

Identification de paramètres d'un modèle d'échangeurs de chaleur

Joachim RUDOLPH¹, Frank WOITTENNEK²

¹Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik
 Université de la Sarre
 Campus A5 1. 66123 Sarrebruck, Allemagne.
 j.rudolph@lsr.uni-saarland.de

²Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie,
 TU Dresden
 01062 Dresden, Allemagne.
 frank.woittennek@tu-dresden.de

Résumé— Un échangeur de chaleur sert pour illustrer une approche par le calcul opérationnel à l'identification de paramètres de systèmes à paramètres répartis linéaires. Une simplification résulte de l'emploi de mesures en trois points, dont le point central se trouve à distance égale des deux autres. Une paramétrisation adaptée de la solution générale du système opérationnel ordinaire associé permet ainsi de trouver une équation d'identification linéaire en les paramètres à identifier. Ses coefficients sont quadratiques en les mesures. Ainsi, dans le domaine temporel, on obtient une solution basée sur la convolution temporelle de ces signaux et une intégration par rapport au temps. Une modification efficace de la méthode consiste à introduire une pondération exponentielle et une approximation. Ainsi on s'affranchit du calcul coûteux des convolutions. Quelques résultats de simulations permettent d'en voir l'utilité.

Mots-clés— Identification, échangeurs de chaleur, systèmes à paramètres répartis, calcul opérationnel.

I. INTRODUCTION

Dans [7], [8] une approche algébrique, basée sur le calcul opérationnel, à l'identification de paramètres de systèmes à paramètres répartis linéaires a été proposée. Cette méthode est une suite de résultats de [3], que l'on avait d'abord étendu au cas des systèmes à retards, comme l'avaient fait les auteurs de [2] indépendamment. L'article [8] permet de voir que la méthode est assez générale, en principe, au moins pour les systèmes linéaires en une dimension d'espace. Toutefois, après cette première étude préliminaire, plusieurs questions restent ouvertes et les différents algorithmes possibles doivent être plus amplement étudiés, et comparés à l'aide d'exemples.

Ainsi, dans la présente contribution, on étudie un échangeur de chaleur. Il est clair que l'équation des télégraphistes se prête à un calcul analogue. Bien qu'on peut, en principe, appliquer les méthodes de [8] avec des mesures aux bords, une simplification résulte de l'emploi de mesures en trois points, dont le point central se trouve à distance égale des deux autres. Ainsi le cas des mesures aux bords et au milieu de l'échangeur est considéré ici. Le système a été étudié dans [6] pour la planification de trajectoires et le calcul de commandes en boucle ouverte. Comme dans ce dernier article, en employant le calcul opérationnel (ou de manière analogue la transformée de Laplace), on obtient le système opérationnel ordinaire associé.

La solution générale de ce système peut être écrit avec

deux paramètres fonctionnels libres. En l'évaluant dans les trois points de mesures, on élimine ces fonctions, et l'on obtient ainsi une équation d'identification linéaire en les paramètres à identifier. (Contrairement, dans [8] on se sert de la dérivation par rapport à s pour générer des équations permettant d'éliminer les fonctions.) Les coefficients de l'équation d'identification sont quadratiques en les mesures. Dans le domaine temporel il en résulte une formule basée sur la convolution temporelle des signaux de mesure et une intégrale temporelle. Une méthode alternative efficace consiste à introduire une pondération exponentielle et une approximation. Ainsi on s'affranchit du calcul coûteux des convolutions.

On traite ici le cas des conditions initiales nulles. Finalement, quelques résultats de simulations permettent de voir l'utilité des méthodes. On en conclut que la méthode asymptotique avec une pondération exponentielle est particulièrement intéressante.

II. MODÈLE D'ÉCHANGEURS DE CHALEUR

Un échangeur de chaleur simple est composé de deux tubes (cylindriques) posés l'un dans l'autre (et partageant le même axe de symétrie) : voir figure 1. Supposant que

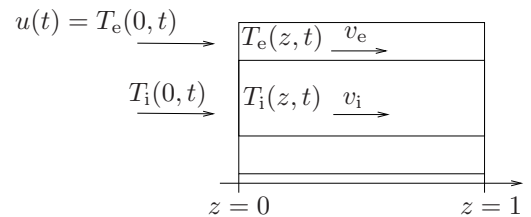


Fig. 1. Échangeur de chaleur

l'échange thermique entre le tube extérieur et l'environnement soit négligeable, et négligeant aussi la diffusion thermique, le modèle mathématique d'un tel échangeur type peut s'écrire :

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial z} = a (T_e - T_i) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial T_e}{\partial z} = b (T_i - T_e). \quad (1b)$$

Dans ces équations $T_e(z, t)$ et $T_i(z, t)$ désignent les champs de température dans les tubes extérieur et intérieur respectivement, où $z \in [0, 1]$ est la variable spatiale, et $t \geq 0$ le temps. Les paramètres réels constants de ce modèle sont : les vitesses v_i et v_e , les densités ρ_i, ρ_e , et les capacités de chaleur spécifiques c_i, c_e des fluides internes et externes ; le coefficient d'échange thermique α_i et les rayons r_i et r_e . Avec ces paramètres physiques on obtient

$$a = \frac{2\alpha_i}{c_i\rho_i r_i}, \quad k_{ei} = \frac{2r_i}{r_e^2 - r_i^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{k_{ei}\alpha_i}{c_e\rho_e}.$$

Pour simplifier les notations on considère un échangeur de longueur normalisée.

