

# Développement du Modèle ARX sur les bases orthogonales de Laguerre

Tarek GARNA, Kais BOUZRARA, Okba TAOUALI, Hassani MESSAOUD

Unité de Recherche Automatique, Traitement de Signal et d'Image  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, Rue Ibn Eljazzar, 5019 Monastir Tunisie  
Tel :+(216)73 500 511 ; Fax :+(256)73500514

hassani.messaoud@enim.rnu.tn

**Résumé**— Dans ce papier on propose une nouvelle représentation des modèles ARX sur des bases orthogonales indépendantes de Laguerre. Cette représentation est obtenue suite au filtrage de l'entrée et de la sortie par des fonctions orthogonales définissant les bases de Laguerre. Le modèle résultant est intitulé modèle ARX - Laguerre qui garantit une réduction du nombre de paramètres avec une représentation récursive et simple. Cette réduction paramétrique reste assujettie par un choix optimal du pôle de Laguerre de chaque base indépendante. Pour ce faire, on développe un algorithme d'optimisation des pôles basé sur l'extension de la méthode de Tanguy *et al.* L'algorithme proposé ainsi que le modèle ARX - Laguerre sont testés et validés en simulation numérique.

**Mots-clés**— Modèle ARX, Bases de Laguerre, ARX - Laguerre, Optimisation.

## I. INTRODUCTION

Dans la littérature, la modélisation des systèmes dynamiques LTI et stables par des fonctions orthogonales de Laguerre, a été particulièrement attrayante pour le besoin de la réduction paramétrique. Cette approche a été initiée par [1] et continuée dans [7], [8], [9] et qui consiste à décomposer la réponse impulsionnelle d'un système LTI sur une base orthogonale de Laguerre. Le modèle résultant est intitulé modèle de Laguerre dont l'avantage par rapport aux modèles linéaires classique du type ARX, ARMAX, ..., réside d'une part dans l'indépendance du retard du système et du choix de la période d'échantillonnage et d'autre part dans la réduction paramétrique en utilisant un nombre de paramètres moins élevé. Cette réduction paramétrique est due à la propriété de la complétude de la base orthogonale de Laguerre dans l'espace de Lebesgue  $\ell^2 [0, \infty[$ . En effet, le nombre des fonctions orthogonales dépend essentiellement du comportement dynamique du système qui est principalement lié au pôle de Laguerre caractérisant la base. Par conséquent, une identification optimale du pôle de Laguerre résulte en une réduction significative du nombre de paramètres est significative. De ce fait, l'optimisation des pôles a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs où différentes techniques d'optimisation du pôle de Laguerre ont été élaborées. Ces techniques d'optimisations peuvent étre itératives telles que la méthode de Malti [7] et celle de Khouaja *et al* [5] ou analytiques telles que la méthode de Tanguy *et al* [8] et celle de Fu et Dumont [4]. Un des apports importants de Tanguy *et al* est d'avoir exprimé le pôle optimal de Laguerre en fonction des coefficients de Laguerre. Tous ces travaux utilisent le principe du filtrage de l'entrée par les fonctions définissant la base orthogonale de Laguerre. Ainsi, vu l'importance de la réduction paramétrique et dans le but de recueillir le maximum d'information sur le système, il est intéressant d'étendre ce principe de filtrage de l'entrée à celui de la sortie. A ce pro-

pos, dans ce papier, on propose d'utiliser les fonctions orthogonales de Laguerre pour le filtrage de l'entrée et le filtrage de la sortie du modèle ARX. Ceci consiste à décomposer les paramètres du modèle ARX associés à l'entrée et à la sortie sur deux bases indépendantes de Laguerre. Le modèle résultant est une nouvelle représentation linéaire en fonction des filtres d'entrée et de sortie intitulé modèle ARX - Laguerre. Chaque base de Laguerre est caractérisée par un seul pôle. Ainsi, un choix adéquat et optimal des deux pôles de Laguerre est primordial, afin de réduire considérablement le nombre de coefficients du modèle ARX - Laguerre. Cette nouvelle représentation linéaire permet de contourner la complexité du modèle ARX vis-à-vis le nombre de paramètre et la structure du modèle qui peuvent être d'intérêt capital dans le développement d'algorithmes de commande robuste. Dans la section suivante, on propose l'élaboration de la nouvelle représentation des systèmes linéaires via un développement des coefficients du modèle ARX sur deux bases indépendantes de Laguerre. Dans ce cas, on présente le réseau de filtres d'entrée et de sortie du modèle ARX - Laguerre ainsi que sa représentation récursive. La section 3 traite l'extension du travail de Tanguy *et al* pour le calcul analytique des deux pôles de Laguerre des deux bases. Dans la section 4 on présente quelques résultats obtenus en simulation validant les performances de la méthode d'optimisation des pôles ainsi que le modèle ARX - Laguerre proposées. La suprématie du modèle proposé au modèle du Laguerre classique en terme de réduction du nombre de paramètres, a été confirmée par une étude comparative des deux modèles.

