

Propriétés spectrales et entrées-sorties du modèle hamiltonien à ports réduit des équations de Saint-Venant

Boussad HAMROUN¹, Peng HUI², Laurent LEFÈVRE², Eduardo MENDES¹, Françoise COUENNE², Yann LE GORREC²

¹LCIS - Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes,
Grenoble INP, France
boussad.hamroun@lcis.grenoble-inp.fr, eduardo.mendes@lcis.grenoble-inp.fr

² LAGEP - Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés
UMR 5007 CNRS
Université Claude Bernard - Lyon 1, Lyon, France
lefevre@lagep.univ-lyon1.fr

Résumé— On présente dans ce papier quelques propriétés importantes du modèle hamiltonien à ports réduit des équations de Saint-Venant qui donnent la dynamique de la hauteur et du débit d'eau dans un canal à surface libre. On montre la convergence du spectre du modèle hamiltonien à ports réduit vers celui en dimension infinie. Une comparaison entre les fonctions de transfert du modèle réduit et celui en dimension infinie montre la convergence des fonctions de transfert du modèle réduit vers celles en dimension infinie lorsque le nombre d'éléments du modèle réduit augmente.

Mots-clés— Equations de Saint-Venant, Modèle hamiltonien à ports, éléments finis mixtes.

I. INTRODUCTION

L'extension de la représentation hamiltonienne à ports aux systèmes à paramètres distribués permet de décrire de façon naturelle le problème de commande de ce genre de système. Cette approche consiste à représenter le système comme une interconnexion de sous-systèmes (conservatifs ou dissipatifs) à travers une structure géométrique appelée structure de *Stokes-Dirac* qui traduit le principe de conservation de la puissance instantanée échangée. Elle permet de voir clairement la façon dont le système interagit avec l'environnement extérieur via des variables de ports (variables de puissance) [1]. Une formulation hamiltonienne à ports des écoulements unidimensionnels à surface libre modélisés par les équations de Saint-Venant a été proposée dans [4]. Des propriétés intéressantes telles que la passivité et la conservation d'énergie découlent naturellement de cette formulation. D'autre part, la modularité de cette approche nous permet aussi de traduire facilement le cas d'interconnexions de plusieurs biefs à travers des ouvrages hydrauliques tels que les vannes et les déversoirs. En utilisant des méthodes de type éléments finis mixtes, un modèle hamiltonien à ports réduit a été obtenu [3]. Cette réduction dite géométrique a permis de conserver les propriétés dynamiques qualitatives du modèle d'origine, nécessaires autant pour représenter fidèlement la physique des systèmes considérés (écoulements à surface libre) qu'au développement de lois de commande.

Dans ce papier on présente quelques propriétés du modèle hamiltonien à ports réduit qui peut être uti-

lisé pour des objectifs de simulation ou de synthèse de lois de commande. Cette analyse compare les performances de la méthode de réduction (en plus des performances géométriques et énergétiques) avec d'autres méthodes existantes de réduction. Dans un premier temps, on s'intéressera aux propriétés spectrales du modèle réduit. On montre que le spectre de la structure d'interconnexion du modèle réduit (structure de Dirac) converge vers celui de la structure d'interconnexion de Stokes-Dirac en dimension infinie. On comparera aussi le spectre de la dynamique du modèle hamiltonien à ports réduit linéarisé autour d'un profil d'équilibre uniforme avec le spectre calculé des équations de Saint-Venant linéarisées autour du même profil d'équilibre et le spectre du modèle réduit obtenu par la méthode de collocation orthogonale.

Deuxièmement, on présente une analyse des propriétés entrées-sorties du modèle hamiltonien à ports réduit. On calcule d'abord les fonctions de transfert irrationnelles correspondant au modèle linéarisé des équations de Saint-Venant autour d'un profil d'équilibre uniforme. Ensuite, le modèle hamiltonien à ports réduit est linéarisé autour du même profil d'équilibre et les fonctions de transfert entre les variables de ports d'entrées-sorties sont calculées. Une comparaison entre les diagrammes de Bode des fonctions de transfert en dimension finie et infinie montre le recouvrement des gains et phases des fonctions de transfert en dimension infinie lorsque le nombre d'éléments du modèle réduit augmente.

