

Commande de systèmes linéaires en présence de retard et saturation sur l'entrée

Vincent VAN ASSCHE¹, Fouad GIRI¹, Jean-Baptiste GNING¹, Fatima-Zahra CHAOUI²

¹ GREYC, UMR 6072 – Université de Caen

UFR Sciences – Campus 2

14032 Caen Cedex 05

{vincent.vanassche, fouad.giri, Jean-Baptiste.Gning}@greyc.ensicaen.fr

²ENSET, Rabat, Maroc

Résumé— Ce travail porte sur la commande des systèmes linéaires dont l'entrée fait l'objet d'un retard pur et d'une contrainte de type saturation. Le but étant de forcer la sortie du système à suivre une trajectoire de référence compatible avec la contrainte tout en préservant la stabilité en boucle fermée. A cet effet, un régulateur saturé est élaboré, dans le cadre de l'anneau des pseudo-polynômes, par la technique du placement de pôles. En utilisant des outils empruntés à l'approche de stabilité entrée/sortie, un voisinage des pôles en boucle ouverte est mis en évidence dans lequel doivent être assignés ceux de la boucle fermée afin que les objectifs de commande soient atteints.

Mots-clés— Système à retard, Contrainte sur l'entrée, Poursuite de trajectoire.

I. INTRODUCTION

La commande de systèmes sur la base de modèle linéaires se heurte souvent au problème de la saturation de l'actionneur. La négligence de la contrainte due à ce dernier peut en effet conduire à la dégradation des performances de commande, voire l'instabilité du système en boucle fermée. Ceci a suscité de très nombreux travaux au cours des deux dernières décennies. Cependant, la majeure partie de ces travaux furent consacrés à la stabilisation asymptotique (locale, globale ou semi-globale), voir liste bibliographique dans [8]. Les résultats concernant la poursuite de trajectoires de références sont relativement peu nombreux et se limitent pour l'essentiel aux références constantes par morceaux, voir par exemple [4], [11]. En l'absence de contraintes sur la commande, on sait que la poursuite parfaite de signaux de références quelconques est un objectif réalisable uniquement pour des systèmes à minimum de phase. Ce résultat demeure vrai en présence de contrainte de type saturation sur la commande à condition que les références soient compatibles avec la contrainte [7], [16].

Le problème de commande de systèmes linéaires contraints se complique considérablement en présence de retards dans le système. Ceci explique le peu de travaux disponibles à ce jour sachant que les résultats existants concernent essentiellement la stabilisation locale [6], [10] et [14]. Le présent travail contribue à l'effort de recherche dans ce domaine en mettant l'accent sur la poursuite de trajectoires de références. Le système commandé est représenté par un modèle linéaire de type entrée-sortie, à phase non nécessairement minimale, comprenant un retard en entrée et faisant l'objet d'une contrainte de type saturation portant sur l'amplitude de la commande. En plus de la stabilité en boucle fermée, l'objectif visé est la poursuite de

n'importe quel signal de référence compatible avec la nature non minimale de la phase du système et la contrainte imposée sur son entrée de commande. Il sera formellement démontré que cet objectif est atteignable à l'aide d'un régulateur linéaire saturé élaboré par la technique du placement de pôles. La synthèse du régulateur et l'analyse de ses performances sont menés dans le cadre de l'anneau des pseudo-polynômes [1], [2], [3], en utilisant des outils théoriques de stabilité entrée-sortie [15].

Le papier est organisé comme suit : le problème de commande considéré est formellement posé en section 2 ; la synthèse du régulateur et l'analyse de ses performances sont respectivement présentées en sections 3 et 4 ; les notions d'algèbre de l'anneau des pseudo-polynômes et anneaux associés utiles pour aborder ce travail sont rappelés en annexe.

II. POSITION DU PROBLÈME DE COMMANDE

A. Système à commander

Le système à commander est décrit par l'équation entrée/sortie suivante

$$\hat{y}(s) = \frac{B(s)e^{-s\tau}}{A(s)}\hat{u}(s) \quad (1)$$

où $A(s)$ et $B(s)$ sont des polynômes en s et où on note $\hat{x}(s)$ la transformée de Laplace d'un signal $x(t)$.

La description du système est complétée par les hypothèses suivantes :

$H1$: $sA(s)$ et $B(s)$ sont copremiers sur $\mathbb{R}[s]$ et donc $A(s)$ et $B(s)e^{-s\tau}$ sont copremiers sur \mathcal{E} .

$H2$: $A(s)$ est Hurwitz.

$H3$: $\deg(A(s)) = n$, donc $\deg_s(A(s)) = n$ sur \mathcal{E} .

$H4$: $\deg(B(s)) < n$, donc $\deg_s(B(s)e^{-s\tau}) < n$ sur \mathcal{E} .