## II. MODÈLE ARX - LAGUERRE

### A. Principe

On Considère le modèle ARX [3] suivant :

$$y(k) = \sum_{j=1}^{na} h_a(j) y(k-j) + \sum_{j=0}^{nb-1} h_b(j) u(k-j) \quad (1)$$

avec  $u(k)$  l'entrée,  $y(k)$  la sortie,  $na$  l'ordre du modèle ( $na \geq nb$ ),  $h_a$  et  $h_b$  les paramètres du modèle. On présente dans cette section le principe de représentation du modèle ARX sur des bases orthogonales indépendantes de Laguerre afin de réduire le nombre de paramètres. Selon la condition de stabilité au sens du critère BIBO (Bounded Input Bounded Output), les coefficients  $h_a$  et  $h_b$  sont absolument sommables :

$$\sum_{j=0}^{\infty} |h_a(j)| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |h_b(j)| < \infty \quad (2)$$

De ces conditions, le modèle ARX donné par la relation (1) peut s'écrire :

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h_a(j) y(k-1-j) + \sum_{j=0}^{\infty} h_b(j) u(k-j) \quad (3)$$

tels que :

$$\begin{cases} h_a(j) = 0 & \text{si } j > na \\ h_b(j) = 0 & \text{si } j > nb - 1 \end{cases} \quad (4)$$

Les coefficients  $h_a$  et  $h_b$  sont absolument sommables donc de carrés sommables et elles appartiennent à l'espace de Lebesgue  $\ell^2[0, \infty[$ . Toutefois, on note que les fonctions orthogonales de Laguerre forment une base orthogonale dans l'espace de Lebesgue  $\ell^2[0, \infty[$ . Donc, on propose de décomposer les coefficients  $h_a$  et  $h_b$  sur deux bases orthogonales indépendantes de Laguerre  $\mathfrak{S}_a$  et  $\mathfrak{S}_b$  par rapport à la sortie et l'entrée respectivement. Dans ce cas, les coefficients  $h_a$  et  $h_b$  sont des combinaisons linéaires des fonctions orthogonales de Laguerre de chaque base définies comme suit :

$$h_a(j) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,a} l_n^a(j) \quad \text{et} \quad h_b(j) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,b} l_n^b(j) \quad (5)$$

avec  $l_n^a$  et  $l_n^b$  représentent les fonctions orthogonales des bases indépendantes de Laguerre  $\mathfrak{S}_a$  et  $\mathfrak{S}_b$  respectivement et leurs transformées en  $Z$  sont définies par :

$$L_n^i(z) = \frac{\sqrt{1-\xi_i^2}}{z-\xi_i} \left( \frac{1-\xi_i z}{z-\xi_i} \right)^n, \quad i = a, b \quad (6)$$

où  $\xi_a$  et  $\xi_b$  sont les deux pôles de Laguerre. Les séquences des coefficients  $g_{n,a}$  et  $g_{n,b}$  appelées communément séquences des paramètres de Markov ou coefficients de Fourier sont les coordonnées de  $h_a$  et  $h_b$  dans les bases  $\mathfrak{S}_a = \{l_n^a\}_{n=0}^{\infty}$  et  $\mathfrak{S}_b = \{l_n^b\}_{n=0}^{\infty}$  qui peuvent être calculés comme suit :

$$g_{n,a} = \sum_{j=0}^{\infty} h_a(j) l_n^a(j) \quad \text{et} \quad g_{n,b} = \sum_{j=0}^{\infty} h_b(j) l_n^b(j) \quad (7)$$

En substituant les combinaisons linéaires de la relation (5) dans le modèle ARX défini par les relations (3) et (4), le modèle résultant est intitulé modèle ARX - Laguerre qui s'écrit :

$$y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,a} x_{n,y}(k-1) + \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,b} x_{n,u}(k) \quad (8)$$

où  $x_{n,y}$  est la sortie du  $n^{\text{ème}}$  filtre relatif à la sortie  $y$  et  $x_{n,u}$  est la sortie du  $n^{\text{ème}}$  filtre relatif à l'entrée  $u$  définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x_{n,y}(k-1) &= \sum_{j=0}^{\infty} l_n^a(j) y(k-1-j) \\ &= l_n^a(k-1) * y(k-1) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x_{n,u}(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} l_n^b(j) u(k-j) \\ &= l_n^b(k) * u(k) \end{aligned} \quad (10)$$

où  $*$  désigne le produit de convolution. En pratique les séries infinies dans (5) peuvent être tronquée à des ordres finis  $Na$  et  $Nb$  :

$$h_a(j) = \sum_{n=0}^{Na-1} g_{n,a} l_n^a(j) \quad (11)$$

$$h_b(j) = \sum_{n=0}^{Nb-1} g_{n,b} l_n^b(j) \quad (12)$$

et la sortie du modèle ARX - Laguerre (8) tronqué s'écrit :

$$\tilde{y}(k) = \sum_{n=0}^{Na-1} g_{n,a} x_{n,y}(k-1) + \sum_{n=0}^{Nb-1} g_{n,b} x_{n,u}(k) \quad (13)$$

## B. Réseau de filtres du modèle ARX- Laguerre

Les fonctions orthogonales définissant les deux bases indépendantes de Laguerre  $\mathfrak{S}_i = \{l_n^i\}_{n=0}^{N_i-1}$ ,  $i = a, b$ , peuvent s'écrire sous la forme récursive suivante :

$$\begin{cases} L_0^i(z) = \frac{\sqrt{1-\xi_i^2}}{z-\xi_i} \\ L_n^i(z) = \frac{1-\xi_i z}{z-\xi_i} L_{n-1}^i(z, \xi_i), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (14)$$

