

# Diagnostic prédictif sous contrainte temporelle

David GUCIK-DERIGNY<sup>1</sup>, Rachid OUTBIB<sup>1</sup>, Musthapha OULADSINE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes,

UMR CNRS 6168 – Université Aix-Marseille

Domaine universitaire de St Jérôme

13397 Marseille Cedex 20, France

*david.gucik@lsis.org, rachid.outbib@lsis.org, mustapha.ouladsine@lsis.org*

**Résumé**— Ce papier est dédié au diagnostic prédictif sous contrainte temporelle à base de modèle. La démarche est fondée sur la synthèse d'observateurs. La méthodologie proposée concerne les systèmes à échelle de temps multiple. L'objectif est d'identifier les paramètres du modèle du sous-système à dynamique lente dont la structure est assumée être connue, à partir de la connaissance des entrées et sorties du sous-système à dynamique rapide. Le but principal est l'estimation du temps de vie restant de ce système. La méthodologie est illustrée sur un système non-linéaire d'oscillateur mécanique à double potentiels magnétiques non stationnaires.

**Mots-clés**— Pronostic, diagnostic prédictif, observateurs à entrées inconnues.

## I. INTRODUCTION

### A. Diagnostic et pronostic

La surveillance des systèmes technologiques est devenue une préoccupation majeure dans le monde industriel. Ainsi ces trente dernières années, la communauté des automaticiens a développé des méthodologies de diagnostic afin de détecter et de localiser des éventuels défauts. Toutefois, ces méthodologies du diagnostic ne permettent pas d'anticiper de manière précoce l'apparition de ces défauts sur le système.

En l'espace d'une décennie, des méthodologies dites de pronostic ont été conçues pour estimer le temps de vie restant (TVR) de systèmes et d'anticiper l'apparition de défauts. Néanmoins, il convient de préciser qu'actuellement dans la littérature concernant le concept dit de pronostic, on ne dispose pas d'une définition universelle. Récemment, un état de l'art intéressant présentant les différentes approches pour ce nouveau concept a été proposé [7] et un état de l'art des définitions du pronostic est présenté dans [13]. D'une façon générale, les approches pour le pronostic sont trois types. Le premier type est fondé sur la connaissance et l'expérience (PBCE) [4], [6], [15], [17], le deuxième type se définit par le pronostic guidé par les données (PGD) [11], [12], [21], [22], [23]. Enfin le troisième type fonde le pronostic à base de modèle (PBM) [2], [3], [14], [18]. Cependant, peu de travaux de recherche ont été conduits sur le pronostic à base de modèle.

### B. Contribution et organisation du papier

Ce papier traite du problème du diagnostic prédictif. Plus précisément, on s'intéresse à la problématique de l'estimation du temps de vie restant sous une contrainte temporelle. Il convient de préciser que la contrainte de temps est introduite pour donner toute la pertinence à la

prédiction. Une prédiction tardive perd de son intérêt. Pour répondre au problème de la prédiction du temps de vie restant du système, une méthodologie s'appliquant sur des systèmes à échelles de temps multiples est proposée. L'objectif est d'identifier les paramètres du modèle du sous-système à dynamique lente dont la structure est assumée être connue, à partir de la connaissance des entrées et sorties du sous-système à dynamique rapide. La méthodologie est basée sur la synthèse d'observateurs à entrée inconnue à convergence en temps fini.

Le papier est organisé comme suit. La section II présente une définition mathématique du diagnostic prédictif sous contrainte temporelle. La section III introduit la méthodologie de diagnostic prédictif sous contrainte temporelle à base de modèle, basée sur la synthèse d'observateurs. La section IV illustre la pertinence de la méthodologie développée en III sur un oscillateur mécanique avec double potentiels magnétiques non stationnaires. La section V conclut le papier et présente des perspectives futures.

## II. DÉFINITION DU DIAGNOSTIC PRÉDICTIF SOUS CONTRAINTE TEMPORELLE ET MODÈLE DE RÉFÉRENCE ASSOCIÉ

### A. Définition

Le processus de l'estimation du temps de vie restant (TVR) peut-être décrit par la figure 1.

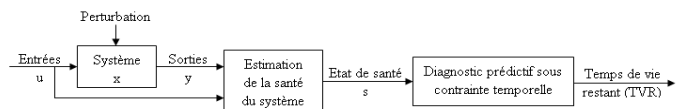


Fig. 1. Processus d'estimation du temps de vie restant

L'horizon de temps lié à l'analyse de l'état de santé du système décrit à la figure 1 peut-être subdivisé en deux sous-parties comme illustré à la figure 2. L'intervalle  $I_{cp} = [t_0, t_{cp}]$  est un intervalle de temps de contrainte de prédiction.  $t_{cp}$  représente le temps maximal à partir duquel une prédiction peut-être réalisée. Pour un temps de prédiction  $t_p \subset I_{cp}$ , une prédiction de l'état de santé est réalisée à partir de l'ensemble des observations du système sur l'intervalle  $I_p = [t_0, t_p]$ . Le temps de vie restant d'un système est défini comme étant  $t_{TVR} = t_d - t_p$ .

Un système est défini par un couple  $\{S, U\}$ . Soit  $S = S_N \cup S_D$  défini comme l'ensemble des états du système.

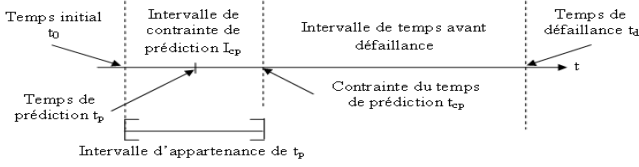


Fig. 2. Découpage temporel de l'état de santé du système pour le diagnostic prédictif sous contrainte temporelle

$S_N$  comme étant l'ensemble des états du système associé à un fonctionnement normal,  $S_D$  comme étant l'ensemble des états du système associé à un fonctionnement défaillant.  $U$  est un ensemble des commandes admissibles. Soit un intervalle  $I = [t_0, \infty[$  défini comme un horizon de temps.