$H5$: $A(s)$ est unitaire sur $\mathbb{R}[s]$ et donc sur \mathcal{E} .

B. Objectif de la commande

La commande développée par la suite vise à poursuivre une trajectoire prédéterminée $y^*(t)$. On note

$$e_y(t) = y(t) - y^*(t) \quad (2)$$

l'erreur entre la sortie du système et la trajectoire voulue. On veut que le régulateur assure

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0 \text{ avec } |u(t)| \leq u_M.$$

Pour que la poursuite soit possible on impose que la variation de la trajectoire de référence vérifie

$$\frac{dy^*(t)}{dt} \in \mathcal{L}_2$$

où \mathcal{L}_2 désigne l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty.$$

De plus, la trajectoire de référence doit être compatible avec la contrainte au sens de la définition suivante.

Définition 1 : y^* est compatible avec la contrainte si

$$\exists t_M / \forall t \geq t_M : |u^*(t)| \leq u_M, \quad (3)$$

où $u^*(t)$ est le signal tel que

$$\begin{aligned} \forall t < -\tau, \forall i \leq \deg(B(s)) \quad u^{*(i)}(t) &= 0 \\ \forall t \geq -\tau \quad u^*(t) &= \frac{A(\frac{d}{dt})}{B(\frac{d}{dt})} y^*(t + \tau). \end{aligned}$$

Comme $y^*(t)$ est entièrement prédéterminée, il n'y a pas de problème de causalité lorsque l'on définit $u^*(t)$ en fonction de $y^*(t + \tau)$. La définition de $u^*(t)$ implique

$$\hat{y}^*(s) = \frac{B(s)e^{-s\tau}}{A(s)} \hat{u}^*(s). \quad (4)$$

III. SYNTHÈSE DU RÉGULATEUR

La démarche de synthèse du régulateur en prenant en compte le retard est basée sur la méthode de n-assignation (finite spectrum assignment) développée dans [3] à partir des travaux de [13] et [9].

Soient $C(s)$ et $\Lambda(s)$, deux polynômes de Hurwitz et unitaires tels que $\deg(C(s)) = \deg(\Lambda(s)) = n$. Comme $sA(s)$ et $B(s)e^{-s\tau}$ sont copremiers sur \mathcal{E} , l'équation de Bézout (32) assure qu'il existe deux pseudo-polynômes $R_1(s)$ et $S_1(s)$ tels que

$$R_1(s)sA(s) + S_1(s)B(s)e^{-s\tau} = C(s)\Lambda(s).$$

Ces deux pseudo-polynômes ne sont pas uniques et sont, a priori, de degrés quelconques. Comme $sA(s)$ est unitaire, on peut diviser $S_1(s)$ par $sA(s)$ (voir propriété 6)

$$S_1(s) = Q(s)sA(s) + S(s)$$

avec $\deg_s(S(s)) \leq n$. Avec $R(s) = R_1(s) + Q(s)B(s)e^{-s\tau}$, on obtient

$$R(s)sA(s) + S(s)B(s)e^{-s\tau} = C(s)\Lambda(s). \quad (5)$$

Comme $\deg_s(S(s)B(s)e^{-s\tau}) \leq 2n - 1$, on a

$$\deg_s(R(s)sA(s)) = \deg_s(C(s)\Lambda(s)) = 2n$$

et donc $\deg_s(R(s)) = n - 1$. Comme $sA(s)$ et $C(s)\Lambda(s)$ sont unitaires, $R(s)$ est unitaire.

On peut décomposer $R(s)$ et $S(s)$ de manière unique (voir le point 3 de la propriété 5 de l'annexe) :

$$R(s) = s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} R_i(e^{-s\tau})s^i + R_{-1}(s)$$

$$S(s) = \sum_{i=0}^n S_i(e^{-s\tau})s^i + S_{-1}(s)$$

où $R_{-1}(s) \in \mathcal{G}$, $S_{-1}(s) \in \mathcal{G}$ et, pour tout $i \geq 0$, $R_i(e^{-s\tau}) \in \mathbb{R}[e^{-s\tau}]$ et $S_i(e^{-s\tau}) \in \mathbb{R}[e^{-s\tau}]$.