II. FORMULATION HAMILTONIENNE À PORTS DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT

Les équations de Saint-Venant décrivent la dynamique d'un écoulement à surface libre d'un fluide dans des conditions dites d'écoulements filaires [2]. Elle traduisent le principe de conservation de la matière et de la quantité de mouvement du fluide. Ainsi, le volume élémentaire ($q(x, t) = Bh(x, t)dx$) et la densité surfacique de la quantité de mouvement ($p(x, t) = \rho v(x, t)dx$) sont le choix naturel en tant que variables d'énergies (variables d'état). Dans le cas d'un canal rectangulaire de largeur B , de longueur L et de pente

I ($h(x, t)$ et $v(x, t)$ représentent, respectivement, la hauteur et la vitesse du fluide). Les variables q et p sont dites extensives car elles sont intégrables sur un espace de dimension 1, autrement dit ce sont des 1-formes différentielles ($\Omega^1(Z = [0, L])$). La formulation hamiltonienne à ports des équations de Saint-Venant est donnée comme suit [4] :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial q}{\partial t} \\ -\frac{\partial p}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_q H \\ \delta_p H \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} e_{\partial}^0(t) \\ e_{\partial}^L(t) \\ f_{\partial}^0(t) \\ f_{\partial}^L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_q H|_{x=0} \\ \delta_q H|_{x=L} \\ \delta_p H|_{x=0} \\ \delta_p H|_{x=L} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Où d représente l'opérateur de dérivée extérieure et H l'énergie totale du fluide :

$$H(h, v) = \int_0^L \mathcal{H}(x, t) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho g B h^2 - 2\rho B I h g x + \rho B h v^2) dx \quad (4)$$

$e_q(x, t), e_p(x, t)$ sont les variables d'efforts données par les dérivées variationnelles de l'énergie H :

$$\begin{aligned} e_q(x, t) &:= \delta_q \mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho v^2(x, t) + \rho g (h(x, t) - I x) \\ e_p(x, t) &:= \delta_p \mathcal{H} = B h(x, t) v(x, t) \end{aligned} \quad (5)$$

Elles représentent, respectivement, la pression hydrodynamique et le débit volumique. Ci-après : f_d représente le flux de quantité de mouvement dissipée par frottement du fluide avec le fond et les berges obtenu en utilisant la formule de Manning-Strickler :

$$f_d = \rho g J(e_p, h) dx = G \wedge e_p \in \Omega^1(Z) \quad (6)$$

avec

$$G = \frac{\rho g |e_p|}{K^2 S^2 \left(\frac{S}{p}\right)^{\frac{4}{3}}} dx \quad (7)$$

et \wedge représente le produit extérieur de deux formes différentielles. Les variables $e_{\partial}^0(t), f_{\partial}^0(t), e_{\partial}^L(t), f_{\partial}^L(t)$ sont les flux (débits) et les efforts (pressions) aux frontières spatiales du canal. A partir de cette formulation on montre facilement la propriété de passivité du système :

$$\frac{dH}{dt} = e_{\partial}^0(t) f_{\partial}^0(t) - e_{\partial}^L(t) f_{\partial}^L(t) - \int_Z e_p \wedge f_d(t) \quad (8)$$

III. LE MODÈLE HAMILTONIEN À PORTS RÉDUIT DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT

Un modèle hamiltonien à ports réduit des équations de Saint-Venant a été développé dans [4] en utilisant un schéma de réduction géométrique basé sur la méthode des éléments finis mixtes. La longueur totale du canal a été subdivisée en n éléments. Chaque élément est donné par un modèle hamiltonien à ports réduit à deux variables d'état (volume total et quantité de mouvement totale). Le modèle globale est obtenu par une interconnexion série des