Une prédiction de l'état de santé d'un système commandé est définie comme étant l'action d'annoncer à l'avance ( $t_p < t_d$ ) le temps de vie restant d'un système avant qu'une défaillance n'apparaisse sur ce dernier.

Définition : Etant donné  $U^0 \subset U$  et  $I_{cp} \subset I$ , le diagnostic prédictif sous la contrainte temporelle  $I_{cp}$  consiste à prédire le temps de vie restant  $t_{TVR}$  du système à partir du temps  $t_p \in I_{cp}$ .

Remarque 1 : Dans ce travail, on considère que le diagnostic prédictif est la capacité à prédire le temps de vie restant  $t_{TVR}$  du système sans contrainte temporelle fixée. Seule la contrainte  $t_p < t_d$  doit-être respectée afin de rester dans le cadre d'une prédiction.

Remarque 2 : Dans le cadre de la réalisation d'un diagnostic prédictif sous contrainte temporelle sur un système industriel, l'intervalle de prédiction  $I_{cp}$  peut-être fourni par exemple par un expert de la maintenance. En effet, la connaissance à priori de la durée de vie moyenne  $I_d = [0, \hat{t}_d]$  d'un système ( $\hat{t}_d$  définissant une estimation du temps moyen de défaillance) permet de fixer  $I_{cp}$  tel qu'un utilisateur réussisse, suite à une prédiction, à planifier et à réaliser au minimum l'action de maintenance, sans avoir à subir la défaillance.

### B. Modèle considéré

Dans ce travail, nous supposons que le comportement du système peut-être décrit (voir aussi [1], [2] et [18]) par le modèle à échelle de temps multiple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta(\phi), u), x(t_0) = x_0 \\ \dot{\phi} = \epsilon g(x, \phi), \phi(t_0) = \phi_0 \\ y = h(x, \phi, u) \end{cases} \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des états à dynamique rapide.  $\theta \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur des paramètres assumé être une fonction de  $\phi \in \mathbb{R}^k$ , l'ensemble des états à dynamique lente.  $u \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur d'entrées. Le ratio d'échelle de temps entre l'état du système à dynamique lente et l'état du système à dynamique rapide est défini par  $0 < \epsilon \ll 1$ .  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties.  $f, g, h$  sont des fonctions différentiables.

## III. DESCRIPTION DE LA MÉTHODOLOGIE

Cette méthodologie se décline en trois étapes. L'étape de la synthèse d'observateurs à entrée inconnue à convergence en temps fini afin de reconstruire l'état à dynamique rapide du système  $x$  en temps fini est introduite dans III-A. L'étape où l'état à dynamique lente ramené à une entrée inconnue du système est estimé, est présenté dans III-B. Enfin, l'étape où les paramètres du modèle du sous-système à dynamique lente sont identifiés et où le modèle comportemental estimé du système est utilisé pour réaliser une prédiction du temps de vie restant du système, est décrit dans III-C. La méthodologie proposée est résumée dans la figure 3.

### A. Synthèse d'observateur

Sous l'hypothèse de linéarité de la sortie, de son indépendance au regard de l'entrée et de la variable d'état à dynamique lente et en ne considérant que la dynamique de l'état du système (1), on obtient en développant  $f$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + B_0 u + \Delta(x, u, \phi) \\ y = C x \end{cases} \quad (2)$$

Hypothèse 1 : On suppose que le  $\Delta = D\Delta_1$  où  $D$  est une matrice vérifiant  $\text{rang}(D) = q \leq p$ .

Dans ce qui suit, nous allons synthétiser un observateur à entrée inconnue. En effet, nous considérons la partie  $\Delta$  comme étant inconnue. Notre démarche de synthèse est celle donnée par [16]. Ainsi la variable à dynamique lente et la non-linéarité du système à dynamique rapide sont regroupés dans une seule variable considérée comme inconnue.

Sous l'hypothèse 1, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + B_0 u + D\Delta_1(x, u, \phi) \\ y = C x \end{cases} \quad (3)$$

D'après l'hypothèse 1, il existe  $q$  vecteurs indépendants. Soit  $D_1 \in \mathcal{M}_{n,q}$  la matrice constituée de ces vecteurs. Dans la suite, on assume l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2 : La matrice  $CD_1$  est de rang plein colonne.

Soit  $N \in \mathcal{M}_{n,(n-q)}$  une matrice pouvant se construire grâce au théorème de de la base incomplète en prenant les vecteurs orthogonaux aux  $q$  vecteurs colonnes indépendants de la matrice  $D$ . On définit une matrice de transformation d'état non singulière  $T = [N \ D_1]$  telle que  $x = T\bar{x}$ .

Le système obtenu après l'application de la transformation  $T$  est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x} + \bar{B}_0 u + T^{-1} D\Delta_1(\bar{x}, u, \phi) \\ y = \bar{C} \bar{x} \end{cases} \quad (4)$$

Les matrices utilisées dans (4) sont définies par :

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= T^{-1} A_0 T = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_0 &= T^{-1} B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= C T \end{aligned}$$

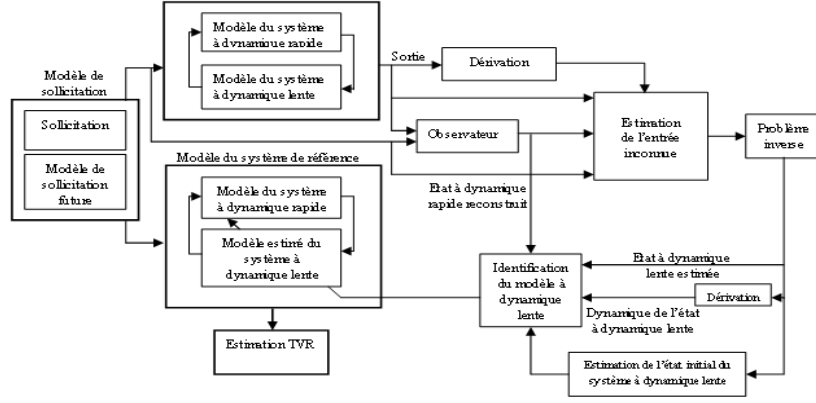


Fig. 3. Résumé de la méthodologie de diagnostic prédictif sous contrainte temporelle à base de modèle

Le vecteur d'état  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$  est décomposé en deux parties, une partie  $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-q}$  n'est pas affectée par l'influence de l'entrée inconnue  $\Delta_1$  et une autre partie  $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^q$  qui est affectée par l'influence de l'entrée inconnue  $\Delta_1$ .

