

Stabilisation par retour de pseudo-état des systèmes non entiers commensurables

Christophe FARGES¹, Jocelyn SABATIER¹, Mathieu MOZE¹

¹Laboratoire IMS, Groupe LAPS/CRONE, CNRS UMR 5218, Université Bordeaux 1,
351 cours de la Libération, 33405 Talence, France

christophe.farges@ims-bordeaux.fr, jocelyn.sabatier@ims-bordeaux.fr, mathieu.moze@ims-bordeaux.fr

Résumé— Ce papier traite du problème de stabilisation par retour de pseudo-état des systèmes non entiers commensurables. Le formalisme des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) est utilisé pour tester l'appartenance des valeurs propres de la matrice dynamique au domaine de stabilité du système non entier. Après avoir traité le cas où l'ordre non entier est supérieur à 1, l'accent est mis sur le cas $0 < \nu < 1$ correspondant à un domaine de stabilité non convexe. Dans ce cas, les conditions LMI de stabilité existantes ne peuvent être utilisées en synthèse. Une nouvelle condition LMI d'analyse est donc proposée et utilisée pour obtenir une condition nécessaire et suffisante pour la synthèse de correcteurs stabilisants. Cette condition est ensuite étendue au problème de stabilisation robuste d'un système non entier polytopique. L'efficacité de ces méthodes est enfin évaluée sur le problème de stabilisation d'un pendule inversé.

Mots-clés— Système non entier commensurable; Stabilisation par retour d'état; Inégalités Matricielles Linéaires; Systèmes polytopiques.

I. INTRODUCTION

Comme pour les systèmes entiers, la stabilité d'un système linéaire non entier commensurable dépend de l'emplacement des valeurs propres de sa matrice dynamique dans le plan complexe. Ce résultat, publié par D. Matignon [11], est le point de départ de nombreux autres et en particulier de ceux faisant intervenir des Inégalités Matricielles Linéaires tels que ceux présentés dans ce papier.

L'approche LMI joue un rôle important en Automatique depuis le début des années 60. En effet, de nombreux problèmes d'Automatique peuvent être reformulés comme des problèmes d'optimisation convexe faisant intervenir des LMI. Ce succès a été par ailleurs amplifié par le développement de méthodes numériques efficaces permettant de résoudre ces problèmes [5].

La plus célèbre condition LMI est celle concernant l'analyse de stabilité d'un système entier et résulte de l'application directe de la théorie de Lyapunov au cas d'un système Linéaire Invariant dans le Temps (LTI). Cette condition permet de tester l'appartenance des valeurs propres de la matrice dynamique au demi-plan gauche. Des conditions LMI ont également été développées pour tester l'appartenance des valeurs propres à des régions du plan complexe connues sous le nom de régions LMI [7].

Paradoxalement, peu d'études sont consacrées au développement de conditions LMI d'analyse de stabilité dans le cas non entier [13] et les problèmes de synthèse sont exclusivement résolus dans le domaine fréquentiel [15]. Ceci résulte probablement du fait que le domaine de stabilité d'un système non entier d'ordre $0 < \nu \leq 1$ est non convexe et par conséquent ne constitue pas une région LMI.

Des travaux récents s'intéressent néanmoins à ce problème (voir [16] pour un état de l'art). En particulier, des conditions LMI nécessaires et suffisantes d'analyse de stabilité d'un système non entier sont proposées dans [13].

A la connaissance des auteurs, aucun résultat LMI de synthèse n'a été publié jusqu'ici. La contribution principale du papier est ainsi de fournir une nouvelle condition LMI nécessaire et suffisante pour la synthèse de lois de commande par retour de pseudo-état pour les systèmes non entiers. De plus, cette condition est un résultat clef pour l'extension au cas non entier de nombreux résultats LMI existant dans le cas des systèmes entiers. Parmi elles, un premier résultat concernant la stabilisation robuste d'un système non entier polytopique est présenté.

Le papier est organisé comme suit. Quelques résultats importants sur la stabilité des systèmes non entiers sont rappelés en section II. Le problème de stabilisation par retour de pseudo-état est formulé en section III. Dans la section IV, une nouvelle condition LMI de stabilité est développée puis utilisée pour résoudre le problème de synthèse. Ce résultat est étendu à la stabilisation robuste des systèmes polytopiques dans la section V. Enfin, l'efficacité des méthodes est évaluée sur le problème de stabilisation d'un pendule inversé.

Notations : La transposée d'une matrice A est notée A' , son conjugué \bar{A} et son conjugué transposé A^* . Pour les matrices hermitiennes, \succ (\succeq) représente l'ordre partiel de Löwner, i.e. $A \succ B$ ssi $A - B$ est (semi) définie positive.

II. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

A. Système LTI non entier commensurable

Un système LTI non entier d'entrée $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et de sortie $y(t) \in \mathbb{R}^p$ peut être modélisé par l'équation différentielle :

$$\sum_i S_i D^{\nu_{y_i}} y(t) = \sum_i T_i D^{\nu_{u_i}} u(t), \quad (1)$$

où $S_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et $T_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont des matrices constantes. $D^{\nu_{y_i}} = d^{\nu_{y_i}}/dt^{\nu_{y_i}}$ et $D^{\nu_{u_i}} = d^{\nu_{u_i}}/dt^{\nu_{u_i}}$ sont les opérateurs de dérivation non entière (les résultats présentés sont valides quelle que soit la définition utilisée : celle de Riemann-Liouville [12], de Caputo [6] ou d'autres [17]).

Les systèmes étudiés ici sont supposés commensurables.

Définition 1 : Un système LTI non entier est dit commensurable si et seulement si les ordres de dérivations apparaissant dans (1) sont multiples d'un même ordre non entier ν .

B. Pseudo-représentation d'état

Pour des conditions initiales nulles, un système LTI non entier commensurable décrit par (1) admet une pseudo-représentation d'état de la forme :

$$\begin{cases} D^\nu x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de pseudo-état, ν est l'ordre non entier du système et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont des matrices constantes.

Remarque 1 : Pour un système non entier, la connaissance de $x(t_0)$ (t_0 étant l'instant initial) n'est pas suffisante pour déterminer le comportement futur du système [9], [14]. Par conséquent, x ne représente pas l'état du système et sera dénommé par la suite "pseudo-état".

La matrice de transfert $H(s)$ est donnée par :

$$H(s) = C (s^\nu I - A)^{-1} B + D. \quad (3)$$

C. Stabilité d'un système non entier commensurable

Définition 2 ([11]) Un système LTI non entier défini par sa réponse impulsionnelle $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))$ est BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) stable ssi :

$$\forall u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m), \quad y = h \star u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p). \quad (4)$$

La stabilité d'un système non entier commensurable peut également être étudiée à partir de l'emplacement des valeurs propres de la matrice A de la pseudo-représentation d'état dans le plan complexe.

Théorème 1 : Le système (2), de triplet (A, B, C) minimal, est BIBO stable ssi :

$$|\text{Arg}(\text{eig}(A))| > \nu \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Ce résultat a été démontré par D. Matignon dans le cas où $0 < \nu < 1$ [11] et dans [16] lorsque $1 < \nu < 2$.

Le domaine de stabilité \mathcal{D}_s , représenté sur la figure 1, dépend donc de l'ordre non entier ν :

$$\mathcal{D}_s = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\text{Arg}(z)| > \nu \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (6)$$

Par la suite, le triplet (A, B, C) est supposé toujours minimal (pas de compensation pôle-zéro dans $H(s)$).

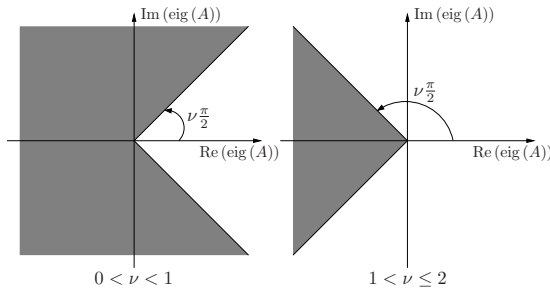


Fig. 1. Domaine de stabilité d'un système non entier (région grisée)

III. FORMULATION DU PROBLÈME

Nous nous intéressons à la synthèse de lois de commande par retour de pseudo-état de la forme :

$$u(t) = Kx(t) \quad (7)$$

où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est un gain matriciel constant.

En appliquant la loi de commande (7) au système (2), l'équation dynamique du système bouclé s'écrit :

$$D^\nu x(t) = (A + BK)x(t). \quad (8)$$

D'après le théorème 1, synthétiser des correcteurs stabilisants revient à résoudre le problème suivant.

Problème 1 : Pour une paire de matrices donnée ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$), trouver une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ t.q.

$$|\text{Arg}(\text{eig}(A + BK))| > \nu \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

A. Cas $\nu = 1$

Lorsque $\nu = 1$, le système (2) devient un système LTI d'ordre entier classique et la condition de stabilité (5) confirme que le domaine de stabilité est le demi plan gauche. Le théorème suivant, basé sur la théorie de Lyapunov, permet alors de résoudre le problème d'analyse de stabilité.

Théorème 2 ([5]) Le système (2) où $\nu = 1$ (système d'ordre entier) est stable ssi $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times n} \succ 0$ t.q. :

$$AX + XA' \prec 0. \quad (10)$$

L'application du théorème 2 avec $\nu = 1$ au système bouclé (8) conduit à une inégalité matricielle non linéaire. Pour obtenir une formulation LMI, le changement de variables linéarisant $Y = KX$ initialement proposé par [3] peut être appliqué et conduit au théorème suivant.