Grâce à la linéarité du modèle, les conditions initiales stationnaires peuvent être supposées nulles :

$$T_i(z, 0) = T_e(z, 0) = 0.$$

Les é.d.p. sont identiques dans les deux cas (parallèle et contre-courant), si l'on utilise une vitesse du tube interne négative, $v_i < 0$, pour le contre-courant. Par contre, le fluide entre à $z = 1$ dans ce dernier cas : Les conditions aux frontières, quant à elles, diffèrent dans les deux cas. En considérant la température à l'entrée du tube extérieure (à $z = 0$) comme commande, $u(t) = T_e(0, t)$, les conditions aux frontières sont :

$$T_i(0, t) = T_{i0}(t) = 0, \quad T_e(0, t) = u(t)$$

pour le courant parallèle, et

$$T_i(1, t) = T_{i1}(t) = 0, \quad T_e(0, t) = u(t)$$

avec le contre-courant.

Il s'avère utile de diviser les équations (1) par les vitesses :

$$\nu_i = \frac{1}{v_i}, \quad \nu_e = \frac{1}{v_e}, \quad \beta_i = \frac{a}{v_i}, \quad \beta_e = \frac{b}{v_e}.$$

Les équations (1) s'écrivent ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial z} + \nu_i \frac{\partial T_i}{\partial t} - \beta_i (T_e - T_i) &= 0 \\ \frac{\partial T_e}{\partial z} + \nu_e \frac{\partial T_e}{\partial t} - \beta_e (T_i - T_e) &= 0. \end{aligned}$$

Dans la présente contribution, ce sont les paramètres β_i et β_e qui seront identifiés, ou de manière équivalente les paramètres a et b , supposant les vitesses ν_i et ν_e connus.

A. Modèle opérationnel

Introduire l'opérateur s pour la dérivation temporelle et les fonctions opérationnelles $\hat{T}_i(z)$ et $\hat{T}_e(z)$ mène au système différentiel ordinaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}_i}{\partial z} + \nu_i s \hat{T}_i - \beta_i (\hat{T}_e - \hat{T}_i) &= 0 \\ \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial z} + \nu_e s \hat{T}_e - \beta_e (\hat{T}_i - \hat{T}_e) &= 0. \end{aligned}$$

En forme matricielle, on écrit $\partial \hat{T} / \partial z = \hat{A} \hat{T}$ avec $\hat{T} = (\hat{T}_i, \hat{T}_e)^T$ et

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\nu_i s - \beta_i & \beta_i \\ \beta_e & -\nu_e s - \beta_e \end{pmatrix}.$$

Avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{((\nu_i - \nu_e)s + \beta_i - \beta_e)^2}{4} + \beta_i \beta_e}.$$

son équation caractéristique $\det(Ip - \hat{A}) = 0$ est

$$\left(p + \frac{(\nu_i + \nu_e)s + \beta_i + \beta_e}{2} \right)^2 - \alpha^2 = 0, \quad (2)$$

dont les zéros

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{(\nu_i + \nu_e)s + \beta_i + \beta_e}{2} + \alpha \\ p_2 &= -\frac{(\nu_i + \nu_e)s + \beta_i + \beta_e}{2} - \alpha. \end{aligned}$$

Désignant son flot (sa matrice fondamentale) par $\hat{\Phi}(z) = \exp(z\hat{A})$, on a

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_i(z) \\ \hat{T}_e(z) \end{pmatrix} = \hat{\Phi}(z - z_0) \begin{pmatrix} \hat{T}_i(z_0) \\ \hat{T}_e(z_0) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Il convient d'écrire $\hat{\Phi}$ avec deux paramètres scalaires \hat{S}_1 et \hat{S}_2 comme

$$\hat{\Phi}(z) = I\hat{S}_1(z) + \hat{A}\hat{S}_2(z). \quad (4)$$

où \hat{S}_1, \hat{S}_2 sont deux solutions de l'équation différentielle associée à l'équation caractéristique (2) de la matrice \hat{A} :

$$\det(I\partial_z - \hat{A})\hat{S}_i(z) = 0, \quad i = 1, 2$$

avec $\hat{S}_1(0) = 1, \partial_z \hat{S}_1(0) = 0, \hat{S}_2(0) = 0$ et $\partial_z \hat{S}_2(0) = 1$. En utilisant les solutions exponentielles de l'équation différentielle caractéristique on identifie (après quelques lignes de calcul élémentaire)