Soit une matrice de transformation non singulière  $P^{-1}$  traitant les opérations sur les colonnes de  $D$  et  $\text{rang}(P) = n$  telle que :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x} + \bar{B}_0 u + T^{-1} D P^{-1} P \Delta_1(\bar{x}, u, \phi) \\ y = \bar{C} \bar{x} \end{cases} \quad (5)$$

Les matrices précédemment citées dans (5) sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= T^{-1} D P^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{n-q, n-q} & 0_{n-q, q} \\ 0_{q, n-q} & I_{q, q} \end{bmatrix} \\ \bar{D} v(\bar{x}, u, \phi) &= P \Delta_1(\bar{x}, u, \phi) \end{aligned}$$

Le système (5) s'écrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11} \bar{x}_1 + \bar{A}_{12} \bar{x}_2 + \bar{B}_1 u_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{21} \bar{x}_1 + \bar{A}_{22} \bar{x}_2 + \bar{B}_2 u_2 + v_q \\ y = \bar{C} \bar{x} \end{cases} \quad (6)$$

avec la commande  $u = [u_1 \quad u_2]^T$  de dimension appropriée et  $v_q = (P \Delta_1)_{q, q}(\bar{x}, u, \phi)$ .

Sous l'hypothèse 2, une transformation sur la sortie  $\bar{y} = [\bar{y}_1, \bar{y}_2] = U^{-1} y$  est réalisée avec les matrices définies par  $U = [C D_1 \quad Q]$ ,  $U^{-1} = [U_1 \quad U_2]^T$ ,  $Q \in \mathcal{M}_{p, (p-q)}$ ,  $U_1 \in \mathcal{M}_{q, p}$ ,  $U_2 \in \mathcal{M}_{p-q, p}$ .

Après l'application de la transformation de sortie, le résultat suivant est obtenu :

$$\bar{y}_1 = U_1 y = U_1 C N \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad (7)$$

$$\bar{y}_2 = U_2 y = U_2 C N \bar{x}_1 \quad (8)$$

D'après (7), on déduit :

$$\bar{x}_2 = U_1 y - U_1 C N \bar{x}_1 \quad (9)$$

En remplaçant (9) dans la première équation de (6), et en considérant l'expression de sortie (8), le système suivant est construit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \tilde{A}_1 \bar{x}_1(t) + \bar{B}_1 u(t) + E_1 y(t) \\ \bar{y}_2(t) = \tilde{C}_1 \bar{x}_1 \end{cases} \quad (10)$$

Les matrices décrites dans (10) sont définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} U_1 C N \\ E_1 &= \bar{A}_{12} U_1 \\ \tilde{C}_1 &= U_2 C N \end{aligned}$$

Si la paire  $(\tilde{A}_1, \tilde{C}_1)$  est détectable, un observateur d'ordre réduit peut-être conçu à partir d'une procédure conventionnelle de conception d'un observateur de Luenberger, afin de reconstruire une partie du vecteur d'état non affectée par l'influence de l'entrée inconnue.

Sous les conditions suivantes (se référer à [20])

$$\begin{aligned} \text{rang}(C D_1) &= \text{rang}(D) \\ \text{rang} \begin{bmatrix} s I_{n-q} - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ C N & C D_1 \end{bmatrix} &= n, \forall s \in C, \text{Re}(s) \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

l'observateur à entrée inconnue suivant existe :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) &= (\tilde{A}_1 - L \tilde{C}_1) \hat{x}_1(t) + \bar{B}_1 u(t) + (L U_2 + E_1) y(t) \\ \hat{x}(t) &= T \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ U_1 y(t) - U_1 C N \hat{x}_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Seule l'utilisation d'un observateur, dont les états estimés convergent asymptotiquement vers les états à dynamique rapide du système, a été réalisée pour (3). Dans le cadre du diagnostic prédictif sous contrainte temporelle, la contrainte sur l'intervalle de prédiction implique que l'estimation des états  $x$ ,  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$  doivent-être estimés précisément, à partir d'un temps  $t_0 + \tau$ .  $\tau$  est défini aussi petit que désiré par l'utilisateur. La prédiction du temps de vie restant du système sera ainsi plus précise. Pour cela un observateur à entrée inconnue à convergence en temps fini est utilisé.

Un observateur à entrée inconnue (12) à convergence en temps fini (se référer à [20]) pour le système (3) s'écrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= F z(t) + H y(t) + G u(t) \\ q(t) &= K K [z(t) - e^{F \tau} z(t - \tau)] \\ \hat{x} &= T \begin{bmatrix} q(t) \\ U_1 y(t) - U_1 C N q(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Les matrices de l'équation (13) sont définies par :

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0_{n-q,n-q} \\ 0_{n-q,n-q} & F_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} L_1 U_2 + E_1 \\ L_2 U_2 + E_1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix}, KK = [I_{n-q,n-q} \quad 0_{n-q,n-q}] [S \quad e^{F\tau} S]^{-1}$$

$$S = \begin{bmatrix} I_{n-q} \\ I_{n-q} \end{bmatrix}, F_i = \tilde{A}_1 - (L_i U_2 + E_1) \tilde{C}_1, i = 1, 2$$

$z$  décrit l'état courant de l'observateur,  $q$  est l'état estimé du système transformé (10). Pour  $H$  et  $\tau$  fixés, sous les conditions que  $F$  soit de Hurwitz et que  $\det([S \quad e^{F\tau} S]^{-1}) \neq 0$ , on obtient :

$$\forall t \geq t_0 + \tau, q(t) = \hat{x}_1(t), \hat{x}(t) = T \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