Pour prendre en compte la contrainte dans la loi de commande, on utilise la fonction sat définie par

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= u(t) & \text{si } |u(t)| &\leq u_M \\ \text{sat}(u(t)) &= \text{sgn}(u(t))u_M & \text{si } |u(t)| &\geq u_M \end{aligned}$$

Avec les notations utilisées jusque là, la loi de commande contrainte est définie comme suit :

$$\begin{cases} \hat{v}(s) &= \left(\frac{\Lambda(s) - sR(s)}{\Lambda(s)} \right) \hat{u}(s) - \frac{S(s)}{\Lambda(s)} \hat{e}_y(s) \\ u(t) &= \text{sat}(v(t)) \end{cases} \quad (6)$$

Remarque : par la suite, pour alléger les notations, on ne fera plus apparaître explicitement la dépendance en s des éléments de \mathcal{E} et le symbole « $\hat{\cdot}$ » des transformées de Laplace des signaux quand il n'y a pas d'ambiguïté : selon le contexte, une lettre minuscule x désigne le signal $x(t)$ ou sa transformée de Laplace $\hat{x}(s)$; un pseudo-polynôme $P(s)$ sera noté P . Par exemple, le système (6) s'écrira

$$\begin{cases} v &= \left(\frac{\Lambda - sR}{\Lambda} \right) u - \frac{S}{\Lambda} e_y \\ u &= \text{sat}(v) \end{cases}$$

De façon similaire, sx pourra désigner, selon le contexte, $s\hat{x}(s)$ ou $\frac{dx(t)}{dt}$.

IV. ANALYSE DU SYSTÈME DE COMMANDE EN BOUCLE FERMÉE

A. Écriture de la commande sous forme d'un feedback

Les performances de la commande définie précédemment vont maintenant être analysées.

D'après (1) et (2), on a

$$e_y = \frac{e^{-s\tau}B}{A}u - y^* \quad (7)$$

et d'après (6), on a

$$\Lambda v = (\Lambda - sR)u - S e_y. \quad (8)$$

En utilisant (7) dans (8), on obtient

$$\Lambda v = (\Lambda - sR)u - \frac{S B e^{-s\tau}}{A}u + y^*$$

soit

$$\Lambda \Lambda v = \Lambda \Lambda u - s R \Lambda u - e^{-s\tau} S B u + S \Lambda y^*$$

qui, avec (5), devient

$$\Lambda \Lambda v = \Lambda \Lambda u - C \Lambda u + S \Lambda y^*$$

et donc

$$v = \left(\frac{A - C}{A} \right) u + \frac{S}{\Lambda} y^* \quad (9)$$

$$s v = \left(\frac{A - C}{A} \right) s u + \delta_1 \quad (10)$$

où $\delta_1 = \frac{S}{\Lambda} s y^*$.

Proposition 1 : Si $\text{Re} \left(\frac{C(j\omega)}{A(j\omega)} \right) > 0$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}^+$, alors $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{de_y}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ appartiennent à \mathcal{L}_2 .

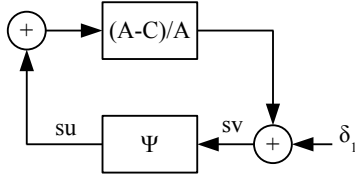


Fig. 1. Interprétation de l'équation (10) sous forme de feedback

Preuve :

L'équation (10) est représentée sous la forme d'un système avec feedback sur la figure 2 où Ψ est l'opérateur non linéaire

$$\Psi : sv \rightarrow su.$$

Il peut être rapidement vérifié que l'opérateur Ψ appartient au secteur du plan délimité par les droites passant par l'origine et de pentes 0 et 1, voir [5]. Comme A est de Hurwitz, il vient en appliquant le critère du cercle que le feedback de la figure 2 est \mathcal{L}_2 stable si

$$\operatorname{Re} \left(\frac{C(j\omega) - A(j\omega)}{A(j\omega)} \right) > -1.$$

De plus, Λ est de Hurwitz et $\frac{dy^*}{dt} \in \mathcal{L}_2$, donc $\delta_1(t) \in \mathcal{L}_2$. Par conséquent, tous les signaux internes de la boucle de la figure 1 appartiennent à \mathcal{L}_2 . Il en découle en particulier que $\frac{du}{dt} \in \mathcal{L}_2$ et $\frac{dv}{dt} \in \mathcal{L}_2$.

Comme A est de Hurwitz, en multipliant (7) par s , on prouve que $\frac{de_y}{dt} \in \mathcal{L}_2$.