éléments adjacents et peut être écrit sous la forme explicite suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & M \\ -M^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G(q, p) \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + g_u \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = g_u^T \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (10)$$

où $q = [q_1 \dots q_n]^T$ et $p = [p_1 \dots p_n]^T$ sont, respectivement, les vecteurs des variables d'état des volumes et quantités de mouvement de l'ensemble des cellules. La sous-matrice d'interconnexion $M (\in \mathbb{R}^{n \times n})$ ainsi que la matrice d'entrée $g_u (\in \mathbb{R}^{2n \times 2})$ sont données par :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$g_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0_{(2n-2) \times 1} & 0_{(2n-2) \times 1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

La matrice de dissipation $G(q, p) = \text{diag}\{G_i(q, p)\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est obtenue en utilisant la formule de Manning-Strickler :

$$G_i(q, p) = g \frac{p_i}{K^2 q_i} \left(\frac{B^2(b-a) + 2q_i}{B q_i} \right)^{\frac{4}{3}} (b-a) > 0, \forall q_i > 0 \quad (13)$$

où K est le paramètre de Manning-strickler et $(b-a)$ est la longueur de l'élément $[a, b]$. L'énergie totale du système est donnée par la somme des énergies individuelles de chaque cellule.

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{q_i(t)^2}{C_{ab}} + \frac{1}{2} \frac{q_i(t) p_i(t)^2}{L_{ab}} - \rho g I K_{ab} q_i(t) \right) \quad (14)$$

Avec les expressions suivantes des éléments réduits et des efforts réduits :

$$C_{ab} = \frac{B}{\rho g} (b-a), L_{ab} = \rho (b-a)^2, K_{ab} = \frac{b+a}{2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) = \frac{q_i}{C_{ab}} + \frac{p_i^2}{2L_{ab}} - \rho g I K_{ab}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) = \frac{q_i p_i}{L_{ab}} \quad (16)$$

IV. LES PROPRIÉTÉS SPECTRALES DU MODÈLE HAMILTONIEN À PORTS RÉDUIT

Dans cette section, on présente une analyse des propriétés spectrales du modèle hamiltonien à ports réduit des équations de Saint-Venant. On montre dans un premier temps que le spectre de la structure géométrique d'interconnexion (Structure de Dirac) du modèle réduit

converge vers celui de la structure en dimension infinie lorsque le pas de la discrétisation spatiale diminue. On compare ensuite le spectre du modèle réduit défini autour d'un point d'équilibre avec le spectre théorique des équations de Saint-Venant, ainsi qu'avec celui du modèle obtenu par la méthode de collocation orthogonale.

A. Le spectre de la structure de Stokes-Dirac

On calcule d'abord les valeurs propres de la structure de Stokes-Dirac utilisée dans la formulation hamiltonienne des écoulements à surface libre donnée dans (1). Les valeurs propres de cette structure pour des conditions aux frontières nulles sont calculées comme suit :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_q(x) \\ \psi_p(x) \end{pmatrix} = \star\lambda \begin{pmatrix} \psi_q(x) \\ \psi_p(x) \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_q(0) \\ \psi_p(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Après calcul on obtient des valeurs propres imaginaires pures données par :

$$\star\lambda_k = \frac{2k+1}{2L}\pi i \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

Remarque : La structure de Stokes-Dirac comme écrite dans (1) fait intervenir la dérivée extérieure d qui associe à toute 0-forme différentielle une 1-forme différentielle. Les valeurs propres de la structure de Stokes-Dirac peuvent donc être définies à partir de (19) comme des 1-forme différentielles :

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2L}\pi i \, dx \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

Ces valeurs propres complexes conjuguées et purement imaginaires correspondent bien aux valeurs propres d'un opérateur symplectique.