Compte tenu des relations (9) et (10) et après une transformation en  $Z$ , la relation (13) devient :

$$\tilde{Y}(z) = \sum_{n=0}^{Na-1} g_{n,a} z^{-1} X_{n,y}(z) + \sum_{n=0}^{Nb-1} g_{n,b} X_{n,u}(z) \quad (15)$$

où  $X_{n,\ell}(z) = Z\{x_{n,\ell}(k)\}$ ,  $\ell = y, u$ , tels que :

$$X_{n,y}(z) = z^{-1} L_n^a(z) \cdot Y(z) \quad \text{et} \quad X_{n,u}(z) = L_n^b(z) \cdot U(z) \quad (16)$$

En combinant la forme récursive (14) des fonctions orthogonales de Laguerre avec la relation (16), on peut formuler la relation de récurrence suivante entre les filtres  $X_{n,y}(z)$  et  $X_{n,u}(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  :

$$\begin{cases} X_{0,y}(z) = \frac{\sqrt{1-\xi_a^2}}{z-\xi_a} z^{-1} Y(z) \\ X_{n,y}(z) = \frac{1-\xi_a z}{z-\xi_a} X_{n-1,y}(z) \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} X_{0,u}(z) = \frac{\sqrt{1-\xi_b^2}}{z-\xi_b} U(z) \\ X_{n,u}(z) = \frac{1-\xi_b z}{z-\xi_b} X_{n-1,u}(z) \end{cases} \quad (18)$$

Par suite, d'après les relations (15), (17) et (18), on obtient dans la figure 1 le réseau de filtres d'entrée et de sortie du modèle ARX- Laguerre suivant :

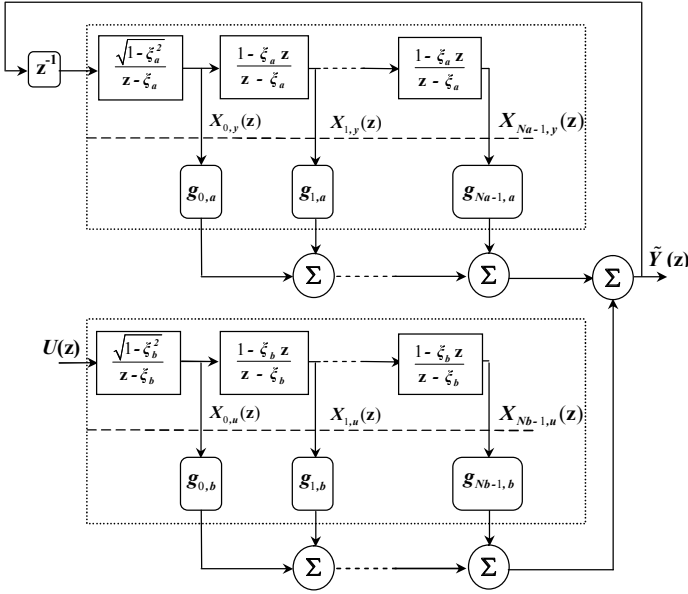


Fig. 1. Réseau de filtres du modèle ARX - Laguerre

### C. Représentation récursive du modèle ARX - Laguerre

A partir du réseau de la figure 1 et en considérant les variables d'état  $(x_{n,\ell}(k))$ ,  $\ell = y, u$  et  $n = 0, 1, \dots$  on aboutit à la représentation récursive suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + b_y y(k-1) + b_u u(k) \\ \tilde{y}(k) = c^T X(k) \end{cases} \quad (19)$$

avec :

- $A$  une matrice carrée de dimension  $Na + Nb$  :

$$A = \text{bloc diag} [A_{y,a} \ A_{u,b}] = \begin{pmatrix} A_{y,a} & 0_{Na, Nb} \\ 0_{Nb, Na} & A_{u,b} \end{pmatrix} \quad (20)$$

telles que  $0_{Na, Nb}$  et  $0_{Nb, Na}$  sont deux matrices nulles de dimensions  $(Na \times Nb)$  et  $(Nb \times Na)$  respectivement et  $A_y$  et  $A_u$  sont deux matrices carrées de dimension  $Na$  et  $Nb$  respectivement. Pour  $\ell = y, u$  et  $K_i = 1 - \xi_i^2$ ,  $i = a, b$  :

$$A_{\ell,i} = \begin{bmatrix} \xi_i & 0 & \dots & 0 \\ K_i & \xi_i & \ddots & \vdots \\ -\xi_i K_i & K_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\xi_i)^{Na-1} K_i & (-\xi_i)^{Na-2} K_i & \dots & \xi_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

- $b_y$  et  $b_u$  sont deux vecteurs de dimension  $Na + Nb$  :

$$b_y = \sqrt{K_a} \begin{bmatrix} 1 \\ -\xi_a \\ (-\xi_a)^2 \\ \vdots \\ (-\xi_a)^{Na-1} \\ 0_{Nb,1} \end{bmatrix}, b_u = \sqrt{K_b} \begin{bmatrix} 0_{Na,1} \\ 1 \\ -\xi_b \\ (-\xi_b)^2 \\ \vdots \\ (-\xi_b)^{Nb-1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

où  $0_{Nb,1}$  et  $0_{Na,1}$  sont deux vecteurs colonnes nuls de dimensions  $Nb$  et  $Na$  respectivement.