Comme $\frac{dy}{dt} = \frac{de_y}{dt} + \frac{dy^*}{dt}$, on a aussi $\frac{dy}{dt} \in \mathcal{L}_2$. ■

B. Écart entre les commandes calculées et appliquées

Proposition 2 : $v - u \in \mathcal{L}_2$

Pour démontrer ce résultat, on aura besoin de la notation suivante : pour tout pseudopolynôme $P(s)$, on note $p_0 = P(0)$

$$p_0 = P(0) \in \mathbb{R}$$

et on peut vérifier que

$$\frac{P(s) - p_0}{s} \in \mathcal{E}.$$

Preuve :

D'après (8), on a

$$\begin{aligned} v &= u - \frac{sR}{\Lambda}u - \frac{S}{\Lambda}e_y \\ v &= u - \frac{sR}{\Lambda}u - \frac{S}{\Lambda} \frac{Be^{-s\tau}}{A}(u - u^*) \\ &= u - \frac{s_0Be^{-s\tau}}{\Lambda A}u + \frac{s_0Be^{-s\tau}}{\Lambda A}u^* + \delta_2 \\ &= u - \frac{s_0b_0}{\lambda_0a_0}u + \frac{s_0b_0}{\lambda_0a_0}u^* + \delta_2 + \delta_4 \end{aligned} \quad (11)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_2 &= -\frac{R}{\Lambda}su - \frac{S - s_0}{s\Lambda}se_y \\ \delta_4 &= -\left(\frac{s_0Be^{-s\tau}}{\Lambda A} - \frac{s_0b_0}{\lambda_0a_0} \right) (u^* - u) \end{aligned}$$

Cas de δ_2 :

$\frac{R}{\Lambda}$ est strictement propre et stable et $su \in \mathcal{L}_2$, donc

$$\frac{R}{\Lambda}su \in \mathcal{L}_2. \quad (12)$$

$\frac{S-s_0}{s}$ est un pseudopolynôme de degré $\deg_s(S) - 1 = n - 1$, donc $\frac{S-s_0}{s\Lambda}$ est strictement propre et stable. Comme, de plus, $se_y \in \mathcal{L}_2$, on a

$$\frac{S - s_0}{s\Lambda}se_y \in \mathcal{L}_2. \quad (13)$$

Avec (12) et (13), on a bien

$$\delta_2 \in \mathcal{L}_2. \quad (14)$$

Cas de δ_4 :

On note

$$\delta_4 = \Phi(su - su^*) \quad (15)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{s} \left(\frac{s_0Be^{-s\tau}}{\Lambda A} - \frac{s_0b_0}{\lambda_0a_0} \right) \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{s_0B\lambda_0a_0e^{-s\tau} - s_0b_0\Lambda A}{\lambda_0a_0\Lambda A} \right) \\ &= \Phi_1 + \frac{s_0b_0}{\Lambda A} \left(\frac{e^{-s\tau} - 1}{s} \right) \\ \Phi_1 &= \frac{\lambda_0a_0s_0e^{-s\tau} \sum_{i=1}^{n-1} b_i s^{i-1} - s_0b_0 \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i s^{i-1}}{\lambda_0a_0\Lambda A} \\ \alpha_i &= \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(i, n)} \lambda_j a_{i-j}. \end{aligned}$$

$\left(\frac{e^{-s\tau} - 1}{s} \right)$ est la fonction de transfert de l'opérateur H défini par

$$H : x(t) \mapsto (Hx)(t) = \int_{\tau}^0 x(t - \theta) d\theta$$

L'opérateur H est asymptotiquement stable donc \mathcal{L}_2 -stable. Par conséquent, comme $su \in \mathcal{L}_2$, $su^* \in \mathcal{L}_2$ et $\frac{s_0b_0}{\Lambda A}$ est propre et stable, on a

$$\frac{s_0b_0}{\Lambda A} \left(\frac{e^{-s\tau} - 1}{s} \right) (su - su^*) \in \mathcal{L}_2, \quad (16)$$

(théorème 30, section 6.4.1 de [15]).

Comme $su \in \mathcal{L}_2$, $su^* \in \mathcal{L}_2$ et Φ_1 est propre et stable,

$$\Phi_1(su - su^*) \in \mathcal{L}_2. \quad (17)$$

Avec (16) et (17), il découle de (15) que

$$\delta_4 \in \mathcal{L}_2. \quad (18)$$

Pour finir la démonstration, il suffit de prouver que pour $t > t_M$, $|v(t) - u(t)| \leq |\delta_5(t)|$ où $\delta_5 = \delta_2(t) + \delta_4(t) \in \mathcal{L}_2$. Or, d'après (5), $s_0b_0 = c_0\lambda_0$ et donc, avec (11),

$$v(t) - u(t) = \frac{c_0}{a_0} (u^*(t) - u(t)) + \delta_5(t) \quad (19)$$

Comme A et C sont des polynômes de Hurwitz, a_0 et c_0 sont des réels positifs (du fait du critère de Routh). On distingue trois cas en fonction de la position de $v(t)$ par rapport à l'intervalle $[-u_M, u_M]$.