B. Le spectre de la structure de Dirac du modèle réduit

On va maintenant calculer le spectre de la structure d'interconnexion du modèle hamiltonien à ports réduit des écoulements à surface libre donnée par la matrice anti-symétrique suivante :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & M \\ -M^T & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

où la sous-matrice M est donnée par (11). Étant donné que la matrice J est anti-symétrique, ces valeurs propres sont complexes conjuguées et satisfont :

$$\det(\lambda^2 I - M^T M) = 0 \quad (22)$$

Soit μ une valeur propre de $A_M = M^T M$ (carré des valeurs singulières de M). On a :

$$A_M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

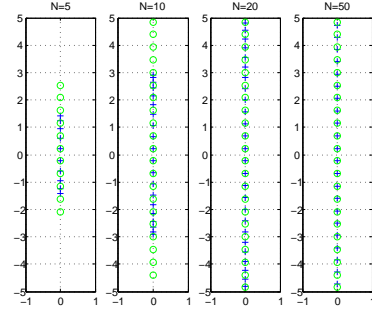


Fig. 1. "+" spectre de la structure de Dirac, "o" spectre de la structure de Stokes-Dirac

Le polynôme caractéristique de A_M défini par $P_n(\mu) = \det(\mu I - A_M)$ satisfait la récurrence suivante :

$$P_n = (\mu + 2)P_{n-1} - P_{n-2} \quad (24)$$

Avec $P_0 = 1$ et $P_1 = 1 + \mu$. Elle représente une équation aux récurrences d'ordre 2. Après calcul on trouve les solutions suivantes pour λ et μ :

$$\mu_k = \lambda_k^2 = 2 \cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right) - 2 \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \quad (25)$$

Considérons maintenant le cas de grandes valeurs de n (nombre d'éléments de la décomposition spatiale) et $k \ll n$ (premières valeurs propres), on obtient le développement asymptotique suivant :

$$\mu_k = \lambda_k^2 = -\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (26)$$

On multiplie et on divise l'expression de λ_k par la longueur élémentaire $\Delta x = \frac{L}{n}$ on obtient :

$$\lambda_k = \frac{1}{\Delta x} \lambda_k \Delta x = \left[\pm \frac{n}{L} \frac{2k+1}{2n+1} \pi i + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \Delta x \quad (27)$$

$$= \left[\pm \frac{2k+1}{2L} \pi i \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right] \Delta x \quad (28)$$

Finalement on obtient :

$$\lambda_k = \left[\pm \frac{2k+1}{2L} \pi i \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right] \Delta x, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

Ainsi le spectre de la structure de Dirac du modèle réduit converge vers celui de la structure de Stokes-Dirac du modèle en dimension infinie lorsque $n \rightarrow \infty$. La Figure 1 montre quelques résultats numériques de cette convergence.

C. Comparaison des spectres de la dynamique du modèle réduit et des équations de Saint-Venant linéarisées

Les équations de Saint-Venant peuvent être linéarisées autour d'un profil d'équilibre uniforme de débit Q_e et de hauteur d'eau h_e . Cet équilibre uniforme est obtenu lorsque les forces de gravité compensent les forces de frottements avec les berges et le fond (voir [6] pour le modèle linéaire autour d'un profil d'équilibre quelconque). Le modèle linéaire

obtenu est donné comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h(x,t) \\ Q(x,t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{B} \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h(x,t) \\ Q(x,t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h(x,t) \\ Q(x,t) \end{pmatrix} \quad (30)$$

avec $a_1 = (\frac{Q_e^2}{Bh_e^2} - gBh_e)$, $a_2 = \frac{2Q_e}{Bh_e}$, $a_3 = gB \frac{4J(Q_e, h_e)}{9h_e} (\frac{Bh_e}{B+2h_e})$ et $a_4 = \frac{2gBh_e J(Q_e, h_e)}{Q_e}$. On rappelle d'abord ci-dessous le spectre calculé des équations de Saint-Venant linéarisées (30) (voir [9] pour le détail du calcul).

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b+ac}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(b+ac)^2 - a((b+a)^2 + (b-a)^2 \omega^2)} \quad (31)$$

avec

$$a = \frac{gh_e}{v_e^2}; \quad b = \frac{4gL}{3K^2 h_e} \left(\frac{B+2h_e}{Bh_e} \right)^{1/3}; \quad c = \frac{3(B+2h_e)}{2B} b \quad (32)$$