### B. Estimation de l'entrée inconnue, de l'état à dynamique lente et de sa dynamique

Après avoir reconstruit précisément l'état à dynamique rapide du système en un temps fini  $\tau$ , l'entrée inconnue est estimée en un temps fini  $\tau$  également par dérivation de (7). L'entrée inconnue est définie par :

$$\begin{aligned} v = & U_1 \dot{y} + (-U_1 C N \bar{A}_{11} + U_1 C N \bar{A}_{12} U_1 C N - \bar{A}_{21} \\ & + \bar{A}_{22} U_1 C N) q + (-U_1 C N \bar{B}_1 - \bar{B}_2) u \\ & + (-U_1 C N \bar{A}_{12} U_1 - \bar{A}_{22} U_1) y \end{aligned} \quad (14)$$

Remarque 3 : (14) possède une expression de dérivée de sortie. Calculer numériquement une estimation de la dérivée d'un signal bruité pose le problème de la précision du résultat obtenu suivant la technique utilisée. Le lecteur pourra se référer à [9], [19] dans lesquels une méthode proposée permet d'approximer avec précision la dérivée numérique d'un signal bruité. Le dérivateur proposé est basé sur un calcul d'intégrales à temps itéré (possédant les propriétés de filtre passe bas), atténuant ainsi l'effet du bruit sur l'estimation de la dérivée d'un signal bruité.

La relation entre l'état à dynamique lente et l'entrée inconnue basée sur (14) et (5) peut ainsi être établie.

$$\begin{aligned} \bar{D} \hat{v} &= P \Delta_1(\hat{x}, u, \hat{\phi}) \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 0_{n-q,n-q} & 0_{n-q,q} \\ 0_{q,n-q} & I_{q,q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{n-q} \\ \hat{v}_q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (P \Delta_1)_{n-q,n-q}(\hat{x}, u, \hat{\phi}) & (P \Delta_1)_{n-q,q}(\hat{x}, u, \hat{\phi}) \\ (P \Delta_1)_{q,n-q}(\hat{x}, u, \hat{\phi}) & (P \Delta_1)_{q,q}(\hat{x}, u, \hat{\phi}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Finalement, l'estimation du vecteur d'état à dynamique  $\phi$  de dimension  $q$  est obtenue en résolvant le problème inverse ci-dessous :

$$\hat{v}_q = (P \Delta_1)_{q,q}(\hat{x}, u, \hat{\phi}) \quad (16)$$

Le résultat suivant est déduit.

Proposition :  $\phi$  est solution de l'équation (16) où  $u$  est connu et  $\hat{x}, \hat{v}_q$  sont estimés.

### C. Identification des paramètres du modèle à dynamique lente du système

L'objectif de cette étape est d'identifier les paramètres du modèle du sous-système à dynamique lente dont la structure est assumée être connue. La structure suivante pour le modèle du sous-système à dynamique lente est définie par :

$$\dot{\hat{\phi}} = \sum_{j=1}^M P_j(\hat{x}) \hat{\phi}^j \quad (17)$$

$P_j(\hat{x})$  est l'expression polynomiale de  $\hat{x}$  et les conditions spécifiques sont décrites comme étant :

$$P_j(\hat{x}) = \sum_{\substack{p \\ k_1+k_2+\dots+k_n=N \\ k_1, k_2, \dots, k_n \leq N}} A_p \hat{x}_1^{k_1} \hat{x}_2^{k_2} \dots \hat{x}_n^{k_n} \text{ and}$$

telle que  $\hat{x} = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \dots \quad \hat{x}_n]^T$  et  $A_p$  soient des matrices de dimensions appropriées, composées de coefficients à identifier par résolution d'un problème d'optimisation.

Soit  $e$  l'erreur d'estimation définie par  $\|e\| = \|\hat{\phi} - \hat{\phi}\|$ . Un algorithme d'optimisation basé sur les moindres carrés permet de trouver une solution au problème d'optimisation  $\min(\|e\|^2) = \min(\|\hat{\phi} - \hat{\phi}\|^2)$  sous contraintes de minimisation de l'erreur quadratique.

Finalement, sur l'intervalle de prédiction considéré, un modèle estimé composé du sous-système à dynamique rapide et du sous-système à dynamique lente est obtenu. Ce modèle estimé est ensuite utilisé pour réaliser un diagnostic prédictif sous contrainte temporelle. La prédiction est réalisée sous hypothèse de la connaissance future de l'entrée  $u \subset U^0$ . Le modèle estimé est ainsi simulé jusqu'à défaillance et le temps de vie restant est ainsi déterminé.

## IV. APPLICATION SUR UN OSCILLATEUR MÉCANIQUE À DOUBLE POTENTIELS MAGNÉTIQUES NON STATIONNAIRES

L'objectif de cette partie est d'illustrer la méthodologie présentée en partie III sur un oscillateur mécanique à double potentiels magnétiques non stationnaires pour deux exemples de sollicitation. Les résultats de prédiction pour ces deux exemples de sollicitation seront présentés et comparés.

### A. Présentation du système

Le système (présenté en figure 4) est un oscillateur mécanique à double potentiels magnétiques non stationnaires. Il se décompose en un sous-système mécanique couplé à un sous-système électromagnétique. Suite à une décharge progressive de la tension à vide  $\phi$  de la batterie alimentant les électroaimants, la décroissance de la raideur du potentiel dans les électroaimants diminue les oscillations de l'oscillateur mécanique, et parallèlement le déplacement de la tige avec sa masse excite le sous-système électromagnétique.

### B. Modèle de comportement du système

Pour décrire le comportement du système. Le modèle basé sur les équations de l'oscillateur de Duffing à un degré

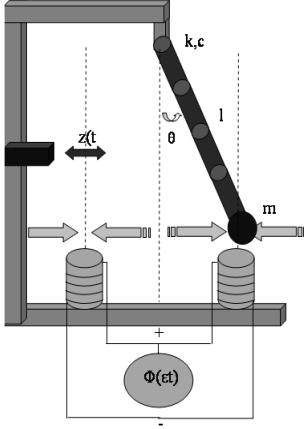


Fig. 4. Oscillateur mécanique à double potentiels magnétiques non stationnaires

de liberté de [5] sera utilisé.