1^{er} cas : $v(t) < -u_M$. On a $u(t) = -u_M$ et, d'après (3), pour t suffisamment grand, $u^*(t) > u(t)$. Il vient alors de (19) que $0 > v(t) - u(t) > \delta_5$. Par conséquent, on a bien, pour $t > t_M$,

$$|v(t) - u(t)| \leq |\delta_5(t)|. \quad (20)$$

2^e cas : $v(t) > u_M > 0$. On a $u(t) = u_M$ et, d'après (3), pour t suffisamment grand, $u^*(t) < u(t)$ donc $0 < v(t) - u(t) < \delta_5$. Par conséquent, on a bien, pour $t > t_M$,

$$|v(t) - u(t)| \leq |\delta_5(t)|. \quad (21)$$

3^e cas : $-u_M < v(t) < u_M$. On a $u(t) = v(t)$ et donc

$$|v(t) - u(t)| = 0 \leq |\delta_5|. \quad (22)$$

Les équations (20), (21) et (22) impliquent

$$\forall t > t_M, |v(t) - u(t)| \leq |\delta_5|. \quad (23)$$

Comme $\delta_5 \in \mathcal{L}_2$, on a démontré que

$$(v(t) - u(t)) \in \mathcal{L}_2. \quad \blacksquare$$

C. Convergence de l'erreur de poursuite

Proposition 3 : Si les signaux $(u - v)$ et $\frac{dy^*}{dt}$ appartiennent à \mathcal{L}_2 , alors $e_y \in \mathcal{L}_2$.

Preuve :

En appliquant RA s aux deux membres de l'équation (2), on obtient

$$\begin{aligned} RAse_y &= RAsy - RAsy^* \\ &= RBe^{-s\tau}su - RAsy^*. \end{aligned} \quad (24)$$

En appliquant $\Lambda Be^{-s\tau}$ aux deux membres de l'équation (6), on obtient

$$\Lambda Be^{-s\tau}v = \Lambda Be^{-s\tau}u - RBe^{-s\tau}su - SBe^{-s\tau}e_y \quad (25)$$

En additionnant (24) et (25), on obtient

$$RAse_y + \Lambda Be^{-s\tau}v = -RAsy^* + \Lambda Be^{-s\tau}u - SBe^{-s\tau}e_y.$$

En utilisant (5), cette équation devient

$$e_y = \frac{Be^{-s\tau}}{C}(u - v) - \frac{RA}{\Lambda C}sy^*. \quad (26)$$

D'après les hypothèses de la proposition, comme $\frac{Be^{-s\tau}}{C}$ et $\frac{RA}{\Lambda C}$ sont propres et stables, alors $e_y \in \mathcal{L}_2$. \blacksquare

Théorème 1 : Soit un système de la forme (1) commandé par une loi de la forme (6). Si les conditions suivantes sont respectées :

1. y^* est compatible avec la contrainte (voir définition 1) ;
2. $\frac{dy^*}{dt} \in \mathcal{L}_2$;
3. $\text{Re} \left(\frac{C(j\omega)}{A(j\omega)} \right) > 0$,

alors $e_y(t)$ et $(v(t) - u(t))$ tendent asymptotiquement vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Preuve :

Principe de la démonstration : d'après les propositions 2 et 3, si les conditions du théorème sont remplies, alors $(v - u) \in \mathcal{L}_2$ et $e_y \in \mathcal{L}_2$. Pour prouver le théorème, il suffit donc de prouver que ces deux signaux sont continus et d'appliquer le lemme de Barbalat.

Cas de $(v - u)$:

D'après (9),

$$\begin{aligned} v &= -\frac{C - A}{A}u + \frac{S}{\Lambda}y^* \\ &= -G \text{sat}(v) + \frac{S}{\Lambda}y^* \end{aligned} \quad (27)$$

où $G = \frac{C - A}{A}$. G est une fonction de transfert strictement propre et donc réalisable sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} &= FX - Hu \\ y_g &= TX \end{cases} \quad (28)$$

où F , H et T sont des matrices réelles de dimensions appropriées et $y_g = Gu$. Au vu de (28), (27) implique

$$v = y_g + z \quad (29)$$

où $z = \frac{S}{\Lambda}y^*$.

De (27), (28) et (29), il découle

$$\dot{X} = FX - H \text{sat}(TX + z) \stackrel{\text{def}}{=} g(X, z). \quad (30)$$

Notons que $g(X, z)$ est lipschitzienne (puisque la fonction sat l'est) et z est continue par morceaux puisqu'il en est ainsi de y^* . Donc, par le théorème de l'existence (voir par exemple [15]), pour des conditions initiales données, l'équation différentielle (30) a une solution $X(t)$ unique. De plus, cette solution est continue et sa dérivée est continue. Par conséquent, il découle de (29) que v est continue et donc que $v - u = v - \text{sat}(v)$ est continue. De plus, d'après la proposition 2, $v - u \in \mathcal{L}_2$, en appliquant le lemme de Barbalat, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v - u) = 0.$$