et $\omega = (2k+1) \frac{\pi}{\tau}$ avec $\tau = \frac{b-c}{a-1}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Le modèle hamiltonien à ports réduit est linéarisé autour du même profil d'équilibre uniforme ($q_e = Bh_e \Delta x$, $p_e = \rho v_e \Delta x$) où Δx est la longueur des éléments. Cela est effectué en linéarisant le vecteur d'efforts ainsi que le flux dissipatif f_d comme suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}_q \\ \tilde{e}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} \end{bmatrix} = Q(q_e, p_e) \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\tilde{f}_d = G(q, p) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \alpha(q_e, p_e) \tilde{q} + \beta(q_e, p_e) \tilde{p} \quad (34)$$

où (\tilde{q}, \tilde{p}) définissent des variations autour du profil d'équilibre (q_e, p_e) . Le matrice interne (du système d'état) est donnée par :

$$A = J \left(Q - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \right) \quad (35)$$

Le spectre du modèle réduit est donné par les valeurs propres de la matrice A . La figure (2) montre que dans le cas sans dissipation naturelle ($\alpha \equiv \beta \equiv 0$), le spectre du modèle hamiltonien à ports donné par des valeurs propres complexes conjuguées et imaginaires pures (croix bleue) recouvre le spectre théorique des équations de Saint-Venant (croix vertes). On observe aussi sur cette figure que le spectre du modèle de collocation comporte une dissipation numérique représentée par une partie réelle strictement négative des valeurs propres. Il est ainsi clair que le modèle de collocation ne conserve pas les propriétés énergétiques du modèle d'origine. En ajoutant maintenant la dissipation naturelle du système (voir Fig 3), on observe le déplacement des différents spectres dans le demi plan gauche. On peut noter aussi que la partie réelle du spectre du modèle hamiltonien est beaucoup plus proche de celle théorique que la partie réelle du spectre du modèle de collocation. Ce dernier possède un spectre beaucoup plus amorti

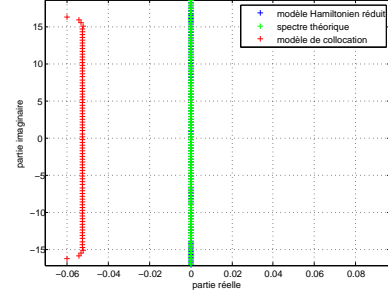


Fig. 2. Comparaison du spectre du modèle hamiltonien à ports réduit avec le spectre théorique et le spectre du modèle de collocation, cas sans dissipation naturelle

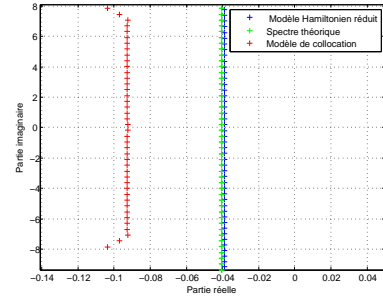


Fig. 3. Comparaison du spectre du modèle hamiltonien à ports réduit avec le spectre théorique et le spectre du modèle de collocation, cas avec dissipation naturelle

du fait de la dissipation numérique ajoutée par le schéma de collocation orthogonale.

On a effectué une comparaison des parties imaginaires des trois premières valeurs propres des différents spectres afin d'apprécier les propriétés fréquentielles du spectre du modèle hamiltonien à ports réduit. Les figures (4,5) montrent, respectivement, la convergence de la partie imaginaire du premier et du deuxième mode lorsque la résolution du schéma de réduction augmente.

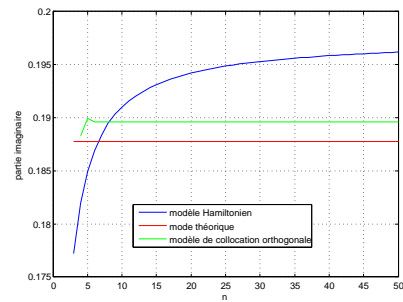


Fig. 4. Convergence de la partie imaginaire du premier mode

Ces résultats montrent, les meilleures performances fréquentielles du modèle de collocation par rapport au modèle hamiltonien à ports car la partie imaginaire du spectre recouvre plus rapidement celle du spectre théorique. Ce résultat est en cohérence avec la nature même du schéma de collocation orthogonale qui est un schéma de type résidus, basé sur la projection de la solution dans une base de polynômes de Lagrange et qui permettent d'avoir