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + (1 - \alpha_1)\theta + \alpha_3\theta^3 + \frac{K(\theta-\lambda)}{(1+K(\theta-\lambda)^2)^2}\psi^2 = u \\ \frac{1}{1+K(\theta-\lambda)^2}\dot{\psi} + \left[ \frac{2K(\lambda-\theta)\dot{\theta}}{(1+K(\theta-\lambda)^2)^2} + r \right] \psi = \phi \\ \dot{\phi} = -\epsilon\psi(1 + \gamma(\phi - \eta)^2) \end{cases} \quad (18)$$

Le système (18) peut-être réécrit en considérant le changement de variables  $(x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$  comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu\dot{x}_1 - (1 - \alpha_1)x_1 + u - \alpha_3x_1^3 - \frac{K(x_1-\lambda)}{(1+K(x_1-\lambda)^2)^2}\psi^2 \\ \dot{\psi} = (1 + K(x_1 - \lambda)^2) \left( \phi - \left[ \frac{2K(\lambda-x_1)x_2}{(1+K(x_1-\lambda)^2)^2} + r \right] \psi \right) \\ \dot{\phi} = -\epsilon\psi(1 + \gamma(\phi - \eta)^2) \end{cases} \quad (19)$$

L'espace des phases décrit par le vecteur d'état à dynamique rapide  $(\theta, \dot{\theta}, \psi) \in \mathbb{R}^3$ , décrivant respectivement l'angle de l'oscillateur mécanique, sa vitesse angulaire et le courant dans le circuit des électroaimants. Le vecteur d'état à dynamique lente  $\phi \in \mathbb{R}$  traduit l'évolution de la tension à vide de la batterie.  $u$  décrit la commande du système.

$\mu, \alpha_1, \alpha_3$ , le coefficient d'inductance variable  $K$ , le ratio d'échelle de temps de relâchement pour le sous-système électromagnétique  $r$  au regard de la période naturelle d'oscillation du sous-système mécanique, le ratio d'échelle de temps entre les systèmes à dynamique rapide et lente  $0 < \epsilon \ll 1, \gamma > 0$  et  $\eta > 0$  sont les constantes composants le modèle.

Analysons les points d'équilibre associés au sous système mécanique décrit par le vecteur d'état réduit  $(x_1, x_2)$ . On pose  $\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}_2 = 0, u = 0$  et on néglige le terme  $\frac{K(x_1-\lambda)}{(1+K(x_1-\lambda)^2)^2}\psi^2$  traduisant l'image de l'effet de la variable à dynamique lente sur le sous-système mécanique, il existe trois points d'équilibre  $(x_1^{e_i}, 0)_{i=1,2,3} = (x_1^{e_1} = 0$  ou  $x_1^{e_2} = \sqrt{\frac{(\alpha_1-1)}{\alpha_3}}$  ou  $x_1^{e_3} = -\sqrt{\frac{(\alpha_1-1)}{\alpha_3}}, 0)$ . Le point

d'équilibre  $(x_1^{e_1}, 0)$  est une selle (instable) et les points d'équilibre  $(x_1^{e_2}, 0), (x_1^{e_3}, 0)$  sont deux puits (stable).

Le modèle décrit par (19) décrit le comportement du système dans le cas où la tension de la batterie appartient à l'intervalle  $[\phi_N, \phi_{c_1}]$  où  $\phi_N$  est la tension nominale de la batterie à vide. Afin de décrire le comportement complet du système, une contribution de deux autres modèles seront présentés traduisant le comportement du système pour deux autres intervalles de fonctionnement. Un modèle 2 modélise le cas où la tension de la batterie appartient à l'intervalle  $[\phi_{c_2}, 0]$  lorsqu'un circuit de protection par exemple déconnecte la batterie alimentant les électroaimants avant une dégradation irrémédiable. Un modèle 3 de transition est proposé dans le cas où la tension de la batterie appartient à l'intervalle  $]\phi_{c_1}, \phi_{c_2}[$ . Détaillons ces deux modèles.

Le modèle 2 est une modification du modèle 1 du sous-système mécanique.

$$\dot{x}_2 = -\mu\dot{x}_1 + (1 - \alpha_1)x_1 + u - \alpha_3x_1^3 - \frac{K(x_1-\lambda)}{(1+K(x_1-\lambda)^2)^2}\psi^2 \quad (20)$$

Avec les mêmes hypothèses que le modèle 1, l'analyse des points d'équilibre du sous-système mécanique du modèle 2 révèle l'existence d'un point d'équilibre triple  $(x_1^{e_i}, 0)_{i=1,2,3} = (0, 0)$ .

Enfin un modèle 3 est une modification du modèle 1 du sous-système mécanique. On supposera que le paramètre  $-(1 - \alpha_1)$  évoluera de manière linéaire à la variable à dynamique lente  $\phi$  sur l'intervalle  $]\phi_{c_1}, \phi_{c_2}[$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\mu\dot{x}_1 + \left[ \left( \frac{-(1 - \alpha_1)}{\phi_{c_1}} \right) \left( 1 + \frac{\phi_{c_1} + \phi_{c_2}}{\phi_{c_1} - \phi_{c_2}} \right) \right] \phi \\ & + (1 - \alpha_1) \left( \frac{\phi_{c_1} + \phi_{c_2}}{\phi_{c_1} - \phi_{c_2}} \right) x_1 - \alpha_3x_1^3 + u \\ & - \frac{K(x_1 - \lambda)}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2}\psi^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Ce modèle 3 permet donc la jonction entre les deux modèles 1 et 2 de comportement du système au niveau de l'évolution de certains paramètres physiques.

Pour la simulation, les valeurs numériques affectées aux coefficients sont fixées à :  $\mu = 0.088, \alpha_1 = 2.6558, \alpha_3 = 0.8805, K = 0.07, \epsilon = 5.5 \cdot 10^{-3}, r = 8, \gamma = 1, \eta = 10.539$ .