Cas de e_y :

On a montré que u est continue. Par conséquent, par (1), y est continue. Comme y^* est aussi continue, e_y est continue. Or, d'après la proposition 3, $e_y \in \mathcal{L}_2$, donc, par le lemme de Barbalat, e_y converge asymptotiquement vers 0 quant t tend vers l'infini. \blacksquare

Les deux premières conditions de ce théorème portent sur la trajectoire de référence et assure qu'elle puisse être suivie. La troisième condition porte sur le régulateur. Elle implique que le polynôme C ne doit pas être choisi trop différent de A , le dénominateur de la fonction de transfert du système. Ces conditions assurent que le régulateur cesse de saturer après un régime transitoire d'une durée finie. Le système se comporte ensuite comme un système linéaire.

Il n'y a pas de condition sur le polynôme Λ en dehors du fait qu'il doit être de Hurwitz. Une fois le régime transitoire passé et que l'actionneur ne sature plus, les racines de Λ font l'objet d'une simplification pôles-zéros et n'influencent pas la fonction de transfert en boucle fermée. Ils s'apparentent ainsi aux pôles d'un observateur dans le cas d'une commande par retour d'état.

V. CONCLUSION

Ce travail a porté sur la commande de systèmes linéaires à retard en entrée et soumis à une contrainte de type saturation également affectant l'entrée. Un régulateur linéaire saturé a été élaboré dans le cadre des anneaux des pseudo-polynômes par la technique du placement de pôles. Il a été démontré que ce régulateur est capable de forcer la sortie du système à suivre parfaitement n'importe quel trajectoire de référence compatible avec la contrainte et telle que $\frac{dy^*(t)}{dt} \in \mathcal{L}_2$. À cet effet, les pôles du système en boucle fermée (qui coïncident avec les zéros du polynôme $C\Lambda$) doivent être assignés à des emplacements bien définis caractérisés par la condition $\operatorname{Re}\left(\frac{C(j\omega)}{A(j\omega)}\right) > 0$.

Ce travail concerne les systèmes avec un retard ponctuel, constant et connu sur l'entrée. Il sera intéressant d'étudier le cas de systèmes à retards plus généraux. Le formalisme utilisé ici est particulièrement bien adapté à l'étude des systèmes avec plusieurs retards, ponctuels ou distribués, dont les fonctions de transfert appartiennent à \mathcal{E}_1 .

Par ailleurs, on pourra étudier les conditions de disparition de l'erreur de poursuite pour des trajectoires de référence quelconques.

ANNEXE

SYSTÈMES À RETARDS PONCTUELS ET DISTRIBUÉS

On rappelle ici les définitions et propriétés issues de [1], [2], [3] et [12].

A. Polynômes-2D

La définition des opérateurs utilisés plus loin est basée sur l'algèbre des polynômes à deux variables ou polynômes-2D. On aura en particulier besoin de la définition du degré en une des variables d'un tel polynôme.

Soit $f(s, x) \in \mathbb{R}[s, x]$, un polynôme en deux variables s et x . Il peut s'écrire de manière unique

$$f(s, x) = \sum_{i=0}^n f_i(x) s^i \quad (31)$$

où $\forall i, f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ est un polynôme en x .

Définition 2 : Soit f un polynôme 2D tel que dans la décomposition (31) on ait $f_n(x) \neq 0^1$. On dit que $f(s)$ est degré n en s et on note

$$\deg_s(f(s, x)) = n.$$

On peut remarquer que le degré d'un polynôme de $\mathbb{R}[s]$ est égal à son degré en s lorsqu'il est considéré comme un polynôme de $\mathbb{R}[s, x]$. Le degré en une variable partage les mêmes propriétés par rapport à l'addition et à la multiplication que le degré classique :

Propriété 1 : soient $f \in \mathbb{R}[s, x]$ et $g \in \mathbb{R}[s, x]$, on a

1. $\deg_s(fg) = \deg_s(f) + \deg_s(g)$;
2. $\deg_s(f + g) \leq \max(\deg_s(f), \deg_s(g))$;

1. dans le sens « $f_n(x)$ n'est pas la fonction nulle », $f_n(x)$ peut avoir des racines.