- $c$  le vecteur de paramètres de dimensions  $Na + Nb$  contenant les coefficients de Fourier  $g_{n,a}$  et  $g_{n,b}$  :

$$c = [g_{0,a}, \dots, g_{Na-1,a}, g_{0,b}, \dots, g_{Nb-1,b}]^T \quad (23)$$

- $X(k)$  le vecteur contenant l'ensemble des sorties de filtres des deux bases de Laguerre de dimension  $Na + Nb$  :

$$X(k) = [x_{0,y}(k), \dots, x_{Na-1,y}(k), x_{0,u}(k), \dots, x_{Nb-1,u}(k)]^T \quad (24)$$

Le nombre de paramètres engagé dans le modèle ARX - Laguerre est :

$$C = Na + Nb \quad (25)$$

Ainsi, si les ordres de troncature  $Na$  et  $Nb$  sont tels que  $Na \ll na$  et  $Nb \ll nb$ , alors le nombre de paramètres du modèle (13) est réduit par rapport à celui du modèle ARX (1). Cette réduction paramétrique est due à la propriété de la complétude des bases orthogonales dans l'espace de Lebesgue  $\ell^2 [0, \infty[$  où le nombre des fonctions orthogonales dépend essentiellement du comportement dynamique du système. Ce dernier est principalement lié aux pôles caractérisant chaque base qui interviennent dans la nouvelle représentation linéaire (13) afin de maximiser la précision du modèle avec un ordre de troncature faible. Ceci n'est garanti que grâce à un choix optimal des pôles de chaque base qui suscitera notre intérêt général.

### III. OPTIMISATION DES PÔLES DE LAGUERRE

Dans cette section on propose une méthode d'optimisation analytique des deux pôles de Laguerre. Cette méthode est basée sur l'extension du travail de Tanguy *et al* [8]. Pour les deux bases, les fonctions de Laguerre vérifient la relation suivante pour  $i = a, b$  et  $n = 0, 1, 2, \dots$  :

$$(1 - \xi_i^2) n l_n^i(j) = -(j+1) \xi_i l_n^i(j+1) - j \xi_i l_n^i(j-1) + [j(1 + \xi_i^2) + \xi_i^2] l_n^i(j) \quad (26)$$

On considère l'optimisation séparée des deux pôles en proposant les deux fonctions de coût suivantes inspirées du travail de Tanguy *et al* [8],

$$J_a = \frac{1}{\|h_a\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} n g_{n,a}^2 \text{ et } J_b = \frac{1}{\|h_b\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} n g_{n,b}^2 \quad (27)$$

où :

$$\|h_a\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} h_a^2(j) \text{ et } \|h_b\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} h_b^2(j) \quad (28)$$

et les quantités suivantes :

$$M_{1,a} = \frac{1}{\|h_a\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} j h_a^2(j) \text{ et } M_{1,b} = \frac{1}{\|h_b\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} j h_b^2(j) \quad (29)$$

$$M_{2,a} = \frac{1}{\|h_a\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} j h_a(j) h_a(j-1) \quad (30)$$

$$M_{2,b} = \frac{1}{\|h_b\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} j h_b(j) h_b(j-1) \quad (31)$$

Toutefois, on note que les quantités  $\|h_a\|^2$  et  $\|h_b\|^2$  peuvent être exprimées en fonction du carré des coefficients de Fourier  $g_{n,a}$  et  $g_{n,b}$  :

$$\|h_a\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,a}^2 \text{ et } \|h_b\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,b}^2 \quad (32)$$

D'après [8], il est facile de montrer que les fonctions de coût  $J_a$  et  $J_b$  s'expriment d'une manière explicite en fonction des pôles de Laguerre  $\xi_a$  et  $\xi_b$  respectivement :

$$J_i = \frac{(1 + M_{1,i})\xi_i^2 - 2M_{2,i}\xi_i + M_{1,i}}{(1 - \xi_i^2)}, \quad i = a, b \quad (33)$$

Notons que le numérateur de chaque fonction de coût  $J_i, i = a, b$ , est une fonction convexe, différentiable et non négative définie sur un intervalle ouvert convexe  $\vartheta_i = \{\xi_i \in \mathfrak{R} \text{ tel que } |\xi_i| < 1\}$ , tandis que leur dénominateur est une fonction pseudo-convexe sur  $\vartheta_i$ . Donc toute solution de  $\partial J_a / \partial \xi_a$  et  $\partial J_b / \partial \xi_b$  est un minimum global de  $J_a$  et  $J_b$  respectivement [2]. Ainsi, les deux pôles optima  $\xi_{opt,a}$  et  $\xi_{opt,b}$  de Laguerre au sens de la minimisation des deux critères  $J_a$  et  $J_b$  sont obtenus comme suit :

$$\xi_{opt,i} = \begin{cases} \rho_i - \sqrt{\rho_i^2 - 1} & \text{si } \rho_i > 1 \\ \rho_i + \sqrt{\rho_i^2 - 1} & \text{si } \rho_i < -1 \end{cases} \quad (34)$$

où :