$$\hat{S}_1(z) = \frac{1}{2\alpha} (-p_2 e^{p_1 z} + p_1 e^{p_2 z}) \quad (5a)$$

$$\hat{S}_2(z) = \frac{1}{2\alpha} (e^{p_1 z} - e^{p_2 z}). \quad (5b)$$

Utiliser la formule (4) dans (3) donne

$$\hat{T}(z) = \hat{M}(\hat{T}(z_0))\hat{S}(z - z_0) \quad (6)$$

où

$$\hat{T}(z) = \begin{pmatrix} \hat{T}_i(z) \\ \hat{T}_e(z) \end{pmatrix}, \quad \hat{S}(z - z_0) = \begin{pmatrix} \hat{S}_1(z - z_0) \\ \hat{S}_2(z - z_0) \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{M}(\hat{T}) = \begin{pmatrix} \hat{T} & \hat{A}\hat{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{T}_i & \beta_i \hat{T}_e - \hat{T}_i(\nu_i s + \beta_i) \\ \hat{T}_e & \beta_e \hat{T}_i - \hat{T}_e(\nu_e s + \beta_e) \end{pmatrix}$$

III. IDENTIFICATION DE PARAMÈTRES

A. Identification de paramètres par des mesures aux bords

Supposant les mesures des deux températures aux bords disponibles, on peut dériver des formules pour les paramètres en suivant les lignes de [7], [8]. Les mesures aux bords sont reliés par (6) avec $z = 1, z_0 = 0$:

$$\hat{T}(1) = \hat{M}(\hat{T}(0))\hat{S}(1). \quad (7)$$

Dériver cette formule par rapport à s (avec la notation \bullet' pour cette dérivation algébrique) donne

$$\hat{T}'(1) = \frac{d}{ds} \left(\hat{M}(\hat{T}(0)) \right) \hat{S}(1) + \hat{M}(\hat{T}(0))\hat{S}'(1). \quad (8)$$

On peut donc faire appel à l'équation différentielle (par rapport à s) satisfaite par les fonctions $\hat{S}_i, i = 1, 2$ dans (5), qu'on obtient en dérivant (5) par rapport à s et remplaçant ensuite les exponentielles :

$$(p_2 - p_1)(\alpha' \hat{S}(z) + \alpha \hat{S}'(z)) = \begin{pmatrix} -p_2' - p_2 p_1' z & p_1' + p_1 p_2' z \\ p_1' z & -p_2' z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 1 & p_2 \end{pmatrix} \alpha \hat{S}(z). \quad (9a)$$

L'évaluer en $z = 1$, en utiliser le résultat dans (8) et substituer $\hat{S}(1)$ en se servant de (7) donne une formule reliant les mesures aux bords et les paramètres. En inspectant cette relation on s'aperçoit qu'elle est polynomiale en les paramètres et en s . En la multipliant par une puissance suffisamment élevée de s^{-1} on se débarrasse des facteurs en s , qui mèneraient à des différentiations des signaux de mesures. La formule obtenue fait intervenir aussi des dérivées par rapport à s , qui correspondent à la multiplication par $-t$ dans les formules temporelles. Toutefois, le fait que les formules obtenues sont polynomiales en les paramètres les rend compliquées.

B. Identification avec une mesure supplémentaire

Une simplification résulte de l'emploi de mesures en trois points, dont le point central se trouve à distance égale des deux autres : On obtient une formule linéaire en les paramètres. Ainsi le cas des mesures aux bords et au milieu de l'échangeur est considéré.

La formule (6) permet de décrire les liens entre les mesures à différents endroits de l'échangeur. En mesurant les températures non seulement aux bords mais aussi au milieu (à $z = 1/2$) on obtient des formules relativement simples (voir la fin de cette section pour une méthode alternative).

Ainsi, avec $z_0 = 0$ il vient à $z = \frac{1}{2}$

$$\hat{T}_i(\frac{1}{2}) = \hat{T}_i(0)\hat{S}_1(\frac{1}{2}) + (\beta_i \hat{T}_e(0) - \hat{T}_i(0)(\nu_i s + \beta_i))\hat{S}_2(\frac{1}{2}) \quad (10a)$$

$$\hat{T}_e(\frac{1}{2}) = \hat{T}_e(0)\hat{S}_1(\frac{1}{2}) + (\beta_e \hat{T}_i(0) - \hat{T}_e(0)(\nu_e s + \beta_e))\hat{S}_2(\frac{1}{2}) \quad (10b)$$

et avec $z_0 = \frac{1}{2}$ et $z = 1$ on a

$$\hat{T}_i(1) = \hat{T}_i(\frac{1}{2})\hat{S}_1(\frac{1}{2}) + (\beta_i \hat{T}_e(\frac{1}{2}) - \hat{T}_i(\frac{1}{2})(\nu_i s + \beta_i))\hat{S}_2(\frac{1}{2}) \quad (10c)$$

$$\hat{T}_e(1) = \hat{T}_e(\frac{1}{2})\hat{S}_1(\frac{1}{2}) + (\beta_e \hat{T}_i(\frac{1}{2}) - \hat{T}_e(\frac{1}{2})(\nu_e s + \beta_e))\hat{S}_2(\frac{1}{2}). \quad (10d)$$