Théorème 3 ([3]) Le système (2) où $\nu = 1$ (système d'ordre entier) est stabilisable par la loi de commande (7) ssi il $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times n} \succ 0$ et $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ t.q. :

$$AX + XA' + BY + Y'B' \prec 0. \quad (11)$$

Dans ce cas, un correcteur stabilisant est donné par :

$$K = YX^{-1}. \quad (12)$$

B. Cas $1 < \nu < 2$

Tester si les valeurs propres de A appartiennent à la région définie par (5) avec $1 < \nu < 2$ est un problème LMI bien connu. En effet, pour les systèmes entiers, placer les pôles dans ce type de région revient à fixer un objectif de performances en termes d'amortissement vis-à-vis du système bouclé. Une solution à ce problème passe par l'utilisation des régions LMI [7].

Théorème 4 ([13], [16]) Le système non entier (2) d'ordre $1 < \nu < 2$ est stable ssi $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} \succ 0$ t.q. :

$$\begin{bmatrix} (A'P + PA) \sin(\nu \frac{\pi}{2}) & (A'P - PA) \cos(\nu \frac{\pi}{2}) \\ (PA - A'P) \cos(\nu \frac{\pi}{2}) & (A'P + PA) \sin(\nu \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \prec 0. \quad (13)$$

En utilisant le changement de variables $Y = KX$, cette condition LMI d'analyse peut être adaptée à la synthèse et un correcteur stabilisant est alors donné par (12).

C. Cas $0 < \nu \leq 1$

L'extension des résultats précédents au cas $0 < \nu \leq 1$ est loin d'être triviale. Ce problème n'a jamais été étudié dans le cas entier puisqu'un tel placement des valeurs propres correspondrait à un système entier instable. De plus, la région du plan complexe définie par (5) est non convexe. Seuls quelques résultats ont été développés récemment (voir [16]). Malheureusement, ces conditions LMI font intervenir la matrice A élevée à une puissance dépendant de l'ordre non entier ν . Un changement de variables linéarisant ne peut alors être trouvé.

IV. RÉSULTATS PRINCIPAUX

A. Nouvelle condition LMI d'analyse de stabilité

Une analyse basée sur la décomposition du domaine de stabilité est proposée ici. En effet, le domaine de stabilité \mathcal{D}_s donné par (5) peut être vu comme l'union de

deux demi-plans, notés respectivement \mathcal{D}_{s1} et \mathcal{D}_{s2} . Ces derniers résultent de la rotation du demi-plan gauche d'angles $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_2 = -\varphi$ respectivement, où $\varphi = (1-\nu)\pi/2$, comme indiqué sur la figure 2.

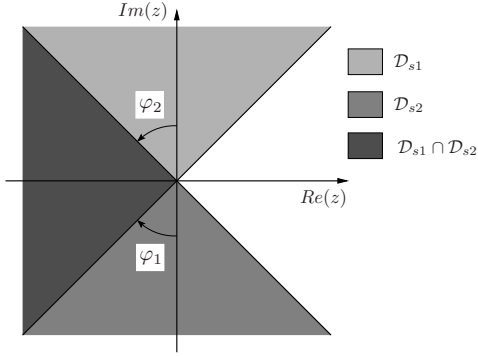


Fig. 2. Domaine de stabilité comme l'union de deux demi-plans

Ainsi, la région de stabilité est $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_{s1} \cup \mathcal{D}_{s2}$ avec :

$$\mathcal{D}_{s_i} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{j\varphi_i}) < 0\}, \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (14)$$

Puisque \mathcal{D}_{s1} and \mathcal{D}_{s2} ne sont pas symétriques par rapport à l'axe réel, ils ne constituent pas des régions LMI. Le formalisme introduit par Chilali [7] et développé par Bachelier [1], [2] permet de traiter ce cas particulier en utilisant le concept des régions LMI Généralisées (GLMI).

Définition 3 ([7]) Une région \mathcal{D} du plan complexe est une région GLMI d'ordre l s'il existe des matrices carrées complexes $\theta_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$, $\psi_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$, $H_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ et $J_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ ($\forall k \in \{1, \dots, m\}$), telles que

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists w = [w_1 \ \dots \ w_m]' \in \mathbb{C}^m \right. \\ \left. \text{t.q. } f_{\mathcal{D}}(z, w) < 0, \ g_{\mathcal{D}}(w) = 0 \right\}, \quad (15)$$

$$f_{\mathcal{D}}(z, w) = \sum_{k=1}^m (\theta_k w_k + \theta_k^* \bar{w}_k + \psi_k z w_k + \psi_k^* \bar{w}_k \bar{z}) \quad (16)$$

$$g_{\mathcal{D}}(w) = \sum_{k=1}^m (H_k w_k + J_k \bar{w}_k). \quad (17)$$

Chaque région \mathcal{D}_{s_i} donnée par (14) s'écrit aussi

$$\mathcal{D}_{s_i} = \{z \in \mathbb{C} : \exists w_i \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } e^{j\varphi_i} z w_i + e^{-j\varphi_i} \bar{z} \bar{w}_i < 0\} \quad (18)$$

et constitue donc une région GLMI de la forme (15) avec $m = 1$, $\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\psi_1 = \begin{bmatrix} e^{j\varphi_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H_1 = 1$ et $J_1 = -1$.