$$\rho_i = \frac{2M_{1,i} + 1}{2M_{2,i}}, \quad i = a, b \quad (35)$$

On note que les deux pôles optima, ainsi déterminés, ne dépendent pas des ordres de troncature  $N_a$  et  $N_b$ . Par ailleurs, chaque pôle optimal  $\xi_{opt,i}, i = a, b$ , obtenu est en fonction du paramètre  $\rho_i$ , qui dépend des coefficients  $h_i$  du modèle ARX. En conséquence, il faut passer par une estimation des coefficients  $h_i$  avant de déterminer le pôle optimal  $\xi_{opt,i}$  considéré. Afin d'éviter le calcul des coefficients  $h_i$  on utilise la méthode de Tanguy *et al* exprimant la quantité  $\rho_i$  directement en fonction des coefficients de Fourier du modèle ARX - Laguerre. Pour ce faire, on considère ces quantités :

$$T_{1,a} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) g_{n,a}^2 \quad \text{et} \quad T_{1,b} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) g_{n,b}^2 \quad (36)$$

$$T_{2,a} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} n g_{n,a} g_{n-1,a} \quad (37)$$

$$T_{2,b} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} n g_{n,b} g_{n-1,b} \quad (38)$$

Dans la suite, le travail a pour but d'exprimer  $M_{1,a}$  et  $M_{1,b}$  par  $T_{1,a}$  et  $T_{1,b}$  respectivement. On note d'après [8] que les fonctions de Laguerre vérifient la relation suivante pour  $i = a, b$  et  $n = 0, 1, 2, \dots$  :

$$\frac{\partial l_n^i(j)}{\partial \xi_i} = \frac{1}{(1 - \xi_i^2)} [(n+1) l_{n+1}^i(j) - n l_{n-1}^i(j)] \quad (39)$$

En combinant la relation (39) avec la relation (7), on peut écrire pour  $i = a, b$  :

$$\frac{\partial g_{n,i}}{\partial \xi_i} = \frac{(n+1)}{(1 - \xi_i^2)} g_{n+1,i} - \frac{n}{(1 - \xi_i^2)} g_{n-1,i} \quad (40)$$

Grâce à cette relation, les quantités  $T_{1,i}$  et  $T_{2,i}, i = a, b$ , sont reliées via leur dérivées et par rapport au pôle par les relations suivantes :

$$\frac{\partial T_{1,i}}{\partial \xi_i} = -\frac{2}{(1 - \xi_i^2)} T_{2,i} \quad (41)$$

$$\frac{\partial T_{2,i}}{\partial \xi_i} = -\frac{2}{(1 - \xi_i^2)} T_{1,i} \quad (42)$$

En utilisant les relations (41), (42) et (32), on déduit les expressions de  $M_{1,i}$  et  $M_{2,i}$ , en fonction de  $T_{1,i}$  et  $T_{2,i}, i = a, b$  :

$$\begin{cases} M_{1,i} = \frac{(1 + \xi_i^2) T_{1,i} + 2 \xi_i T_{2,i}}{2(1 - \xi_i^2) \|h_i\|^2} - \frac{1}{2} \\ M_{2,i} = \frac{(1 + \xi_i^2) T_{2,i} + 2 \xi_i T_{1,i}}{2(1 - \xi_i^2) \|h_i\|^2} \end{cases} \quad (43)$$

Par suite, le paramètre  $\rho_i$  défini par la relation (35) peut se réécrire en fonction de  $T_{1,i}$  et  $T_{2,i}$  :

$$\rho_i = \frac{(1 + \xi_i^2) T_{1,i} + 2 \xi_i T_{2,i}}{(1 + \xi_i^2) T_{2,i} + 2 \xi_i T_{1,i}} \quad (44)$$

Par conséquent, à partir des relation (34) et (44), les deux pôles optima  $\xi_{opt,a}$  et  $\xi_{opt,b}$  de Laguerre obtenus au sens de la minimisation des deux critères  $J_a$  et  $J_b$  respectivement sont en fonctions des coefficients de Fourier. Toutefois, à partir de la représentation récursive (19) on constate que l'identification des coefficients de Fourier est liée à celle des pôles de Laguerre via le vecteur  $X(k)$  ce qui nécessite la connaissance *a priori* des pôles. Dans ce cas, on propose une procédure itérative basée sur un traitement en bloc des données. D'après les relations (27), (32) et (36), on a :

$$T_{1,i} = 2 \|h_i\|^2 J_i + \|h_i\|^2, \quad i = a, b \quad (45)$$

D'où :

$$\frac{\partial T_{1,i}}{\partial \xi_i} = 2 \|h_i\|^2 \frac{\partial J_i}{\partial \xi_i}, \quad i = a, b \quad (46)$$

En combinant la relation (46) avec la relation (41), on obtient :

$$2 \|h_i\|^2 \frac{\partial J_i}{\partial \xi_i} = -\frac{2}{(1 - \xi_i^2)} T_{2,i} \quad (47)$$

On constate alors que lorsque  $J_i$  atteint son minimum,  $T_{2,i}$  est nulle. De plus, lorsque  $T_{2,i}$  prend des valeurs proches de zéro,  $J_i$  est proche de son minimum. Donc le pôle  $\xi_i$  correspondant est proche de sa valeur optimale. Cette propriété est exploitée pour définir l'algorithme d'identification des deux pôles optima  $\xi_{opt,a}$  et  $\xi_{opt,b}$ .