Éliminer $\hat{S}_1(\frac{1}{2})$ en utilisant les équations (10a) et (10d) donne

$$\begin{aligned} \hat{T}_i(\frac{1}{2})\hat{T}_e(\frac{1}{2}) - \hat{T}_i(0)\hat{T}_e(1) \\ = (\beta_i \hat{T}_e(0) - \hat{T}_i(0)(\nu_i s + \beta_i))\hat{T}_e(\frac{1}{2})\hat{S}_2(\frac{1}{2}) \\ - (\beta_e \hat{T}_i(\frac{1}{2}) - \hat{T}_e(\frac{1}{2})(\nu_e s + \beta_e))\hat{T}_i(0)\hat{S}_2(\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

De même, avec (10b) et (10c) il vient

$$\begin{aligned} \hat{T}_i(\frac{1}{2})\hat{T}_e(\frac{1}{2}) - \hat{T}_i(1)\hat{T}_e(0) \\ = (\beta_e \hat{T}_i(0) - \hat{T}_e(0)(\nu_e s + \beta_e))\hat{T}_i(\frac{1}{2})\hat{S}_2(\frac{1}{2}) \\ - (\beta_i \hat{T}_e(\frac{1}{2}) - \hat{T}_i(\frac{1}{2})(\nu_i s + \beta_i))\hat{T}_e(0)\hat{S}_2(\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Une addition mène à

$$\begin{aligned} 2\hat{T}_i(\frac{1}{2})\hat{T}_e(\frac{1}{2}) - \hat{T}_i(0)\hat{T}_e(1) - \hat{T}_i(1)\hat{T}_e(0) \\ = ((\nu_e - \nu_i)s + \beta_e - \beta_i)\hat{D} \quad (11a) \end{aligned}$$

avec

$$\hat{D} = \det \begin{pmatrix} \hat{T}_i(0) & \hat{T}_i(\frac{1}{2}) \\ \hat{T}_e(0) & \hat{T}_e(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \hat{S}_2(\frac{1}{2}).$$

Ainsi les équations (10a) et (10c) donnent

$$\hat{T}_i(\frac{1}{2})\hat{T}_i(\frac{1}{2}) - \hat{T}_i(0)\hat{T}_i(1) = -\beta_i \hat{D}, \quad (11b)$$

et finalement, en combinant (10b) et (10d), on obtient

$$\hat{T}_e(\frac{1}{2})\hat{T}_e(\frac{1}{2}) - \hat{T}_e(0)\hat{T}_e(1) = \beta_e \hat{D}. \quad (11c)$$

En éliminant \hat{D} on a donc

$$\hat{C}_1 \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_2 \\ -\hat{C}_3 \end{pmatrix} ((\nu_e - \nu_i)s + \beta_e - \beta_i)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= 2\hat{T}_i(\frac{1}{2})\hat{T}_e(\frac{1}{2}) - \hat{T}_i(0)\hat{T}_e(1) - \hat{T}_i(1)\hat{T}_e(0) \\ \hat{C}_2 &= \hat{T}_i(0)\hat{T}_i(1) - \hat{T}_i(\frac{1}{2})\hat{T}_i(\frac{1}{2}) \\ \hat{C}_3 &= \hat{T}_e(0)\hat{T}_e(1) - \hat{T}_e(\frac{1}{2})\hat{T}_e(\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

ou bien

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{C}_1 + \hat{C}_2 & -\hat{C}_2 \\ -\hat{C}_3 & \hat{C}_1 + \hat{C}_3 \end{pmatrix}}_{=:\hat{B}} \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{C}_2 \\ -\hat{C}_3 \end{pmatrix}}_{=:\hat{b}} (\nu_e - \nu_i) s. \quad (12)$$

Visiblement, tout autre triple de points de mesure dont le point central se trouve à distance égale des deux autres peut être utilisé de la même manière.

Comme la multiplication par s correspond à une différentiation, il convient de multiplier la formule (12) par son inverse :

$$s^{-1} \hat{B} \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{pmatrix} - \hat{b} = 0. \quad (13)$$

La matrice \hat{B} et le vecteur \hat{b} sont quadratiques en les mesures, ce dernier étant en plus linéaires en la différence $\nu_i - \nu_e$.