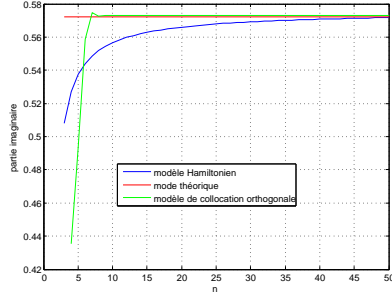


Fig. 5. convergence de la partie imaginaire du deuxième mode

des propriétés fréquentielles intéressantes.

V. LES PROPRIÉTÉS ENTRÉES-SORTIES DU MODÈLE HAMILTONIEN À PORTS RÉDUIT

A. Fonctions de transfert en dimension infinie

Les équations (30) peuvent être écrites sous la forme d'un système différentiel en fonction des transformées de Laplace $h(x, s)$ et $Q(x, s)$ de la hauteur et du débit d'eau. La solution générale est donnée par :

$$\begin{pmatrix} h(x, s) \\ Q(x, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(s)\alpha}{Bs} e^{\lambda_1(s)x} + \frac{\lambda_2(s)\beta}{Bs} e^{\lambda_2(s)x} \\ \alpha e^{\lambda_1(s)x} + \beta e^{\lambda_2(s)x} \end{pmatrix} \quad (36)$$

avec $\lambda_1 = -\frac{(a_3+a_2Bs)}{a_1} + r_1$, $\lambda_2 = -\frac{(a_3+a_2Bs)}{a_1} + r_2$ et où β, α sont des constantes d'intégration. Les variables conjuguées de port sont le débit et la pression hydrodynamique. Cette dernière est définie par une relation non linéaire de la hauteur et débit d'eau. La linéarisation de la pression hydrodynamique $P(x, s)$ autour du même profil d'équilibre uniforme (v_e, h_e) est donnée comme suit :

$$\begin{pmatrix} Q(x, s) \\ P(x, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho \left(g - \frac{v_e^2}{h_e} \right) & \frac{\rho v_e}{B h_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(x, s) \\ Q(x, s) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} \\ \alpha d_1 e^{\lambda_1 x} + \beta d_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} \quad (37)$$

avec $d_1 = (-\frac{c_1 \lambda_1}{Bs} + c_2)$ and $d_2 = (-\frac{c_1 \lambda_2}{Bs} + c_2)$ et $c_1 = \rho \left(g - \frac{v_e^2}{h_e} \right)$ et $c_2 = \frac{\rho v_e}{B h_e}$. On choisit maintenant les variables d'entrées-sorties utilisées dans le modèle hamiltonien à ports réduit (9) $u_1(s) = Q(x=0, s)$, $u_2(s) = P(x=L, s)$, $y_2(s) = P(x=0, s)$ et $y_1(s) = Q(x=L, s)$. On obtient les fonctions de transfert suivantes :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (38) \\ = \begin{bmatrix} \frac{(d_2-d_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)L}}{d_2e^{\lambda_2L}-d_1e^{\lambda_1L}} & \frac{-e^{\lambda_1L}+e^{\lambda_2L}}{d_2e^{\lambda_2L}-d_1e^{\lambda_1L}} \\ \frac{d_1d_2(e^{\lambda_2L}-e^{\lambda_1L})}{d_2e^{\lambda_2L}-d_1e^{\lambda_1L}} & \frac{-d_1+d_2}{d_2e^{\lambda_2L}-d_1e^{\lambda_1L}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

B. Fonctions de transfert du modèle hamiltonien à ports réduit linéarisé

A partir du modèle hamiltonien réduit, on obtient un système linéaire sous forme d'état avec une matrice interne

A donnée par (35) et une matrice d'entrée g_u et de sortie $g_u^T Q$, avec Q donnée par (33). On peut ainsi calculer numériquement pour différentes résolutions Δx du schéma de réduction les quatre fonctions de transfert entrées-sorties.