### C. Identification de la dynamique du sous-système à dynamique lente

Dans cette sous-section, la méthodologie de diagnostic prédictif sous contrainte temporelle décrite en III sera appliquée sur l'oscillateur mécanique à double potentiels magnétiques non stationnaires. L'utilisation directe de la méthodologie décrite dans la partie III n'est pas envisageable pour l'ensemble du vecteur d'état  $(\theta, \dot{\theta}, \psi) \in \mathbb{R}^3$ . En effet, la troisième équation différentielle du système (19) décrivant le comportement dynamique de  $\psi$  n'appartient pas à la classe décrite par (3). Notre méthodologie sera appliquée sur le sous-ensemble du vecteur d'état  $(\theta, \dot{\theta})$ . L'expression de l'entrée inconnue (2) sur l'exemple d'applica-

tion prendra la forme suivante :

$$\Delta(x, u, \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_3 x_1^3 - \frac{K(x_1 - \lambda)}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)} \psi^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Pour cet exemple, la matrice d'observation est  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . La matrice de distribution  $D$  décrite dans (3) est directement sous la forme escomptée  $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  donc  $\Delta_1(x, u, \phi) = \Delta(x, u, \phi)$ . Les matrices  $T$  et  $P$  dans ce cas simple d'application sont égales à la matrice identité. La matrice de transformation des sorties est  $U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Les matrices de l'observateur à entrée inconnue et à convergence en temps fini sont  $F = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $H = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $KK = [10.5083 \quad -9.5083]$ .

L'expression de  $\hat{\psi}$ , solution de (16), est décrite par :

$$\hat{\psi} = \left( -\frac{(1 + K(\hat{x}_1 - \lambda))^2}{\hat{x}_1 - \lambda} (\alpha_3 \hat{x}_1^3 + \hat{v}_q) \right)^{1/2} \quad (23)$$

Sur  $[t_0 + \tau, \infty[$ , l'estimée  $\hat{\psi}$  dans (23) est égale à  $\psi$  entraînant que  $\hat{\psi}$  converge vers  $\psi$  si  $\hat{x}_1 \neq \lambda$ . Deux cas de sollicitation du système seront illustrés, l'exemple 1 de sollicitation du système correspond à une entrée où  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x_1(t) \neq \lambda$ . Le deuxième exemple de sollicitation correspond à une entrée où  $\exists t_i, i = 1, \dots, N$  tel que  $x_1(t_i) = \lambda$ .

#### D. Exemple 1 de sollicitation du système

On souhaiterait solliciter le système avec une entrée particulière  $u_1(t)$  telle que  $\hat{\psi}$  issue de (23) ne possède aucune singularité. L'entrée proposée est  $u_1(t) = -\beta + f \cos(\Omega t)$  avec  $f = 0.5$ ,  $\Omega = 1.7608$ ,  $\beta = 0.5$ .

La figure 5 montre la reconstruction des états du système grâce à l'observateur.

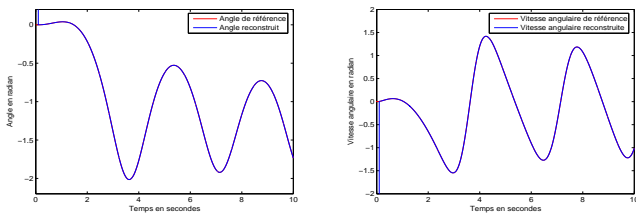


Fig. 5. Reconstruction des états à dynamique rapide du système

Suite à une dérivation numérique du signal de sortie, l'estimation de l'entrée inconnue est illustrée en 6.

La figure 7 illustre l'estimation  $\hat{\psi}$  de  $\psi$ .

Suite à une dérivation numérique de  $\hat{\psi}$ , la figure 8 illustre l'estimation  $\hat{\dot{\psi}}$  de  $\dot{\psi}$ .

A partir de la troisième équation différentielle de (19),  $\phi$  est estimée et représentée dans la figure 9. Une procédure d'extrapolation de la trajectoire de  $\hat{\phi}(t)$  sur l'intervalle  $t \in [t_0, \tau]$  est réalisée, car cet intervalle était nécessaire à la

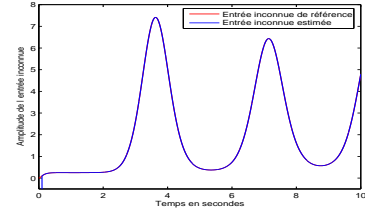


Fig. 6. Estimation de l'entrée inconnue

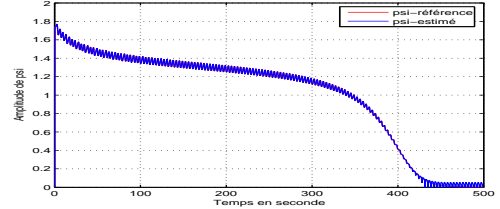


Fig. 7. Estimation de  $\psi$

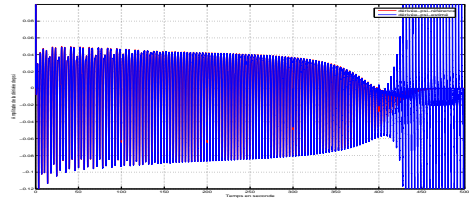


Fig. 8. Estimation de  $\dot{\psi}$

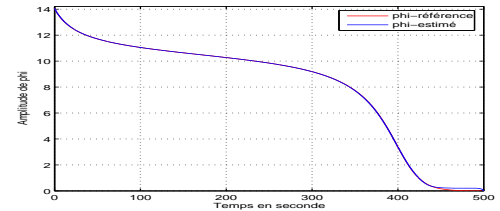


Fig. 9. Estimation de  $\phi$

convergence de l'observateur d'état et ne reflète pas le comportement de variable d'état estimé. Ceci permet d'estimer la condition initiale  $\phi_0$  à l'instant  $t_0$ .

Suite à une dérivation numérique, la figure 10 illustre l'estimation  $\hat{\dot{\phi}}$  de  $\dot{\phi}$ .

