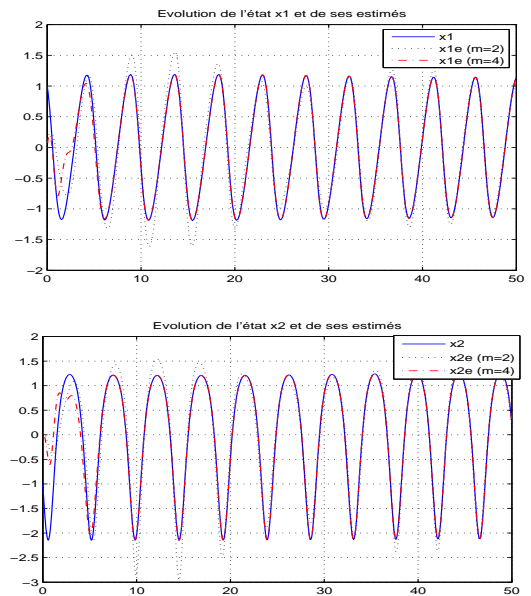


Fig. 1. Prédiction de x_1 et x_2 avec $\tau = 1.7$ et $m = 2$ et $m = 4$

.2 Résultats d'estimation avec retard inconnu

Nous avons reproduit dans la figure 2 les évolutions dans le temps des états x_1 et x_2 comparées à leurs valeurs prédites par l'observateur pour deux valeurs de m respectivement égales à 2 et 4. L'estimation du retard est comparée avec sa vraie valeur sur la figure 3. On remarque que dans ce cas aussi, l'observateur proposé permet d'estimer de manière satisfaisante aussi bien le retard que les états du système.

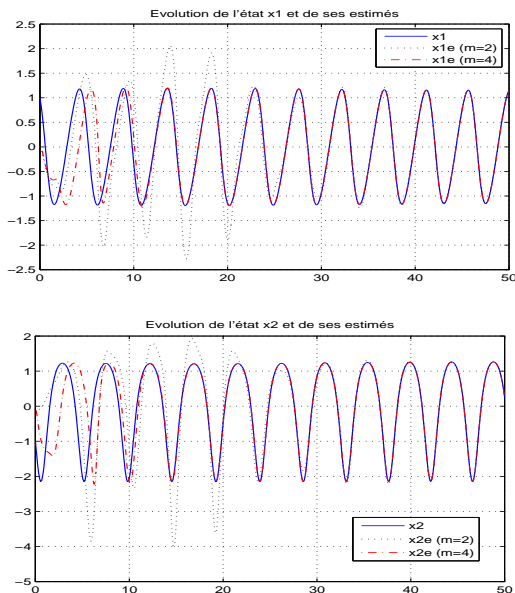


Fig. 2. Prédiction de x_1 et x_2 avec retard inconnu ($=1.7$) et $m = 2$ et $m = 4$

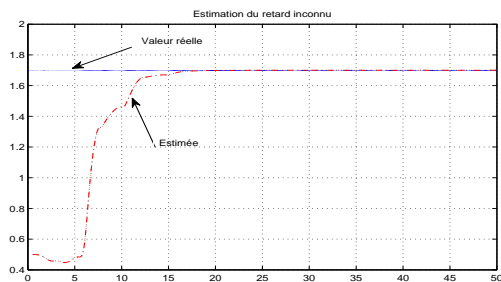


Fig. 3. Estimation du retard inconnu

V. CONCLUSION

Nous avons présenté la synthèse d'un observateur en cascade permettant la prédiction de l'état à partir de la mesure retardée, avec un retard constant, pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observables. La synthèse a tout d'abord été présentée en supposant le retard connu. Puis, nous avons étendu la synthèse au cas du retard inconnu et un observateur adaptatif, en cascade, a été présenté pour estimer simultanément l'état actuel du système ainsi que la valeur du retard. Les performances des observateurs proposés ont été illustrés en simulation à travers un exemple.

La synthèse des observateurs proposés s'étend telle quelle

à la classe des systèmes uniformément observables où le retard intervient aussi dans la dynamique mais de manière triangulaire et ceci indépendamment du fait que le retard soit connu ou non. Ceci résulte du fait que cette nouvelle classe de systèmes (uniformément observables avec des non linéarités renfermant des états retardés intervenant de manière triangulaire) ont été considérés dans [5] et [14] où les auteurs ont proposé des observateurs appropriés (d'état ou adaptatif) pour estimer l'état du système (et éventuellement les retards inconnus et constants) à partir de mesures non retardées de la sortie.

RÉFÉRENCES

- [1] W. Aggoune, M. Boutayeb, and M. Darouach. Observers design for a class of nonlinear systems with time-varying delay. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, 1999*.
- [2] M. Arcak and P. Kokotović. Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37 :1923–1930, 2001.
- [3] T. Azuma, S. Sagara, M. Fujita, and K. Uchida. Output feedback control synthesis for linear time-delay systems via infinite-dimensional lmi approach. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2003*.
- [4] M. Farza, M. M'Saad, T. Maatoug, and M. Kamoun. Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45(10) :2292–2299, 2009.
- [5] M. Farza, A. Sboui, E. Cherrier, and M. M'Saad. High-gain observer for a class of time-delay nonlinear systems. *Int. J. of Contr.*, page DOI : 10.1080/00207170903141069, 2009.
- [6] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-37 :875–880, 1992.
- [7] J.P. Gauthier and I. Kupka. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [8] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe. A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Trans. Automatic Control*, 47 :96–101, 2002.
- [9] H. Hammouri and M. Farza. Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM J. on Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :353–370, 2003.
- [10] M. Hou, P. Zitek, and R.J. Patton. An observer design for linear time-delay systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 47(1) :121–125, 2002.
- [11] N. Kazantzis and R. A. Wright. Nonlinear observer design in the presence of delayed output measurements. *Sys. & Control Letters*, 54 :877–886, 2005.
- [12] V.L. Kharitonov and A. Zhabko. Lyapunov-Krasovskii approach for robust stability of time delay systems. *Automatica*, 39 :15–20, 2003.
- [13] F. Mazenc and S.I. Niculescu. Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems. *Sys. & Control Letters*, 42 :245–251, 2001.
- [14] A. Sboui, M. Farza, E. Cherrier, and M. M'Saad. Adaptive observer for a class of nonlinear time delay systems. In *15th IFAC Symposium on System Identification, Saint-Malo, France, July 2009*.
- [15] H. Trinh, M. Aldeen, and M. Nahavandi. An observer design for a class of nonlinear time-delay systems. *Computers & Electrical Engineering*, 1(30) :61–72, 2004.
- [16] H. Yang and M. Saif. Observer design and fault diagnosis for state-retarded dynamical systems. *Automatica*, 34(2) :217–227, 1998.
- [17] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. Iulia Bara. Observer design for a class of Lipschitz time-delay systems. *Int. J. of Modelling, Identification and Control*, 1(4) :28–36, 2008.