C. Comparaison des fonctions de transfert en dimension finie et infinie

On va comparer dans cette partie les fonctions de transfert du modèle hamiltonien à ports réduit aux fonctions de transfert de dimension infinie calculées précédemment. Pour cela, on tracera les diagrammes de Bode des différents transferts tout en augmentant la résolution du schéma de réduction. Les figures (6,7,8,9,10,11,12,13) montrent le gain et la phase des quatre transferts de dimension infinie ainsi que ceux du modèle hamiltonien à ports réduit pour différentes résolutions du schéma de réduction.

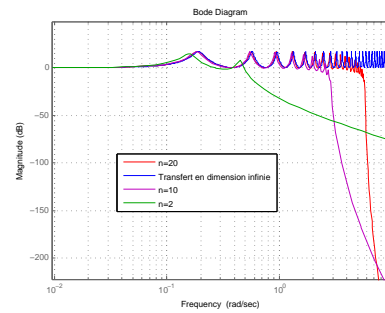


Fig. 6. Gain : Transfert débit aval/débit amont

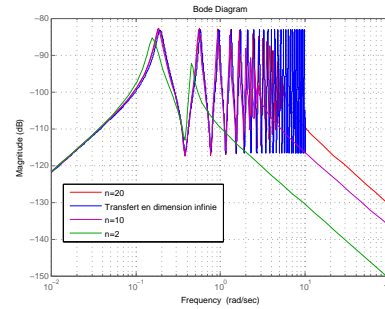


Fig. 7. Gain : Transfert débit aval/pression aval

Ces résultats de comparaison montrent que lorsque la résolution du schéma augmente, les transferts du modèle hamiltonien à ports réduit recouvrent à la fois le gain et la phase de ceux en dimension infinie et cela à partir des basses fréquences. Ce qui est important à noter aussi, c'est la convergence de la phase des transferts spatialement croisés (amont-aval et aval-amont) vers la phase des transferts correspondants en dimension infinie. Ceci montre le recouvrement du retard d'écoulement propres à ces transferts amont-aval et aval-amont.

VI. CONCLUSION

On a montré, dans cet article, que le spectre de la structure de Dirac du modèle réduit converge vers celui de la structure de Stokes-Dirac qui est au cœur des propriétés énergétiques et géométriques du modèle en dimension infinie. Une analyse spectrale du modèle hamiltonien à ports réduit autour d'un équilibre uniforme a été présentée et montre que son spectre recouvre celui théorique obtenu