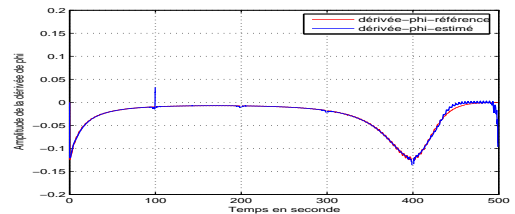


Fig. 10. Estimation de  $\dot{\phi}$

A partir de l'estimée de l'ensemble des variables d'état précédentes, il est possible d'identifier les coefficients  $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  de la classe de modèles des variables d'état à dynamique

lente du système (19).

Pour différents intervalles de prédiction  $I_p$  considérés, une procédure d'identification fournit une estimation des coefficients de la classe de modèle des variables d'état à dynamique lente. Un diagnostic prédictif sous contrainte temporelle est réalisé par intervalle considéré en simulant le système estimé (19) jusqu'à défaillance, à partir de la connaissance de la sollicitation future du système après l'intervalle de prédiction. Sur chaque intervalle de prédiction, une comparaison de la précision de prédiction est réalisée en figure 11 entre l'état  $\phi$  de référence et les différentes prédictions estimées de l'état  $\hat{\phi}$ .

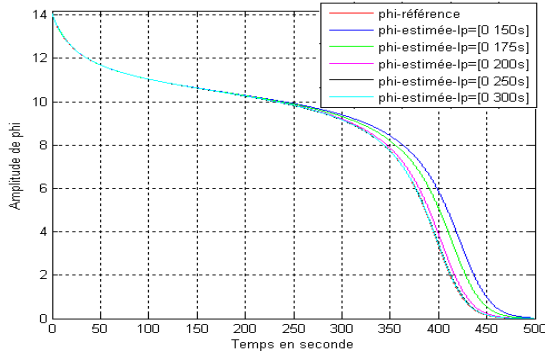


Fig. 11. Diagnostic prédictif sous contrainte temporelle pour différents intervalles de prédiction considérés

En considérant un intervalle de prédiction de  $[0 \ 200s]$  et une tension critique de batterie de 4V, le diagnostic prédictif sous contrainte temporelle réalisé est très précis avec un taux de confiance élevé, prédisant à  $t_p = 200s$  une défaillance du système à 399s. Le système est en réalité considéré comme défaillant à partir de 395 secondes soit une erreur relative de 1%. Ainsi, le temps de vie restant estimé est de 199s.

#### E. Exemple 2 de sollicitation du système

Le système sera sollicité avec l'entrée de référence  $u_2(t) = f \cos(\Omega t)$  avec  $f = 1$ ,  $\Omega = 1.7608$ . La présence de singularités dans l'estimation de  $\hat{\psi}$  est évitée en retirant un ensemble d'intervalles contenant les points singuliers ainsi que leurs voisinages. Puis, une procédure d'interpolation sera utilisée afin de compléter l'horizon d'estimation de  $\hat{\psi}$ . Enfin, la même procédure que dans IV-D est suivie. Sur chaque intervalle de prédiction, une comparaison de la précision de prédiction est réalisée en figure 12 entre la variable  $\phi$  de référence et les différentes prédictions estimées de l'état  $\hat{\phi}$ .

En considérant un intervalle de prédiction de  $[0 \ 200s]$  et une tension critique de batterie de 4V, le diagnostic prédictif sous contrainte temporelle réalisé est précis avec un taux de confiance élevé, prédisant à  $t_p = 200s$  une défaillance du système à 404.1s. Le système est en réalité considéré comme défaillant à partir de 395 secondes soit une erreur relative de 2,3%. Ainsi, le temps de vie restant estimé est de 204.1s.

Les résultats pour les deux exemples de sollicitation sont de très bonne qualité. L'exemple 1 de sollicitation

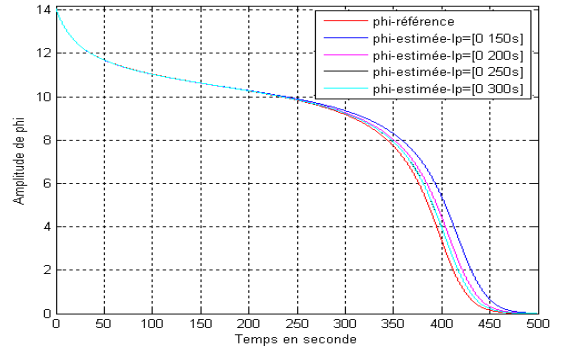


Fig. 12. Diagnostic prédictif sous contrainte temporelle pour différents intervalles de prédiction considérés

a fourni les meilleurs résultats. Ceci s'explique par le fait que les informations utilisées pour la procédure de prédiction ont subi moins de prétraitements et de modification des données observées sur le système. Néanmoins, la sollicitation future suivant le temps de prédiction a été conservée identique à celle précédent ce temps car le système possède un seul mode de fonctionnement dominant. Par conséquent, la variabilité de l'entrée étant quasiment nulle, les résultats sont de très bonne qualité.

Remarque 4 : Il serait intéressant d'effectuer une analyse de variabilité des résultats de prédiction du temps de vie restant réalisée sur des systèmes possédant une diversité de modes de fonctionnement plus importante. Cette analyse comparerait deux influences : celle de la "richesse" d'observation d'un sous-ensemble de modes de fonctionnement  $MF_1$  contenu dans l'intervalle de prédiction, et celle de l'utilisation d'une sollicitation future avec un sous-ensemble de modes de fonctionnement  $MF_2$  pour deux cas  $MF_1 \cap MF_2 \neq \emptyset$  et  $MF_1 \cap MF_2 = \emptyset$ . Par cette démarche proposée et pour différents intervalles de prédiction, la précision des différentes prédictions du temps de vie restant pourrait ainsi être comparée.

#### F. Traitement de masse de données pour le diagnostic prédictif sous contrainte

Réaliser un diagnostic prédictif sous contrainte temporelle engendre deux problèmes particuliers : un problème de stockage d'une grande quantité d'information relative à l'observation du système pouvant s'étendre sur un horizon de temps pouvant-être très important, et le temps de traitement des données relatif à la prédiction à réaliser. L'utilisation des travaux de [10] donne une solution possible face à ces deux problèmes. Etant donnée une série temporelle échantillonnée, il est possible par une mesure de corrélation statistique de vérifier si les échantillons retardés par un instant d'échantillonnage sont indépendants ou liés les uns aux autres successivement. Des algorithmes ont été développés de sorte à déterminer des délais convenables (pouvant-être un multiple de la période d'échantillonnage) afin de ne conserver uniquement que des données indépendantes les unes des autres. L'intérêt de cette approche est de ne conserver et traiter numériquement uniquement que des

données échantillonnées porteuses d'information de l'observation nécessaire à la prédiction de temps de vie restant du système.