L'interprétation temporelle de cette formule donne

$$\int_0^t B(\tau) d\tau \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{pmatrix} = b(t), \quad (14)$$

où l'on comprend par $B(\tau)$ l'expression obtenue par la convolution temporelle des signaux de mesures correspondant au produit apparaissant dans les composants de \hat{B} , et de même pour $b(t)$.

Elle peut être résolue exactement,

$$\begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{pmatrix} = \left(\int_0^t B(\tau) d\tau \right)^{-1} b(t), \quad (15)$$

ou bien en recherchant une approximation par la méthode des moindres carrées.

On voit sur l'équation (12) que la méthode présentée permet d'identifier les paramètres β_i et β_e , et donc a et b , si, et seulement si, les vitesses ν_i et ν_e sont connues et différentes l'une de l'autre (ce qui joue un rôle dans le cas parallèle seulement). Toutefois, ceci ne permet de dire, ni si ces paramètres pourraient être identifiés sur la base de (7) ou (10), ni si la méthode développée en section III-A permet de les identifier. Une plus ample discussion de l'identifiabilité de ce genre de systèmes se trouve dans [1].

Comme annoncé plus haut, à partir de (6) on peut développer un calcul alternatif. Avec $\hat{M}^*(z) = \hat{M}(\hat{T}(z))$ et $z_0 = 0$ il vient à $z = \frac{1}{2}$

$$\hat{T}(\frac{1}{2}) = \hat{M}^*(0)\hat{S}(\frac{1}{2}) \quad (16a)$$

et avec $z_0 = \frac{1}{2}$ et $z = 1$

$$\hat{T}(1) = \hat{M}^*(\frac{1}{2})\hat{S}(\frac{1}{2}). \quad (16b)$$

Une multiplication à gauche de la première de ces équations par $\text{adj } \hat{M}(0) \det \hat{M}^*(\frac{1}{2})$ et de la seconde par $\text{adj } \hat{M}(\frac{1}{2}) \det \hat{M}^*(0)$ permet d'éliminer $\hat{S}(\frac{1}{2})$:

$$\text{adj } \hat{M}(0) \det \hat{M}^*(\frac{1}{2}) \hat{T}(\frac{1}{2}) = \text{adj } \hat{M}(\frac{1}{2}) \det \hat{M}^*(0) \hat{T}(1).$$

Or, les expressions résultantes sont des polynômes de degré 4 en $\hat{T}_i(z), \hat{T}_e(z), z \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Il faudra ensuite des calculs symboliques supplémentaires, ou bien une évaluation numérique qui sera plus lourde qu'avec la méthode énoncée ci-dessus.

C. Identification asymptotique

Comme la convolution demande un effort de calcul numérique assez important (en particulier dans des problèmes plus complexes que celui traité ici) il convient de simplifier les algorithmes. A cette fin, on peut introduire une pondération en multipliant les signaux par $e^{\alpha t}$. Ainsi (13) donne

$$\hat{B}^\alpha \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{pmatrix} - (s - \alpha) \hat{b}^\alpha = 0, \quad (17)$$

où l'on comprend par \hat{B}^α l'expression obtenue par la multiplication classique (ponctuelle, et non la convolution) des

composants de \hat{B} par $e^{\alpha t}$, et de même pour \hat{b}^α . Dans le cadre du calcul opérationnel de Mikusiński, cette opération correspond à l'opération notée T^α (sans rapport avec le symbole T pour la température), qui est commutative et par rapport à l'addition et par rapport à la multiplication (à comparer au Théorème de l'amortissement (ou décalage fréquentiel)). On a aussi $T^\alpha s = s - \alpha$. Une intégration fournit

$$\int_0^\infty B^\alpha(t) \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{pmatrix} dt = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} - \alpha \right) b^\alpha(t) dt, \quad (18)$$

pour $\alpha < 0$ et des signaux dont la valeur absolue est bornée par $e^{-\alpha t}$ pour assurer l'existence des intégrales.

Si les conditions initiales des signaux sont nulles on a $b^\alpha(0) = b(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} - \alpha \right) b^\alpha(t) dt \\ &= \int_0^\infty \dot{b}(t) e^{\alpha t} + \alpha b(t) e^{\alpha t} - \alpha b(t) e^{\alpha t} dt \\ &= b(0) - \alpha \int_0^\infty b(t) e^{\alpha t} dt = -\alpha \int_0^\infty b^\alpha(t) dt, \end{aligned} \quad (19)$$

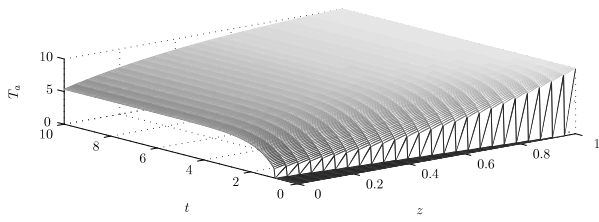
et ainsi

$$\int_0^\infty B^\alpha(t) dt \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{pmatrix} + \alpha \int_0^\infty b^\alpha(t) dt = 0. \quad (20)$$