#### Algorithme itératif d'optimisation des pôles :

1. Fixer les deux ordres de troncature  $N_a$  et  $N_b$  et choisir deux pôles stables initiaux  $\xi_{a,int}$  et  $\xi_{b,int}$  arbitraires.
2. Calculer la matrice  $A$ , les vecteurs  $b_y$  et  $b_u$  et estimer les coefficients de Fourier  $g_{n,a}$  et  $g_{n,b}$  optimaux par les méthodes d'identification classiques.
3. Calculer pour  $i = a, b$

$$T_{1,i} = \sum_{n=0}^{N_i} (2n+1) g_{n,i}^2 \quad \text{et} \quad T_{2,i} = \sum_{n=0}^{N_i} n g_{n,i} g_{n-1,i} \quad (48)$$

4. Si les deux quantités  $T_{2,a}$  et  $T_{2,b}$  sont proches de zéro, fin de l'algorithme. Sinon

(a) Calculer  $\rho_a$  et  $\rho_b$  de la relation (44).

(b) Déterminer les deux nouveaux pôles  $\xi_{a,nov}$  et  $\xi_{b,nov}$  à partir de la relation (34).

(c) Construire deux nouvelles bases avec les deux pôles  $\xi_{a,nov}$  et  $\xi_{b,nov}$  puis retours à l'étape 2.

#### IV. SIMULATION NUMÉRIQUE

L'exemple de simulation illustre l'identification d'un filtre linéaire d'ordre 4 de Butterworth [6] donné par sa fonction de transfert suivante :

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) \quad (49)$$

avec :

$$H_1(z) = \frac{(0.078 + 0.1559z^{-1} + 0.078z^{-2})}{(1 - 1.3209z^{-1} + 0.6327z^{-2})} \quad (50)$$

$$H_2(z) = \frac{(0.0619 + 0.1238z^{-1} + 0.0619z^{-2})}{(1 - 1.0486z^{-1} + 0.2961z^{-2})} \quad (51)$$

Ce système contient 9 paramètres. L'entrée du système est un signal blanc, gaussien, centré et de variance unité. La sortie est perturbée par un bruit additif blanc, gaussien, indépendant du signal d'entrée pour un rapport signal sur bruit égal à 30dB. Pour différentes valeurs des ordres de troncature ( $N_a$  et  $N_b$ ) et pour un jeu d'observations égal à 3000 on sélectionne les pôles optima ( $\xi_{opt,a}$  et  $\xi_{opt,b}$ ) par l'algorithme proposé où on identifie les coefficients de Fourier par la méthode des moindres carrés étendus. Ceci étant on évalue pour chaque ordre de troncature les performances d'approximation du modèle ARX - Laguerre développé en termes de calcul :

- du Taux de Réduction Paramétrique (TRP).
- de l'Erreur Quadratique Moyenne Normalisée (EQMN) sur une phase de validation de 1250 observations.

Par ailleurs, on étudie les performances de l'algorithme d'optimisation des deux pôles de Laguerre suivant l'influence des ordres de troncature. On note que pour la comparaison des valeurs optimales des pôles de Laguerre calculées par l'algorithme d'optimisation on peut tracer dans la figure 2 les courbes théoriques des fonctions  $J_a$  et  $J_b$ .

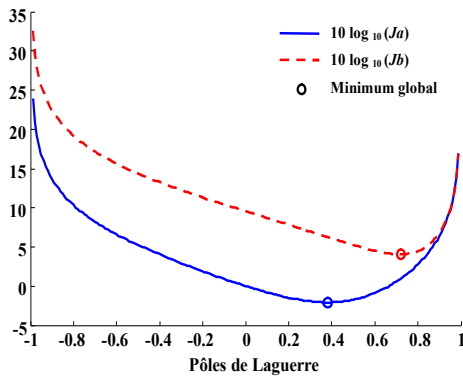


Fig. 2. Courbes théoriques des fonctions de coût  $J_a$  et  $J_b$

Afin d'étudier l'effet des ordres de troncature ( $N_a$  et  $N_b$ ) sur l'optimisation des pôles, on initialise les pôles de Laguerre par  $\xi_{i,int} = 0,001, i = a, b$ . Les performances de l'algorithme d'optimisation ainsi que celles du modèle ARX - Laguerre proposés sont obtenues pour 100 expériences indépendantes. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 1. En outre, la figure 3 illustre le comportement des pôles estimés par l'algorithme d'optimisation proposé.