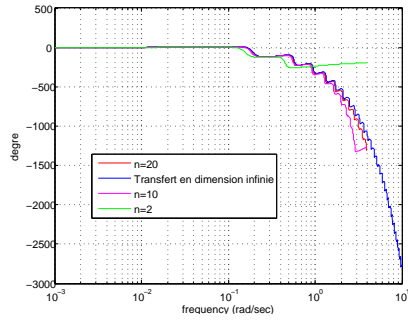


Fig. 8. Phase : Transfert débit aval/débit amont

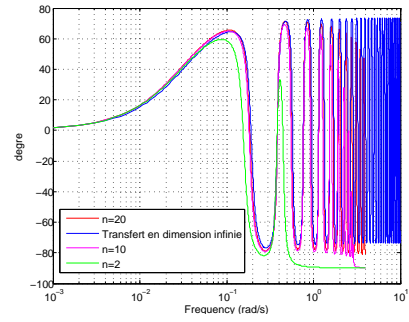


Fig. 12. Phase : Transfert pression amont/débit amont

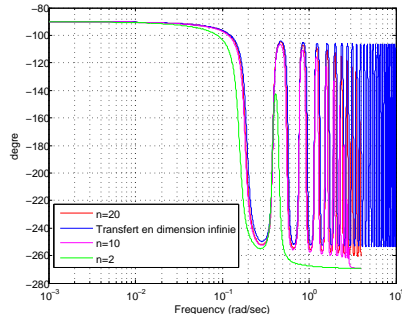


Fig. 9. Phase : Transfert débit aval/pression aval

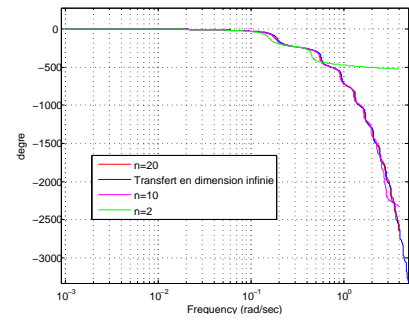


Fig. 13. Phase : Transfert pression amont/pression aval

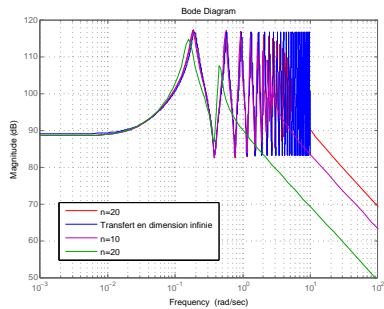


Fig. 10. Gain : Transfert pression amont/débit amont

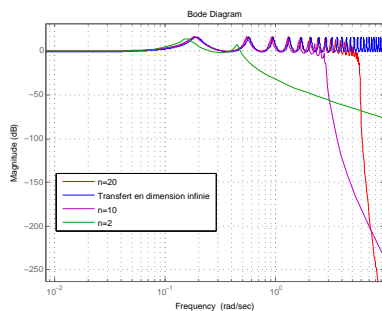


Fig. 11. Gain : Transfert pression amont/pression aval

avec les équations de Saint-Venant linéarisées, sans ajouter de la dissipation numérique. Cela contrairement au modèle obtenu par la méthode de collocation orthogonale qui ajoute une dissipation numérique à la dissipation naturelle. D'autres résultats établis dans cet article montrent que le modèle de collocation a l'avantage d'avoir une convergence des parties imaginaires du spectre beaucoup plus rapide par rapport au spectre du modèle hamiltonien à ports réduit. Cela est en cohérence avec les propriétés spectrales attendues du schéma de collocation orthogonale [8]. Une analyse des propriétés entrées-sorties

du modèle hamiltonien à ports réduit a été effectuée en comparant l'ensemble de ses fonctions de transferts définies autour d'un point d'équilibre à celles calculées analytiquement sur les équations de Saint-Venant linéarisées. Les résultats montrent que le modèle hamiltonien à port réduit recouvre le gain et la phase des quatre fonctions de transferts calculées et cela d'autant mieux que la résolution du schéma de réduction augmente.

RÉFÉRENCES

- [1] Van der Schaft.A and Maschke.B, *Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow*, Journal of Geometry and Physics, vol. 42, 2002, pp 166-194.
- [2] V.T. Chow, *Open channel hydraulics*, Mc Graw Hill, New-York, 1985.
- [3] Hamroun.B, Lefèvre.L and Mendes.E, *Port-Based Modelling and Geometric Reduction for Open Channel Irrigation Systems* Proceedings of the 46th Conference on Decision and Control CDC'07, New orleans,USA,(2007) 1578–1583.
- [4] Hamroun.B, Lefèvre.L and Mendes.E, *Port-Based Modelling for Open Channel Irrigation Systems*, WSEAS Transactions on Fluid Mechnaics 1,(2006) 995–1008.
- [5] Hamroun.B, Peng.H, Couenne. F, Le Gorrec Y, Lefèvre.L, *Geometric Reduction and spectral Properties of the Infinite-Dimensional Port-Controlled Hamiltonian Systems*, In preparation for Int. Journal for Numerical Methods in Engineering
- [6] Ouari.H, Lefèvre.L and Georges.D, *Robust Optimal Control of one-reach open-channels*, in Proc. of European Control Conference ECC'2003, Cambridge, United Kingdom, 2003.
- [7] Litrico.X and Fromion.V, *Frequency modeling of open-channel flow*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 130, 2004, No. 8, pp. 806-815
- [8] B. Fornberg, *A practical guide to pseudospectral methods*, Cambridge University Press, 1998.
- [9] D.Georges and X.Litrico, *Automatique pour la gestion des ressources en eau*, IC2, Systèmes automatisés, Hermès, 2002.