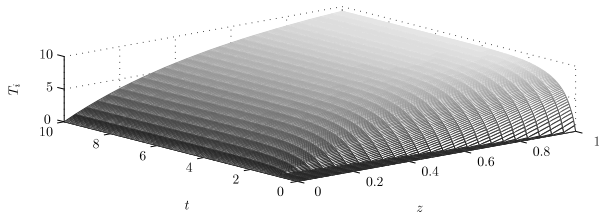
Grâce à la distributivité de l'intégration par rapport à la multiplication, on peut intégrer avant la multiplication, ce qui permet d'éviter l'opération coûteuse de la convolution. Pour l'implémentation on utilise une limite supérieure finie de l'intégration, l'erreur étant peu importante pour t large à cause de la décroissance de $e^{\alpha t}$. La résolution par rapport aux paramètres à identifier est alors aisée.

IV. RÉSULTATS DE SIMULATIONS

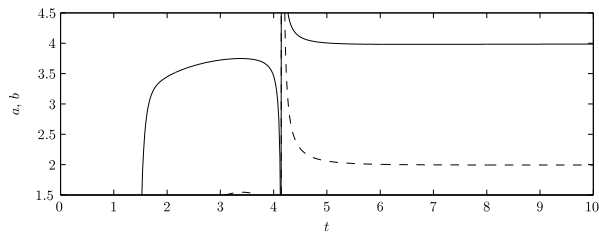
Les résultats de simulations reportés concerneront le cas du contre-courant. Les vitesses sont normalisées et le signal d'entrée, la trajectoire de température $t \mapsto T_e(1, t)$, est un échelon (de hauteur 10). L'évolution des températures dans les deux tubes suite à cette entrée est donnée en haut de la figure 2. Le code de simulation utilisé est basé sur une intégration le long des caractéristiques. En bas de cette figure en voit un exemple de l'identification des deux paramètres.



Température dans le tube extérieur

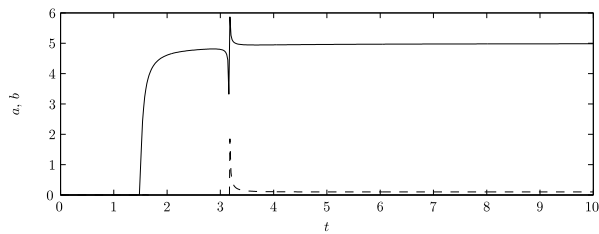


Température dans le tube intérieur

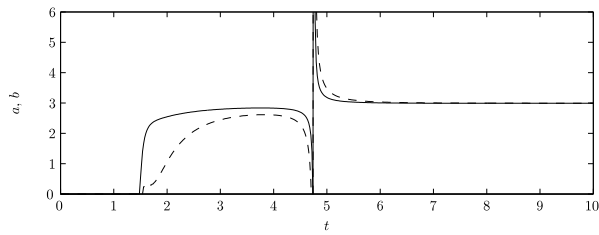


Évolution des estimées : $a=4$ et $b=2$ (en tirets)

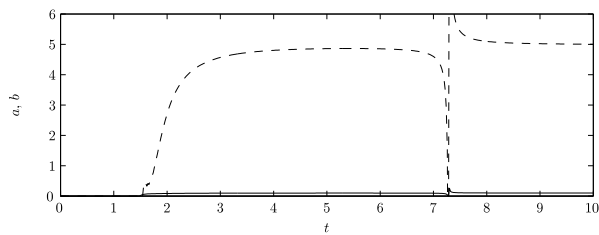
Fig. 2. Évolution des températures avec un signal d'entrée constant



Évolution des estimées : $a=5$ et $b=0.1$ (tirets)

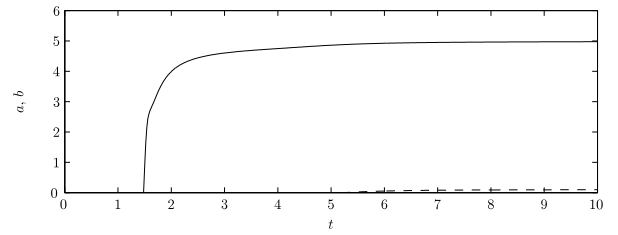


Évolution des estimées : $a=3$ et $b=3$ (tirets)

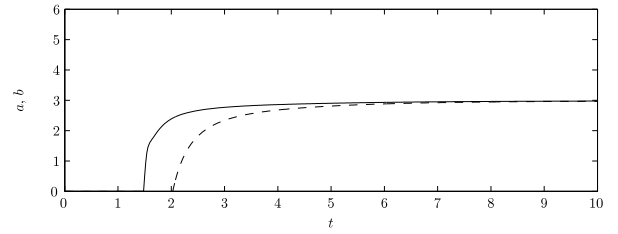


Évolution des estimées : $a=0.1$ et $b=5$ (tirets)