Comme présenté dans [1], l'union de m régions GLMI

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{C} : f_k(z) = \alpha_k + \beta_k z + \beta_k^* \bar{z} < 0\}, \quad k \in \{1 \dots m\} \quad (19)$$

est une région GLMI de la forme (15) d'ordre $l = m+1$ avec

$$\theta_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Theta_k & \mathbf{0}_{1 \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & -\varepsilon_k^m \end{bmatrix}, \quad \psi_k = \begin{bmatrix} \Psi_k & \mathbf{0}_{1 \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} \beta_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

et $H_k = -J_k = \varepsilon_{k+1}^{m+1}$, où $\varepsilon_p^q \in \mathbb{R}^{p \times q}$ est défini comme suit : $\varepsilon_p^q(\rho, \sigma) = 1$ si $\rho = \sigma = p$, $\varepsilon_p^q(\rho, \sigma) = 0$ sinon.

Comme chaque \mathcal{D}_{s_i} de la forme (14) peut être décrit par $\alpha_k = 0$ et $\beta_k = e^{j\varphi_k}$, la région de stabilité \mathcal{D}_s est une GLMI de la forme (15).

Définition 4 : Une matrice est \mathcal{D} -stable ssi ses valeurs propres appartiennent à une région \mathcal{D} du plan complexe.

Dans le cas où \mathcal{D} est une région GLMI, le lemme suivant donne une condition LMI nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit \mathcal{D} -stable.

Lemme 1 ([7]) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et \mathcal{D} une région GLMI. A est \mathcal{D} -stable ssi $\exists m$ matrices $X_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($k \in \{1 \dots m\}$) t.q.

$$\sum_{k=1}^m (\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (AX_k) + \psi_k^* \otimes (AX_k)^*) < 0 \quad (22)$$

$$\sum_{k=1}^m (H_k \otimes X_k + J_k \otimes X_k^*) = \mathbf{0}_{nl \times nl}. \quad (23)$$

Le lemme 1 est utilisé pour obtenir le théorème suivant qui constitue une nouvelle condition nécessaire et suffisante de stabilité pour un système non entier d'ordre $0 < \nu < 1$.

Lemme 2 : Le système non entier (2) d'ordre $0 < \nu < 1$ est BIBO stable ssi il existe des matrices complexes $X_1 = X_1^* \succ 0$ et $X_2 = X_2^* \succ 0$ t.q.

$$\bar{r}X_1 A' + rAX_1 + rX_2 A' + \bar{r}AX_2 < 0, \quad (24)$$

où $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$.

Preuve 1 : L'application du lemme 1 à la matrice A et l'utilisation des régions \mathcal{D}_{s_i} (14) permet d'obtenir la condition LMI (24). La contrainte égalité (23) est toujours vérifiée et disparaît donc du problème d'optimisation.

Théorème 5 : Le système non entier (2) d'ordre $0 < \nu < 1$ est BIBO stable ssi $\exists X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n} \succ 0$ t.q.

$$(rX + \bar{r}\bar{X})' A' + A(rX + \bar{r}\bar{X}) < 0 \quad (25)$$

où $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$.

Preuve 2 : La condition du lemme 2 peut s'écrire

$$\exists X_1 = X_1^* \succ 0, X_2 = X_2^* \succ 0 \text{ t.q. } L_1(X_1) + L_2(X_2) < 0 \quad (26)$$

où $L_1(X_1) = \bar{r}X_1 A' + rAX_1$ et $L_2(X_2) = rX_2 A' + \bar{r}AX_2$. Ce dernier problème LMI est équivalent à :

$$\exists X = X^* \succ 0 \text{ t.q. } L_1(X) + L_2(\bar{X}) < 0. \quad (27)$$

(27) \Rightarrow (26) est évident : prendre $X_1 = X$ et $X_2 = \bar{X}$.
(26) \Rightarrow (27) peut être prouvé comme suit. $\exists X_1 = X_1^* \succ 0$, $X_2 = X_2^* \succ 0$ t.q. $L_1(X_1) + L_2(X_2) < 0 \Leftrightarrow \exists X_1 = X_1^* \succ 0$, $X_2 = X_2^* \succ 0$ t.q. $L_1(X_1) + L_2(X_2) + \bar{L}_1(X_1) + \bar{L}_2(X_2) < 0$ qui s'écrit aussi $\exists X_1 = X_1^* \succ 0$, $X_2 = X_2^* \succ 0$ t.q. $L_1(X_1) + L_2(X_2) + L_1(\bar{X}_1) + L_2(\bar{X}_1) < 0$. Comme L_1 et L_2 sont linéaires, cette dernière inégalité est équivalente à la relation (27) où $X = X_1 + \bar{X}_2$.