Dans les polynômes-2D que nous utiliserons par la suite, la première variable sera la variable de Laplace s et la seconde sera $e^{-s\tau}$, le transfert de l'opérateur retard ponctuel qui à $f(t)$ associe $f(t - \tau)$. Les deux variables sont liées ($e^{-s\tau}$ dépend de s) mais sont algébriquement indépendantes entre elles : il n'existe pas de polynôme-2D $P(s, e^{-s\tau})$ tel que $\forall s \in \mathbb{C} P(s, e^{-s\tau}) = 0$ en dehors du polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

B. Pseudo-polynômes

Définition 3 : \mathcal{G} est l'ensemble des fonctions entières du plan complexe de la forme $\frac{n(s, e^{-s\tau})}{d(s)}$ avec $n(s, e^{-s\tau}) \in \mathbb{R}[s, e^{-s\tau}]$, $d(s) \in \mathbb{R}[s]$ et $\deg_s(n(s, e^{-s\tau})) < \deg_s(d(s))$.

Le fait que f soit une fonction entière implique qu'elle est définie sur tout le plan complexe et par conséquent que toutes les racines de $d(s)$ sont aussi des racines de $n(s, e^{-s\tau})$ avec au moins la même multiplicité.

Propriété 2 : Les éléments de \mathcal{G} sont les fonctions de transferts d'opérateurs retards distribués de la forme

$$G : x(t) \mapsto (Gx)(t) = \int_{p\tau}^{q\tau} g(\theta)x(t - \theta)d\theta, \quad p, q \in \mathbb{N}$$

Définition 4 : $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}[e^{-s\tau}] + \mathcal{G}$, l'anneau engendré par l'union de l'anneau des polynômes en $e^{-s\tau}$ à coefficients réels et \mathcal{G} .

Propriété 3 : \mathcal{E}_1 est l'ensemble des fonctions entières du plan complexe de la forme $\frac{n(s, e^{-s\tau})}{d(s)}$ avec $n(s, e^{-s\tau}) \in \mathbb{R}[s, e^{-s\tau}]$, $d(s) \in \mathbb{R}[s]$ et $\deg_s(n(s, e^{-s\tau})) \leq \deg_s(d(s))$.

Les éléments de \mathcal{E}_1 sont les fonctions de transfert d'opérateurs de la forme

$$H(x(t)) = \sum_{i=0}^m x(t - i\tau) + \int_{p\tau}^{q\tau} g(\theta)x(t - \theta)d\theta,$$

$$i, p, q \in \mathbb{N}$$

Les éléments de \mathcal{G} sont les éléments de \mathcal{E}_1 tels que le degré en s de $n(s, e^{-s\tau})$ est *strictement* inférieur au degré de $d(s)$.

\mathcal{E}_1 est l'ensemble des fonctions de transfert des opérateurs retards distribués et ponctuels utilisés par la suite.

Définition 5 : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1[s]$, l'anneau des polynômes en s à coefficients sur \mathcal{E}_1 . Les éléments de \mathcal{E} sont appelés pseudo-polynômes.

Dans la suite, les pseudopolynômes joueront le même rôle que les polynômes en s dans le cas sans retard. En particulier les fonctions de transfert des systèmes et régulateurs étudiés pourront s'écrire sous la forme de fraction de deux pseudopolynômes.

Propriété 4 : \mathcal{E}_1 est l'ensemble des fonctions entières du plan complexe de la forme $\frac{n(s, e^{-s\tau})}{d(s)}$ avec $n(s, e^{-s\tau}) \in \mathbb{R}[s, e^{-s\tau}]$ et $d(s) \in \mathbb{R}[s]$.

Définition 6 : Avec les notations de la propriété 4, on définit un degré sur \mathcal{E} :

$$\deg_s(f(s)) = \deg_s(n(s, e^{-s\tau})) - \deg_s(d(s))$$

Propriété 5 : Soient $f(s) \in \mathcal{E}$ et $g(s) \in \mathcal{E}$, on a

1. $\deg_s(f(s)g(s)) = \deg_s(f(s)) + \deg_s(g(s))$;
2. $\deg_s(f(s) + g(s)) \leq \max\{\deg_s(f(s)), \deg_s(g(s))\}$;
3. Tout élément $f(s)$ de \mathcal{E} peut se décomposer de manière unique sous la forme :

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\deg_s(f(s))} f_i(e^{-s\tau})s^i + g(s)$$

où

$$\forall i, f_i(e^{-s\tau}) \in \mathbb{R}[e^{-s\tau}] \text{ et } g(s) \in \mathcal{G}.$$

4. $f(s) \in \mathcal{G} \Leftrightarrow f(s) \in \mathcal{E}$ et $\deg_s(f(s)) < 0$
5. $f(s) \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow f(s) \in \mathcal{E}$ et $\deg_s(f(s)) \leq 0$

Définition 7 : Avec les notations du point 3 de la propriété 5 : un élément $f(s)$ de degré n de \mathcal{E} est unitaire ssi $f_n(e^{-s\tau})$ est constant égal à 1.