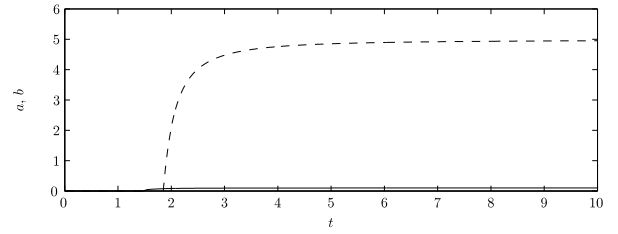
Fig. 3. Estimation de différentes valeurs des paramètres avec la formule exacte (14)



Évolution des estimées : $a=5$ et $b=0.1$ (tirets)

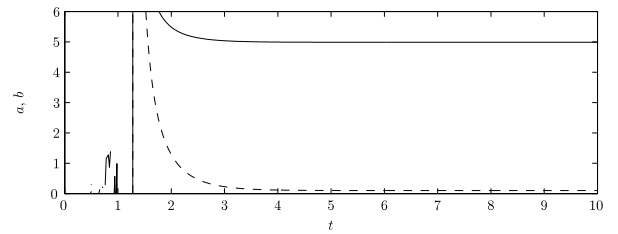


Évolution des estimées : $a=3$ et $b=3$ (tirets)

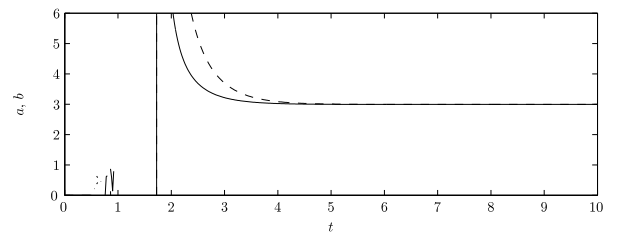


Évolution des estimées : $a=0.1$ et $b=5$ (tirets)

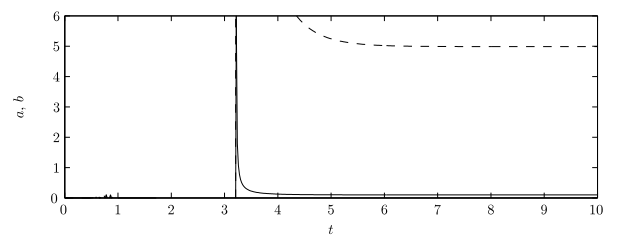
Fig. 4. Estimation de différentes valeurs des paramètres avec la méthode des moindres carrés



Évolution des estimées : $a=5$ et $b=0.1$ (tirets)



Évolution des estimées : $a=3$ et $b=3$ (tirets)



Évolution des estimées : $a=0.1$ et $b=5$ (tirets)

Fig. 5. Estimation de différentes valeurs des paramètres avec la méthode asymptotique (T^α avec $\alpha = -2$)

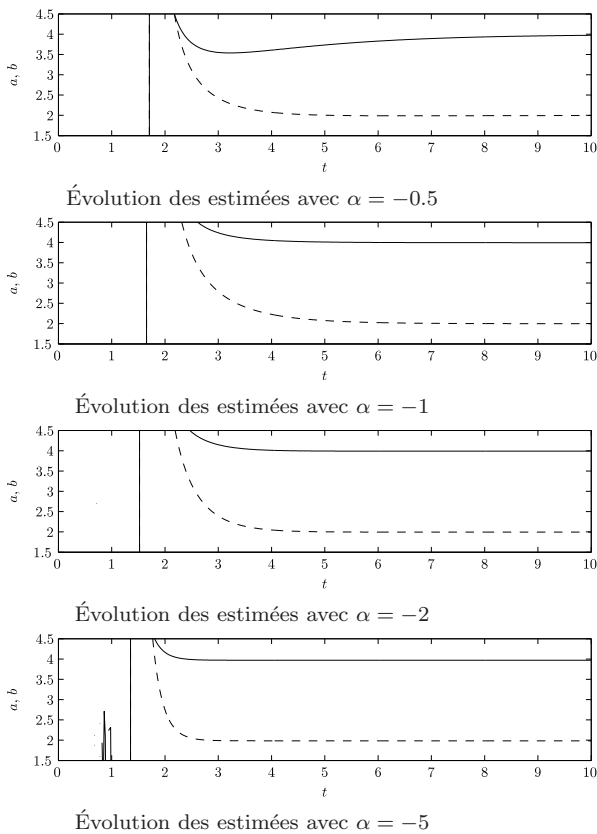


Fig. 6. Simulation avec $a = 4$ et $b = 2$ et identification avec quatre valeurs différentes du paramètre α

La convergence de l'estimation dépend des valeurs des paramètres. Dans les figures 3, 4 et 5 on voit les résultats des trois méthodes avec des jeux de paramètres différents : l'emploi de la formule (14), la solution de (15) par les moindres carrés, et la méthode asymptotique. Une valeur proche de la valeur réelle s'établit plus vite pour des valeurs du paramètre a plus grands, voir la figure 3. Avec a plus grand, l'influence du tube extérieur (c'est là qu'agit l'entrée) dans le comportement du tube intérieur est plus important.