B. Synthèse de correcteurs par retour de pseudo-état

Pour étendre le théorème 5 à la synthèse, un changement de variables doit être trouvé. On notera que la variable X intervenant dans la LMI (25) est complexe alors que le gain du correcteur K à trouver est réel.

Cependant, la LMI (25) du théorème 5 a été formulée telle que $rX + \bar{r}\bar{X}$ (notée plus loin \tilde{X}) soit réelle.

Dans ce contexte, la LMI (25) peut s'écrire :

$$\tilde{X}' A' + A \tilde{X} < 0. \quad (28)$$

Cette LMI est réelle et fait intervenir une variable \tilde{X} réelle mais non symétrique. En remplaçant A par $A+BK$ et en appliquant le changement de variables $Y = K\tilde{X}$, la condition

nécessaire et suffisante suivante pour la synthèse d'un correcteur par retour de pseudo-état de gain réel est obtenue.

Théorème 6 : Le système non entier (2) d'ordre $0 < \nu < 1$ est BIBO stabilisable par retour de pseudo état de la forme $u = Kx$ ssi il existe une matrice $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ définie positive et une matrice réelle $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que

$$(rX + \bar{r}\bar{X})'A' + A(rX + \bar{r}\bar{X}) + Y'B' + BY \prec 0 \quad (29)$$

où $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$. De plus, le gain du correcteur est :

$$K = Y(rX + \bar{r}\bar{X})^{-1}. \quad (30)$$

Preuve 3 : La LMI (29) ainsi que la relation (30) sont une conséquence directe de la discussion menée plus haut. L'inversibilité de la matrice $(rX + \bar{r}\bar{X})$ intervenant dans (30) est prouvée comme suit. Soit une matrice $(rX + \bar{r}\bar{X})$ antistable (i.e. toutes ses valeurs propres appartiennent au demi-plan droit). D'après la théorie de Lyapunov [4], $(rX + \bar{r}\bar{X})$ est antistable ssi il existe $P = P' \succ 0$ telle que :

$$(rX + \bar{r}\bar{X})'P + P(rX + \bar{r}\bar{X}) \succ 0. \quad (31)$$

Avec $P = \mathbf{1} \succ 0$, le terme de gauche de (31) devient :

$$(r + \bar{r})X + (r + \bar{r})\bar{X}. \quad (32)$$

Comme $(r + \bar{r})$ est un scalaire réel positif puisque $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$ et $0 < \nu < 1$, la définie positivité de (32) dépend seulement de celle de X . Comme dans le théorème 6, $X \succ 0$ (et donc $\bar{X} \succ 0$), (31) est vérifiée avec $P = \mathbf{1}$ et $(rX + \bar{r}\bar{X})$ est antistable. Comme $(rX + \bar{r}\bar{X})$ est antistable, elle ne peut avoir de valeur propre nulle. Elle est donc inversible.

Ce théorème de synthèse ainsi que le théorème d'analyse 5 sont les contributions principales de ce papier.

V. STABILISATION D'UN SYSTÈME INCERTAIN POLYTOPIQUE

Les résultats énoncés aux théorèmes 5 et 6 constituent les bases d'extensions aux systèmes non entiers de divers résultats à base LMI. Parmi ces extensions possibles, ce paragraphe propose un premier résultat dans le domaine de la commande robuste des systèmes non entiers MIMO, permettant de prendre en compte des systèmes non entiers polytopiques.

Soit le système polytopique non entier défini par :

$$\begin{pmatrix} D^\nu x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = M(\lambda) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (33)$$

où λ est un vecteur de paramètres incertains.

La matrice dépendante des paramètres $M(\lambda)$ appartient au polytope convexe \mathcal{M} avec N sommets défini par

$$\mathcal{M} = \left\{ M(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i M_i : \lambda \in \Lambda \right\} \quad (34)$$

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}. \quad (35)$$

Théorème 7 : Le système non entier polytopique (33) d'ordre $0 < \nu < 1$ est BIBO stabilisable de façon robuste par un retour de pseudo état de la forme $u = Kx$ s'il existe une matrice définie positive $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une matrice réelle $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que

$$(rX + \bar{r}\bar{X})'A'_i + A_i(rX + \bar{r}\bar{X}) + Y'B'_i + B_iY \prec 0 \quad (36)$$

où $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$. De plus, le gain du retour d'état est :

$$K = Y(rX + \bar{r}\bar{X})^{-1}. \quad (37)$$

Preuve 4 : La preuve de ce théorème est immédiate. On suppose que X et Y sont solutions de la LMI (36). Le calcul des combinaisons sur les N sommets permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^N (rX + \bar{r}\bar{X})'A'_i + A_i(rX + \bar{r}\bar{X}) + Y'B'_i + B_iY \prec 0. \quad (38)$$

Etant donné que $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, en remplaçant Y par $K(rX + \bar{r}\bar{X})$ d'après (37), cette dernière relation devient :

$$(rX + \bar{r}\bar{X})'A_{cl}(\lambda)' + A_{cl}(\lambda)(rX + \bar{r}\bar{X}) \prec 0 \quad (39)$$

avec $A_{cl}(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda)K$. D'après le théorème 5, le système en boucle fermée est stable de façon robuste.