Propriété 6 : 1. **PGCD** : deux éléments de \mathcal{E} ont un pgcd (unique à une multiplication par un réel près). Deux éléments de \mathcal{E} sont copremiers entre eux si leur pgcd est inversible sur \mathcal{E} , c.-à-d. si tous leurs diviseurs communs sont des réels.

2. \mathcal{E} est un anneau de Bézout, c.-à-d. que tout idéal engendré par un nombre fini d'éléments de \mathcal{E} est principal (engendré par le PGCD de ses éléments).

3. **Équation de Bézout** : soient $f(s)$ et $g(s)$ deux éléments de \mathcal{E} , il existe $x(s)$ et $y(s)$ éléments de \mathcal{E} tels que

$$x(s)f(s) + y(s)g(s) = \text{pgcd}(f(s), g(s)). \quad (32)$$

4. **Division euclidienne** : soient $f(s) \in \mathcal{E}$ et $g(s) \in \mathcal{E}$ avec $g(s)$ unitaire, il existe $q(s) \in \mathcal{E}$ et $r(s) \in \mathcal{E}$ tels que

$$f(s) = q(s)g(s) + r(s), \text{ avec } \deg_s(r(s)) < \deg_s(g(s)). \quad (33)$$

Remarque : La thèse de D. BRETHÉ [1] donne les formules et algorithmes pour calculer les solutions $x(s)$ et $y(s)$ de l'équation de Bézout, les solutions $q(s)$ et $r(s)$ de la division euclidienne et l'opérateur correspondant à un élément de \mathcal{G} dans le domaine temporel (et réciproquement).

Propriété 7 : Une fraction $\frac{N(s)}{D(s)}$ d'éléments de \mathcal{E} est propre si $D(s)$ est unitaire et $\deg_s(D) \geq \deg_s(N)$.

Une fraction propre est réalisable par un système d'équations différentielle avec retards (Delay Differential Equation).

Remarque : Une fraction d'éléments de \mathcal{E} peut s'écrire sous la forme d'une fraction de polynômes-2D de $\mathbb{R}[s, e^{-s\tau}]$. La fraction est propre sur \mathcal{E} ssi le dénominateur écrit sur $\mathbb{R}[s, e^{-s\tau}]$ a la forme

$$D_{2D}(s, e^{-s\tau}) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} D_i(e^{-s\tau})s^i$$

où $\forall i, D_i(e^{-s\tau}) \in \mathbb{R}[e^{-s\tau}]$.

- [1] D. Brethé. *Contribution à l'étude de la stabilisation des systèmes linéaires à retards*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 1997.
- [2] D. Brethé and J. J. Loiseau. A result that could bear fruit for the control of delay-differential systems. *Proc. IEEE MSCA*, pages 168–172, 1996.
- [3] D. Brethé and J. J. Loiseau. Stabilization of time-delay systems. *JESA-API*, 31(6) :1025–1042, 1997.
- [4] F. Z. Chaoui, F. Giri, L. Dugard, J. M. Dion, and M. M'Saad. Adaptive tracking with saturating input and controller integral action. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 43 :1638–1643, 1998.
- [5] H. El Fadil, F. Giri, F. Z. Chaoui, and O. El Magueri. Accounting for input limitation in the control of buck power converters. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 56(6) :1260–1271, June 2009.
- [6] E. Fridman and M. Dambrine. Control under quantization, saturation and delay : An lmi approach. *Automatica*, 45 :2258–2264, 2009.
- [7] F. Giri, E. Chater, F. Z. Chaoui, and J.-B. Gning. Global output reference tracking results for input-constrained minimum phase systems. In *American Control Conference*, pages 1213–1218, St. Louis, Missouri, 2009.
- [8] A. H. Glattfelder and W. Schaufelberger. *Control Systems with Input and Output Constraints*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [9] E. W. Kamen, P. P. Khargonekar, and A. Tannenbaum. Proper stable bezout factorizations and feedback control of linear time-deay systems. *Int. Jour. Cont.*, 43 :837–857, 1986.
- [10] D. Liberzon. Quantization, time delays, and nonlinear stabilization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 51(7) :1190–1195, July 2006.
- [11] D. Limón, I. Alvarado, T. Alamo, and E. F. Camacho. MPC for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, 44(9) :2382–2387, September 2008.
- [12] J. J. Loiseau. Algebraic tools for the control and stabilization of time-delay systems. In *Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time-Delay Systems*, pages 235–249, 1998.
- [13] A. Z. Manitius and A. W. Olbrot. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-24(4) :541–553, 1979.
- [14] S. Tarbouriech and J. M. Gomes da Silva Jr. Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via lmi's. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 45(1) :105–111, January 2000.
- [15] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, 1993.
- [16] Y. S. Zhong. Globally stable adaptive system design for minimum phase siso plants with input saturation. *Automatica*, 41 :1539–1547, 2005.