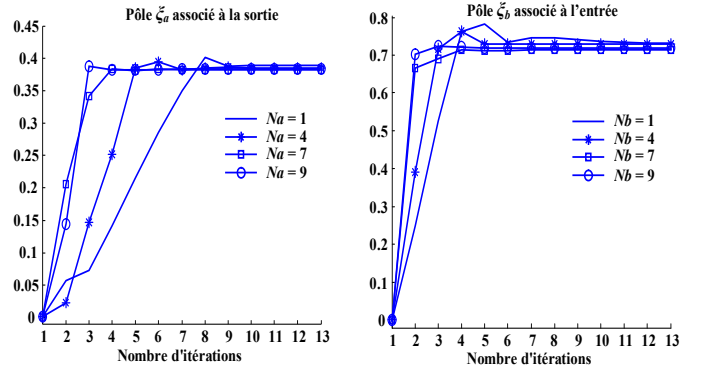


Fig. 3. Identification des pôles  $\xi_a$  et  $\xi_b$

$N_a, N_b$	$\xi_a$	$\xi_b$	EQMN (dB)	TRP (%)
1	$0,390 \pm 0,223$	$0,725 \pm 0,047$	$-22,952 \pm 0,393$	77,77
2	$0,382 \pm 0,171$	$0,720 \pm 0,039$	$-23,753 \pm 0,257$	55,55
3	$0,377 \pm 0,142$	$0,728 \pm 0,016$	$-24,710 \pm 0,481$	33,33
4	$0,384 \pm 0,189$	$0,718 \pm 0,005$	$-25,458 \pm 0,479$	11,11
5	$0,372 \pm 0,212$	$0,723 \pm 0,003$	$-26,355 \pm 0,308$	---
6	$0,369 \pm 0,244$	$0,721 \pm 0,005$	$-26,575 \pm 0,463$	---
7	$0,381 \pm 0,292$	$0,724 \pm 0,003$	$-27,332 \pm 0,748$	---
8	$0,379 \pm 0,113$	$0,719 \pm 0,008$	$-27,549 \pm 0,471$	---
9	$0,373 \pm 0,301$	$0,723 \pm 0,005$	$-27,810 \pm 0,6741$	---

Tab. 1. Valeurs optimales des pôles en fonction de  $N_a$  et  $N_b$

A partir de la figure 2 les fonctions de coût  $J_a$  et  $J_b$  ont chacune un minimum unique en  $\xi_{opt,a} = 0,382$  et  $\xi_{opt,b} = 0,728$  respectivement. D'après le tableau 1, on constate que les valeurs des pôles optima sont proches de celles déterminées par les courbes théoriques des fonctions de coût  $J_a$  et  $J_b$ . On observe aussi que les valeurs des pôles varient très peu avec les ordres de troncature. Ainsi si l'objectif de l'étude est simplement la détermination du pôle optimal, le choix arbitraire de l'ordre de troncature n'a pas d'effet significatif sur la valeur du pôle optimal obtenu. Toutefois, l'augmentation des ordres de troncature permet d'augmenter la vitesse de convergence de l'algorithme mais avec un surcoût de calcul. En effet, sur la figure 3, on peut noter que l'algorithme converge en quelques itérations. Pour des ordres de troncature significatifs ( $N_a, N_b = 9$  par exemple), deux à trois itérations suffisent pour l'obtention des valeurs des pôles optima. Pour des ordres de troncature plus faibles, il est nécessaire de recourir à plus d'itérations. Cependant, on constate que les écarts types des pôles calculés pour chaque ordre  $N_b$  sont très faibles par rapport à ceux calculés pour chaque ordre  $N_a$ . D'où l'influence importante de la sortie sur l'optimisation du pôle  $\xi_a$ . Dans ce cas, il est judicieux de proposer un algorithme d'optimisation adaptative des pôles.

Dans l'objectif de l'identification du système, on peut constater sur le tableau 1 que les ordres de troncature influent sur la précision du modèle ARX - Laguerre. En effet, en augmentant l'ordre de troncature l'EQMN diminue. De plus, on peut noter que le fait d'avoir un algorithme d'optimisation des pôles permet d'améliorer non seulement l'estimation des pôles de Laguerre mais aussi de garantir une réduction paramétrique significative avec une précision globale du modèle estimé. Par exemple, pour  $N_a = N_b = 1$  on a une EQMN = 0,51 % et un TRP = 77,77 %. Dans ce cas, dans le but de valider le modèle ARX - Laguerre on trace dans la figure 4 l'évolution de la sortie réelle et la sortie du modèle. L'évolution des coefficients du vecteur des

paramètres  $c = [g_{0,a}, g_{0,b}]^T$ , pendant la phase d'identification par la méthode des moindres carrés étendus, est illustrée par la figure 5 sur une fenêtre de 1000 mesures.

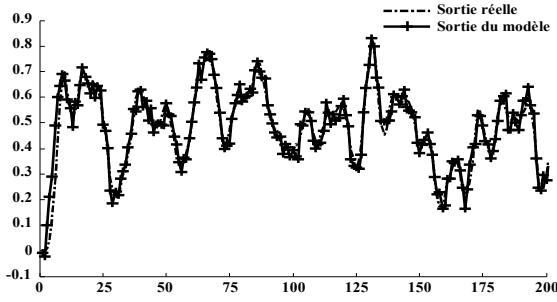


Fig. 4. Validation du modèle ARX - Laguerre ;  $N_a = N_b = 1$

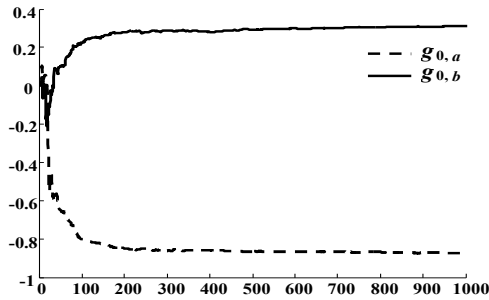


Fig. 5. Evolution des paramètres du vecteur  $c$  ;  $N_a = N_b = 1$

A présent, on considère une étude comparative entre le modèle développé ARX - Laguerre et le modèle de Laguerre. Ce dernier est caractérisé par l'identification d'un seul pôle de Laguerre. Ce pôle peut être obtenu par la méthode de Tanguy et al [8]. On rappelle que le modèle de Laguerre est défini comme combinaison linéaire des sorties des filtres de la base de Laguerre donné par la relation suivante :