Remarque 2 : Le conservatisme associé au théorème 7 est lié à l'utilisation d'une seule matrice X dans (39) pour prouver la stabilité du système bouclé. Ce problème n'est pas propre aux systèmes non entiers et reste un problème ouvert de la théorie de la commande robuste classique. Des conditions moins conservatives seront proposées dans les futurs travaux des auteurs.

VI. APPLICATION NUMÉRIQUE

A. Description du système

On considère un pendule inversé monté sur un chariot qui se déplace le long d'un axe (voir figure 3). La force $F(t)$ appliquée au chariot est la commande. La position du chariot $z(t)$ et l'angle du bras du pendule avec la verticale $\theta(t)$ sont les sorties du système.

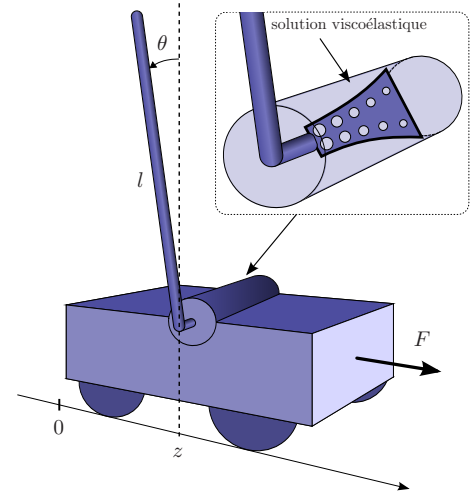


Fig. 3. Pendule inverse non entier

La différence avec les pendules inversés classiques réside dans la façon dont le bras est rattaché au chariot. Le bras entraîne en effet une palette en rotation dans une réserve rempli d'un liquide visco-élastique (voir les détails de cette construction sur la figure 3). La palette est conçue de façon à ce qu'un couple Γ de la forme

$$\Gamma = -k \frac{d^\nu \theta}{dt^\nu}, \quad (40)$$

soit appliqué sur le bras, expression dans laquelle ν est l'ordre de dérivation non entier qui caractérise cet amortisseur et où k désigne le coefficient d'amortissement. L'ordre de dérivation qui apparaît dans la relation (40) suggère une distribution récursive infinie des perforations de la palette de l'amortisseur. Dans le cadre d'une conception réaliste, l'ordre de dérivation sera supposé limité en fréquence et la fonction de transfert de l'amortisseur devient dans ce cas

$$T_{D^\nu} = \frac{s \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_h} \right)^\nu \right)}{1 + \left(\frac{s}{\omega_l} \right)^\nu}, \quad (41)$$

où ω_b et ω_h désignent les fréquences transitionnelles basse et haute qui caractérisent la bande de fréquence où apparaît le comportement non entier.

B. Equations du mouvement

En utilisant le formalisme de Lagrange par rapport aux variables z et θ et en exprimant l'équation sur le couple Γ dans le domaine temporel, les équations différentielles suivantes sont obtenues :

$$\ddot{z} = \frac{1}{m_c + m_p} \left(\frac{1}{2} m_p l \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) - f \dot{z} + F \right) \quad (42)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J + \frac{1}{4} m_p l^2} \left(\frac{1}{2} m_p l \left(\ddot{z} \cos \theta + g \sin \theta \right) + \Gamma \right) \quad (43)$$

$$\frac{d^\nu \Gamma}{dt^\nu} = -\omega_l^\nu \Gamma - k \omega_l^\nu \dot{\theta} - k \left(\frac{\omega_l}{\omega_h} \right)^\nu \frac{d^{\nu+1} \theta}{dt^{\nu+1}} \quad (44)$$

où m_c désigne la masse du chariot, m_p la masse du pendule et f le coefficient de frottement visqueux lié au chariot.

Les valeurs numériques des paramètres données dans la Table I sont issues de la documentation d'un pendule inversé du fabriquant AMIRA (Banc d'essai PS600 [8]).