La figure 6 illustre l'influence de la valeur du paramètre α dans T^α . Comme on l'attend, le plus grand la valeur absolue de α , le plus vite la valeur de l'approximation finie de l'intégrale peut être jugée suffisante.

Bien sûr, le bruit sur les signaux de mesure doit être considéré. On se restreint ici à ne reporter qu'un seul résultat. La figure 7 peut donner une impression de l'influence du bruit sur le résultat de l'identification. On y compare les trois méthodes en considération, avec un bruit suivant une loi normale à moyenne nulle et écart-type de 0.1 des amplitudes des signaux de mesures.

V. CONCLUSION

Différentes variantes d'une méthode pour l'identification de paramètres de systèmes linéaires à paramètres répartis ont été proposées et illustrées à l'aide d'un exemple d'échangeur de chaleur. Nos études indiquent que c'est la méthode asymptotique qui est préférable, et pour sa relative simplicité numérique et pour sa performance.

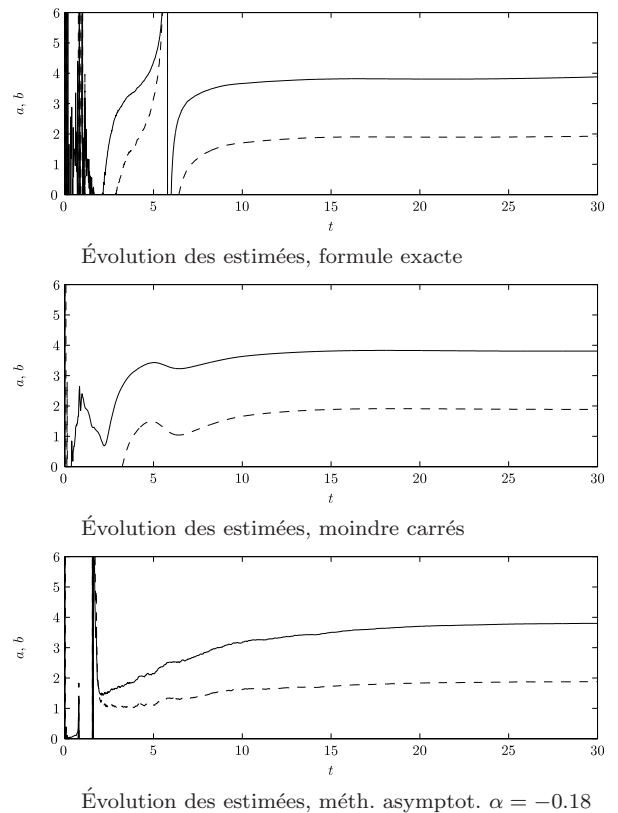


Fig. 7. Identification avec les trois méthodes et bruit de mesures

Remerciements : Les auteurs remercient leur étudiant J. Nitzsche pour sa participation aux calculs.

RÉFÉRENCES

- [1] Belkoura L. Identifiability of systems described by convolution equations. *Automatica*, vol. 41, pp. 505–512, 2005.
- [2] Belkoura L., Richard J.-P et Fliess M. A convolution approach for delay systems identification. 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, 6–11 juillet 2008.
- [3] Fliess M. et Sira-Ramírez H. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM : COCV (Control, Optimisation and Calculus of Variations)*, vol. 9, pp. 151–168, 2003.
- [4] Mikusiński J. *Operational Calculus*. t. 1, Pergamon, Oxford & PWN, Varsovie, 1983.
- [5] Mikusiński J. et Boehme T. K. *Operational Calculus*. t. 2, Pergamon, Oxford & PWN, Varsovie, 1987.
- [6] Rudolph J. Commande par platitude de modèles à paramètres répartis pour échangeurs de chaleur, CIFA 2000, Lille, France, 5–8 juillet, pp. 566–571, 2000.
- [7] Rudolph J. et Woittennek F. Ein algebraischer Zugang zur Parameteridentifikation in linearen unendlichdimensionalen Systemen. *at – Automatisierungstechnik*, vol. 55, n° 9, pp. 457–467, 2007.
- [8] Rudolph J. et Woittennek F. An algebraic approach to parameter identification in linear infinite dimensional systems. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, Ajaccio, France, 25–27 Juin, 2008.
- [9] Woittennek F. *Beiträge zum Steuerungsentwurf für lineare, örtlich verteilte Systeme mit konzentrierten Stellgrößen*. Shaker Verlag, Aachen, 2007.