$$\tilde{y}_N(k) = \sum_{n=1}^N g_n \underbrace{l_n(k, \xi)}_{x_n(k)} * u(k) \quad (52)$$

où  $g_n$ ,  $l_n(k, \xi)$ ,  $x_n(k)$  et  $\xi$  sont les coefficients de Fourier, les fonctions de Laguerre, les sorties des filtres de Laguerre et le pôle de Laguerre respectivement. Dans le tableau 2 on donne les valeurs des pôles optima ainsi que les performances du modèle de Laguerre associé au système donné par (49)-(51) en terme d'EQMN et du TRP en fonction de la variation de l'ordre de troncature  $N$ . Ces simulations sont exécutées dans les mêmes conditions que celles retenues pour le modèle ARX - Laguerre.

$N$	$\xi$	EQMN (dB)	TRP (%)
1	$0,696 \pm 0,0110$	$-16,491 \pm 0,369$	88,88
2	$0,694 \pm 0,0083$	$-18,316 \pm 0,296$	77,77
3	$0,702 \pm 0,0025$	$-18,842 \pm 0,336$	66,66
4	$0,669 \pm 0,0058$	$-22,445 \pm 0,214$	55,55
5	$0,667 \pm 0,0030$	$-22,915 \pm 0,277$	44,44
6	$0,673 \pm 0,0022$	$-23,194 \pm 0,249$	33,33
7	$0,657 \pm 0,0015$	$-23,926 \pm 0,266$	22,22
8	$0,658 \pm 0,0018$	$-24,113 \pm 0,466$	11,11
9	$0,658 \pm 0,0022$	$-24,353 \pm 0,303$	--

Tab. 2. Performances du modèle de Laguerre

On peut remarquer d'après les tableaux 1 et 2, qu'à ordre de troncature identique le modèle ARX - Laguerre approxime mieux

le système simulé malgré que le TRP est un peu élevé. On peut observer que pour atteindre les mêmes performances du modèle ARX - Laguerre en terme d'EQMN, on doit augmenter l'ordre de troncature  $N$  du modèle de Laguerre. Pour des ordres de troncature  $N_a$  et  $N_b$  faibles la précision de la reconstruction du système, donnée par l'EQMN, est meilleure lorsque le modèle ARX - Laguerre est utilisée. Par ailleurs, plus les ordres de troncature augmentent, plus les performances des deux représentations se rejoignent.

## V. CONCLUSION

Dans ce travail, une nouvelle modélisation des systèmes linéaires a été introduite en montrant que la complexité paramétrique d'un modèle ARX peut être réduite. Cette réduction est obtenue par le développement des paramètres du modèle ARX sur deux bases indépendantes de Laguerre associées respectivement à l'entrée et à la sortie. Le modèle développé est intitulé modèle ARX - Laguerre mis sous une représentation récursive simple. Chaque base de Laguerre est caractérisée par un seul pôle dont sa valeur optimale garantie une réduction paramétrique significative du modèle ARX - Laguerre. Pour ce faire, on a proposé un algorithme d'optimisation des deux pôles de Laguerre de manière analytique basé sur l'extension de la méthode de Tanguy et al. Le modèle ARX - Laguerre ainsi que l'algorithme d'optimisation des pôles ont été validés en simulation numérique dans le cas d'un système stochastique en fournissant une bonne performance d'approximation.

## RÉFÉRENCES

- [1] C.R. Arnold, *Laguerre functions and the Laguerre network. Their properties and digital simulation*, Massachusetts Institute of Technology. Lincoln Laboratory. Technical note. No. 28, 1966.
- [2] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali et C.M. Shetty, *Nonlinear programming : Theory and algorithms*, Wiley, New-York, 2nd edition, 1993.
- [3] R. Ben Abdennour, P. Borne, M. Ksouri et F. M'sahli, *Identification et commande numérique des procédés industriels*, Edition Technip, Paris, 2001.
- [4] Y. Fu et G.A. Dumont, *An Optimum Time-scale for Discrete Time Laguerre Network*, IEEE Transaction on Automatic control. Vol. 38, No. 6, pp. 934 - 938, 1993.
- [5] A. Khouaja, G. Favier et H. Messaoud, *System identification using Generalized Orthonormal Bases*, In Proc. IEEE Conference on Signal, Systems, Decision and information theory (SSD), Sousse, Tunisia, pp. 26 - 28 March, 2003.
- [6] J. Lee et V.J. Mathews, *A fast recursive least squares adaptive second-order Volterra filter and its performance analysis*, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, no. 3, pp. 1087-1102, 1993.
- [7] R. Malti, *Représentation de systèmes discrets sur la base des filtres orthogonaux - Application à la modélisation de systèmes dynamiques multi-variables*, Thèse de doctorat à l'INPL : Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 1999.
- [8] N. Tanguy, R. Morvan, P. Vilbé et L. C. Calvez, *Online optimization of the time scale in adaptive Laguerre-based filters*, IEEE Trans. on Signal Processing, 48(4), 2000.
- [9] B. Wahlberg, *System identification using Laguerre models*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 36, N°. 5, pp. 551-562, 1991.