Paramètre	Valeur	Unité
m_p	0.535	kg
m_c	3.2	kg
l	0.365	m
f	6.2	kg.s ⁻¹
J	0.062	kg.m ²
k	0.1	N.m.s ^{\nu} .rad ⁻¹
ω_l	0.1	rad.s ⁻¹
ω_h	10	rad.s ⁻¹
g	9.81	m.s ⁻²

TABLE I
VALEURS NUMÉRIQUES DES PARAMÈTRES

Pour cette application, l'ordre non entier ν est choisi égal à 0.5. Un choix possible de vecteur de pseudo état est donc :

$$x = \left(z \quad \frac{d^{0.5} z}{dt^{0.5}} \quad \frac{dz}{dt} \quad \frac{d^{1.5} z}{dt^{1.5}} \quad \theta \quad \frac{d^{0.5} \theta}{dt^{0.5}} \quad \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{d^{1.5} \theta}{dt^{1.5}} \quad \Gamma \right)'$$

Ainsi, les équations (42-44) peuvent s'écrire sous forme d'une pseudo-représentation d'état non entière non linéaire commensurable d'ordre 0.5 :

$$\frac{d^{0.5} x}{dt^{0.5}} = f(x, F). \quad (45)$$

Remarque 3 : La relation (45) apparaît souvent dans la littérature mais est mathématiquement rigoureuse seulement si les conditions initiales sont nulles (si le système est relaxé depuis $t = -\infty$). En fait, la relation (45) est un abus d'écriture par rapport à une relation plus physique :

$$w(t) = f \left(\frac{d^{-0.5} w}{dt^{-0.5}}, F \right). \quad (46)$$

Dans cet article, un tel abus d'écriture n'a aucune conséquence sur la validité des résultats.

Les équations (42-44) indiquent que le modèle (45) admet une infinité de points d'équilibres $x = x_{eq}^u = (z_{eq}^u \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)'$ qui correspondent à la position verticale haute du pendule ($\theta = 0$), à une position constante du chariot z_{eq}^u et une autre infinité de points d'équilibre à $x = x_{eq}^l = (z_{eq}^l \ 0 \ 0 \ 0 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)'$ qui correspondent à la position verticale basse du pendule ($\theta = \pi$).

Le modèle (45) a été implémenté sous MATLAB-SIMULINK[®]. L'opérateur de dérivation non entière est approximé par une fonction de transfert de degré 15 résultant d'une distribution récursive de pôles et de zéros [14].

C. Modèle linéarisé

La linearization autour de points d'équilibres définis par x_{eq}^u conduit à la pseudo représentation d'état suivante :

$$\frac{d^{0.5} x}{dt^{0.5}} = Ax + Bu, \quad (47)$$

où $A = \alpha [a_{ij}]$, $B = \alpha [b_{ij}]$, $\alpha = \frac{1}{4J(m_c + m_p) + m_c m_p l^2}$, $a_{12} = a_{23} = a_{34} = a_{56} = a_{67} = a_{78} = 1$, $a_{43} = -4fJ - fm_p l^2$, $a_{45} = m_p^2 l^2 g$, $a_{49} = 2m_p l$, $a_{83} = -2fm_p l$, $a_{85} = 2m_p g l(m_c + m_p)$, $a_{89} = 4(m_c + m_p)$, $a_{97} = -k\alpha\sqrt{\omega_l}$, $a_{98} = -k\alpha\sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_h}}$, $a_{99} = -\alpha\sqrt{\omega_l}$, $b_4 = J + m_p l^2$ et $b_8 = 2m_p l$. Les autres éléments sont nuls.

D. Synthèse d'un retour de pseudo état stabilisant

La méthodologie proposée au paragraphe IV-B est à présent appliquée pour calculer un retour de pseudo état stabilisant pour le modèle (47). Le théorème 6 est utilisé pour calculer le gain de correction K stabilisant. L'environnement YALMIP [10] et le solver LMI SDPT3 permettent de déterminer les matrices X et Y solutions du problème semi-défini associé à la condition LMI (29).

Le gain K est alors obtenu avec l'équation (30) :

$$K = [4.32 \ 6.02 \ 6.41 \ 11.95 \ \dots \\ -65.26 \ -26.74 \ -21.55 \ -8.56 \ -57.76].$$

La figure 4 présente les valeurs propres de la matrice d'état du système bouclé et met en évidence sa stabilité.

E. Validation sur le modèle non linéaire

Le retour de pseudo état de gain K est à présent appliqué au modèle non linéaire donné au paragraphe VI-B et implanté sous MATLAB-SIMULINK[®]. La figure 5 présente les réponses temporelles du système asservi pour la condition initiale $x_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10\pi/180 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)'$. Cette simulation confirme l'efficacité de la méthode.