## V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

### A. Conclusion

Une définition du diagnostic prédictif sous contrainte temporelle a été présentée et nous semble définir au mieux le concept de pronostic présent dans la littérature. Puis, une méthodologie de diagnostic prédictif sous contrainte temporelle à base de modèle a été développée et illustrée sur un système non-linéaire d'oscillateur mécanique à double potentiels magnétiques non stationnaires. Cette méthodologie a fourni des estimés de temps de vie restant du système étudié très proches du temps de vie restant de référence, validant la méthodologie proposée.

### B. Perspectives de recherche

Il serait intéressant d'effectuer une analyse de variabilité des résultats de prédiction du temps de vie restant réalisée sur des systèmes possédant une diversité de modes de fonctionnement plus importante. Cette analyse comparerait deux influences : celle de la "richesse" d'observation d'un sous-ensemble de modes de fonctionnement contenu dans l'intervalle de prédiction, et celle de l'utilisation d'une sollicitation future avec un sous-ensemble de modes de fonctionnement pouvant être jusqu'à totalement disjoint du précédent. Par cette démarche proposée et pour différents intervalles de prédiction, la précision des différentes prédictions du temps de vie restant pourrait ainsi être comparée.

## RÉFÉRENCES

- [1] Adams, D.E., Nataraju, M., A nonlinear dynamical systems framework for structural diagnosis and prognosis. *International Journal of Engineering Science*, volume 40, pages 1919–1941, 2002.
- [2] Chelidze, D., Identifying Multidimensional Damage in a Hierarchical Dynamical System. *Nonlinear Dynamics*, volume 37, No. 4, pages 307–322.
- [3] Chelidze, D. and Liu, M., Reconstructing slow-time dynamics from fast-time measurements *Philosophical Transaction of the Royal Society A*, volume 366, pages 729–744, 2008
- [4] Coit, D.W., English, J.R., System reliability modeling considering the dependence of component environmental influences. *Reliability and Maintainability Symposium*, pages 214–218, 1999.
- [5] Cusumano, J.P., Chelidze, D., and Chatterjee, A. Dynamical Systems Approach to Damage Evolution Tracking, Part 2 : Model-Based Validation and Physical Interpretation. *Journal of Vibration and Acoustics*, volume 124, pages 258–264, 2002.
- [6] Dong, M., He, D., Hidden semi-Markov model-based methodology for multi-sensor equipment health diagnosis and prognosis. *European Journal of Operational Research*, volume 178(3), pages 858–878, 2007.
- [7] Dragomir, O.E., Gouriveau, R., Dragomir, F., Minca E., Zerhouni, N., Review of Prognostic Problem in Condition-Based Maintenance. *European Control Conference*, 2009.
- [8] Farrar, C. R., Lieven, N.A.J., Damage prognosis : the future of structural health monitoring. *Philosophical transactions of the Royal Society*, volume 365, pages 623–632, 2005.
- [9] Fliess, M., Join, C., Sira-Ramirez, H., Non-linear estimation is easy. *Int. J. Modelling Identification and Control* volume 4, pages 12–27, 2008.
- [10] Fraser, A.M., and Swinney, H.L., Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information. *Physical Review A*, volume 33, pages 1134–1140, 1986.
- [11] Gebraeel, N., Lawley, M., Liu, R., Parmeshwaran, V. Residual life predictions from vibration-based degradation signals : a neural network approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, volume 51, pages 694–700.
- [12] Goebel, K., Saha B., Saxena A., A Comparison of Three Data-Driven Techniques for Prognostics. *62nd Meeting of the Society For Machinery Failure Prevention Technology (MFPT)*, pages 119–131, 2008.
- [13] Goh., K.M., Tjahjono, B., Baines, T., Subramaniam, S. A review of Research in Manufacturing Prognostics. *IEEE International Conference on Industrial Informatics*, pages 417–422, 2006.
- [14] Gucik-Derigny, D., Outbib, R., Ouladsine, M., Estimation of Damage Behaviour for Model-Based Prognostic. *7th Ifac International Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, 2009.
- [15] Grall, A., Béranger, C., Dieulle, L. A condition-based maintenance policy for stochastically deteriorating systems. *Reliability Engineering and System Safety*, volume 76, pages 167–180, 2002.
- [16] Hou, M., Müller, P.C. Design of Observers for Linear Systems with Unknown Inputs. *IEEE Transaction on Automatic and Control.*, volume 37, pages 871–875, 1992.
- [17] Kopnov, VA Optimal degradation processes control by two-level policies. *Reliability Engineering and System Safety*, volume 66, pages 1–11, 1999.
- [18] Luo, J., Namburu, M., Pattipati, K.R., Liu, Q., Chigusa, S. Model-Based Prognostic Techniques Applied to a Suspension System. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, volume 38, pages 1156–1168, 2008.
- [19] Mboup, M., Join, C., Fliess, M. Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numerical Algorithms*, volume 50, pages 439–467, 2009.
- [20] Raff T., Lachner, F., Allgöwer, F., A finite Time unknown Input Observer for Linear Systems. *Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2006.
- [21] Schwabacher, M. A., Goebel, K., A Survey of Data-Driven Prognostics. *Infotech@Aerospace*, 2005.
- [22] Wang, X., Yu, G., Koc, M., Lee, J., Wavelet Neural Network for Machining Performance Assessment and Its Implications to Machinery Prognostics. *Proceedings of the 5th International Conference on Managing Innovations in Manufacturing (MIM)*, 2002.
- [23] Yan, J. and Lee, J., Koc, M. Predictive algorithm for machine degradation detection using logistic regression. *5th International Conference on Managing Innovations in Manufacturing, MIM*, pages 172–178, 2002.