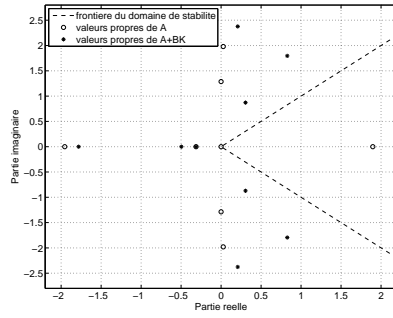


Fig. 4. Effets du régulateur sur les valeurs propres

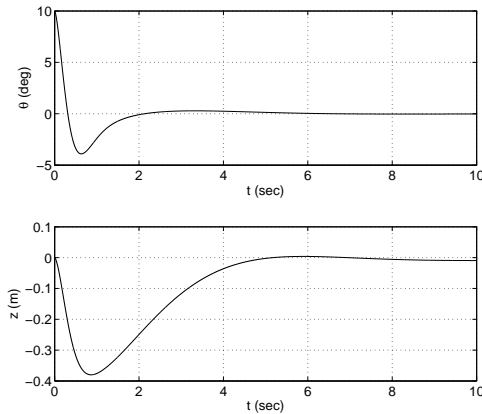


Fig. 5. Réponse temporelle du système en boucle fermée incluant le modèle non linéaire

F. Commande robuste

Dans les paragraphes précédents, les paramètres du modèle ont été supposés parfaitement connus. Le coefficient de frottement visqueux f et le facteur d'amortissement k sont maintenant soumis à une incertitude de $\pm 50\%$. Le résultat du théorème 7 est utilisé pour calculer un retour d'état stabilisant robuste de gain

$$K = \begin{bmatrix} 2.87 & 7.67 & 8.90 & 8.50 & \dots \\ -121.98 & -34.94 & -25.19 & -8.72 & -113.08 \end{bmatrix}$$

pour le modèle polytopique incertain à 4 sommets.

La figure 6 représente les valeurs propres de la matrice d'état du système en boucle fermée pour une grille de 400 points sur les valeurs des paramètres f et k . Cette figure confirme la stabilité robuste du système en boucle fermée.

VII. CONCLUSION ET FUTURS TRAVAUX

La principale contribution du papier est une nouvelle condition LMI nécessaire et suffisante pour la synthèse d'un retour de pseudo état stabilisant pour les systèmes non entiers commensurables. Cette condition découle d'une nouvelle condition LMI d'analyse en stabilité obtenue en utilisant le concept de régions LMI généralisées. Parmi l'ensemble des extensions aux systèmes non entiers que permet ce résultat, le problème de la stabilisation robuste d'un système non entier polytopique incertain est traité dans cet article. Une autre extension possible est la modification des régions du plan complexe pour le placement des pôles de

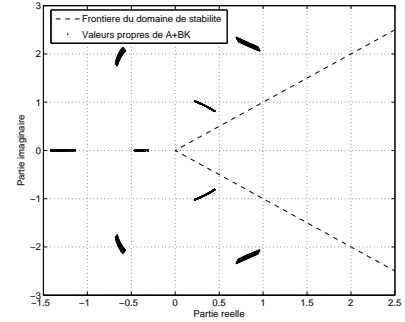


Fig. 6. Valeurs propres du système en boucle fermée pour différentes valeurs des paramètres

façon à tenir compte de spécifications sur la réponse temporelle du système en boucle fermée. Ce dernier point fait actuellement l'objet de recherches de la part des auteurs.

RÉFÉRENCES

- [1] O. Bachelier. *Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en D-stabilité*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, 1998.
- [2] O. Bachelier and B. Pradin. Bounds for uncertain matrix root-clustering in a union of subregions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9 :333–359, 1999.
- [3] J. Bernussou, J.C. Geromel, and P.L.D. Peres. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. 13 :65–72, July 1989.
- [4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [5] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] M. Caputo. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent - II. *Geophysical Journal International*, 13(5) :529–539, May 1967.
- [7] M. Chilali. *Méthodes LMI pour la synthèse multicritère*. PhD thesis, Université de Paris IX Dauphine, UFR Mathématiques de la Décision, 1996.
- [8] Gurski-Schramm & Partner. Laboratory experiment PS600 - inverted pendulum, 2004. URL : http://www.amira.de/ps600_ipendel_engl.html.
- [9] D.F. Lorenzo and T.T. Hartley. Initialization in fractional order systems. In *European Control Conference*, pages 1471–1476, Porto, Portugal, September 2001.
- [10] J. Löfberg. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [11] D. Matignon. Stability results on fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational Engineering in Systems Applications*, volume 2, pages 963–968, Lille, France, July 1996.
- [12] K.S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons, 1993.
- [13] M. Moze, J. Sabatier, and A. Oustaloup. LMI tools for stability analysis of fractional systems. In *20th ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Technical Conference (ASME IDETC/CIE'05)*, Long Beach, California, USA, September 2005.
- [14] A. Oustaloup. *La dérivation non entière : Théorie, synthèse et applications*. Hermès, Paris, 1995.
- [15] A. Oustaloup and B. Mathieu. *La commande CRONE : du scalaire au multivariable*. Hermès, Paris, 1999.
- [16] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges. On stability of fractional order systems. In *Third IFAC workshop on fractional differentiation and its applications FDA'08*, Ankara, Turkey, November 2008.
- [17] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.